UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (Paris 7)
UFR de Mathématiques

ÉCOLE DOCTORALE : Savoirs scientifiques :
Épistémologie, histoire des sciences et didactique des disciplines

DOCTORAT

Spécialité : didactique des mathématiques

Nadine GRAPIN

Étude de la validité de dispositifs d'évaluation et conception d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves de fin d'école.

Thèse dirigée par Brigitte GRUGEON-ALLYS et Nathalie SAYAC

Soutenue le 10 décembre 2015

Membres du jury :

Mme Lucie DEBLOIS, Université de Laval	Rapporteure
Mme Brigitte GRUGEON-ALLYS, LDAR, UPEC	Directrice de la thèse
Mme Nathalie LOYE, Université de Montréal	Examinatrice
M. Yves MATHERON, ADEF,AMU, IFE-ENS de Lyon	Rapporteur
M. Eric RODITI, EDA**,** Université Paris-Descartes	Examinateur
Mme Nathalie SAYAC, LDAR, UPEC	Directrice de la thèse
M. Laurent VIVIER, LDAR, Université Paris-Diderot	Examinateur

REMERCIEMENTS

Au terme de la rédaction de la thèse, je souhaiterais d'abord remercier mes deux directrices pour la confiance qu'elles m'ont accordée, leurs conseils et leur soutien tout au long de ces années. Mes premières recherches en didactique sur les évaluations externes ont débuté avec Nathalie Sayac : je suis ravie de partager avec elle les différentes recherches que nous menons ensemble depuis 2013 et la remercie de m'avoir incitée et motivée à m'engager dans cette recherche. L'orientation de mon travail vers les évaluations diagnostiques et la prise en compte d'une approche anthropologique sont dues à ma rencontre avec Brigitte Grugeon-Allys et aux échanges que j'ai eus avec elle autour des questions d'évaluation. Je la remercie de m'avoir accompagnée dans ce cheminement et d'avoir toujours été disponible pour répondre à mes questions.

J'exprime tous mes remerciements à Lucie Deblois et Yves Matheron pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse : leurs remarques constructives et les questions qu'ils ont soulevées m'ont permis de nourrir mes réflexions et de revisiter mon travail. Je remercie chaleureusement Eric Roditi d'avoir accepté de faire partie du jury : les échanges que j'ai pu avoir avec lui lors de diverses réunions autour des questions d'évaluation ont toujours été très enrichissants pour moi. Je remercie également Laurent Vivier d'avoir accepté d'être membre du jury et suis heureuse que Nathalie Loye ait accepté, elle aussi, d'être examinatrice : sa rencontre à l'occasion d'un colloque de l'ADMEE et les discussions qui ont suivi sur l'articulation entre évaluation et didactique m'ont permis de percevoir les potentialités de la complémentarité entre les approches didactique et psychométrique.

La teneur de la thèse doit beaucoup à la possibilité que j'ai eue de travailler sur les données des évaluations CEDRE ; B. Troseille et T. Rocher, chefs du bureau B2 à la DEPP ainsi que J. M. Pastor, chargé d'étude à la DEPP, ont toujours été favorables à ce qu'un tel travail puisse être effectué et ils m'ont donné accès, dans le cadre de différentes conventions entre le LDAR et la DEPP, à l'ensemble des données de ces évaluations (items de l'évaluation, caractéristiques statistiques, scans des productions d'élèves, etc.). Je les remercie à la fois pour leur disponibilité et pour leurs explications relatives aux méthodologies statistiques employées dans les différentes évaluations externes.

L'aboutissement de ce travail doit aussi beaucoup à Eric Mounier : en me proposant de participer à la recherche qu'il a initiée sur l'enseignement du nombre au CP et de partager différents enseignements au sein de l'ESPE de Créteil, il n'a eu de cesse de m'encourager et de me conseiller avec bienveillance et gentillesse tout en me faisant partager ses connaissances et son expérience.

Je remercie également les collègues engagés dans l'ANR Néopraéval pour leurs conseils et leur soutien, en particulier Marc Vantourout et Rémi Goasdoué, avec qui j'ai souvent échangé sur la notion de validité en évaluation et sur les différents points de vue permettant de la considérer.

Je remercie pour leur disponibilité les différents enseignants, CPC et DEA qui m'ont permis de recueillir des productions d'élèves de CM2 en fin d'année scolaire.

L’ESPE de l’académie de Créteil, par le biais de la Commission Recherche, a soutenu mon travail en me permettant de bénéficier d’un aménagement de service. Je remercie également mes collègues formateurs de l’ESPE pour leurs encouragements.

Enfin, je tiens à remercier ma famille et mes amis pour leur patience et leur soutien durant ces années, surtout durant les trois derniers mois de la thèse ; leur présence, même à distance, m’a beaucoup aidé, notemment dans les moments de doute. Les occasions qu’ils m’ont données de faire « des pauses », culinaires ou sportives, en discutant avec eux « d’autre chose », m’ont aidé à me ressourcer et m’ont permis non seulement de finaliser ce projet mais aussi d’avoir réussi à le mener avec sérénité.

Table des matières

INTRODUCTION

La problématique de l'évaluation des élèves soulève actuellement, en France, de nombreux débats dépassant le monde de l'enseignement et portant par exemple, sur les notes et leur éventuelle suppression, les compétences avec la mise en place du nouveau Socle Commun de Connaissances de Compétences et de Culture (rentrée 2016) ou encore les résultats des élèves français à diverses évaluations externes nationales ou internationales. La volonté du Ministère de l'Éducation Nationale (MEN) d'ouvrir ces débats actuels a été affichée par l'organisation d'une conférence nationale sur l'évaluation des élèves, entre juin 2014 et février 2015, dont l'objectif était de « contribuer à la construction d'une nouvelle politique d'évaluation des élèves, au service des apprentissages » ; à travers cette annonce, on perçoit une volonté de repenser et de faire évoluer les pratiques d'évaluation pour qu'elles soient davantage profitables aux élèves.

Si l'on s'attache à chercher des outils d'évaluation mis à la disposition des enseignants par le MEN pour évaluer leurs élèves, force est de constater qu'il en existe peu pour l'école primaire. Sur le site Eduscol (http://eduscol.education.fr/), sont proposés : les évaluations nationales en français et mathématiques fin de CM2 et fin de CE1 de 2010 à 2013 (avec le livret de l'élève et celui de l'enseignant) et des outils d'aide à l'évaluation (en maternelle, pour les élèves en situation de handicap et pour les sciences et technologie). Même si des outils locaux, par département ou par circonscription existent, l'enseignant de l'école primaire a finalement peu de ressources institutionnelles à sa disposition pour évaluer ses élèves : les évaluations nationales évoquées précédemment se situant plutôt en fin d'enseignement et visant plutôt à faire le lien avec le collège, ne sont guère adaptées (et ce n'est pas leur objectif premier) pour accompagner l'enseignant dans son travail d'évaluation au quotidien. La situation est légèrement différente pour l'enseignant en mathématiques du collège. L'existence du Diplôme National du Brevet (DNB) est un support d'évaluation institutionnelle permettant de situer certaines attentes quant aux connaissances à acquérir en fin de collège, mais on peut également déplorer le peu d'outils à la disposition des enseignants de collège pour évaluer les connaissances de leurs élèves.

Depuis les années 1970 où elles ont été mises en place, les évaluations externes nationales et internationales ont des résultats de plus en plus médiatisés et conduisent toutes au même constat : le niveau des élèves français en mathématiques en fin de collège est en baisse (Dalibard & Arzoumanian 2015, Kaspaik & Salles 2013) et celui des élèves de fin d'école apparaît comme stable (Dalibard & Pastor 2015). La comparaison des résultats des élèves français de fin d'école avec ceux d'autres pays, en mathématiques, n'est pas encore possible, la France n'ayant repris sa participation à des enquêtes internationales de ce niveau, que depuis 2015. Nous nous limitons dans cette introduction à ce bref constat sur l'évolution des résultats des élèves ; il nous interroge néanmoins sur la façon dont les connaissances des élèves sont évaluées dans de tels dispositifs et sur les conclusions qu'il est possible d'en tirer pour l'enseignement des mathématiques.

Pour gérer l'hétérogénéité des élèves éclairée en partie par ces évaluations, des dispositifs d'accompagnement personnalisés sont proposés à l'entrée au collège et au lycée, notamment sous la forme d'heures supplémentaires incluses dans l'emploi du temps des élèves, avec pour objectif affiché d'apporter une réponse diversifiée aux besoins des élèves. Les modalités de mise en œuvre de ces dispositifs dans les établissements sont laissées à l'initiative des équipes pédagogiques, tout comme le contenu des séances qui peut viser, pour l'accompagnement personnalisé en classe de 6ème, une remise à niveau en cas de difficultés importantes. Si des ressources institutionnelles existent quant au contenu possible des séances d'accompagnement personnalisé, elles ne portent en aucun cas sur l'évaluation spécifique des besoins des élèves : comment répondre aux besoins des élèves si ceux-ci ne sont pas clairement identifiés ? Par ailleurs, au-delà de ces dispositifs, l'enseignant est amené à gérer l'hétérogénéité dans sa classe au quotidien, durant les séances ordinaires : quelles ressources lui proposer ?

Origine du questionnement et premier axe de travail

L'intérêt que nous portons aux évaluations externes standardisées en mathématiques est directement lié au fait que nous ayons participé à la conception et à l'analyse des résultats de certaines d'entre elles ; les premiers travaux que nous avons menés avec Sayac (Sayac & Grapin 2013) sur l'analyse du contenu des évaluations bilan CEDRE 2008 (Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon) en fin d'école sont ainsi à l'origine de ce travail de thèse. Nous avons pu constater qu'en apportant un point de vue didactique sur le contenu de telles évaluations, il était possible de mieux étudier et surtout interpréter les résultats qu'elles produisent et d'en percevoir à la fois les forces et les limites. Il ne s'agit nullement, pour nous, de remettre en cause la méthodologie utilisée pour ces évaluations institutionnelles, mais plutôt de les analyser tant dans leur contenu à travers les items qu'elles contiennent, que dans les résultats qu'elles fournissent avec leur interprétation. Notre travail se situe plutôt dans la lignée de celui amorcé par Bodin (1997, 2006a, 2006b) autour de l'évaluation PISA (Programm for International Student Assessment) et sur lequel nous reviendrons.

Nous cherchons à croiser plusieurs approches, en appui sur la didactique des mathématiques, pour concevoir une méthodologie afin d'analyser le contenu et les résultats de telles évaluations ; en ce sens, nous nous plaçons dans une approche descriptive et non prescriptive. Nos premières questions se centrent donc sur la conception des évaluations externes standardisées et sur leur contenu : la sélection des exercices permet-elle de rendre compte effectivement du niveau des acquis des élèves comme annoncé dans les objectifs des évaluations ? Sur quels indicateurs reposent les résultats et les conclusions de ces évaluations ?

Choix du niveau et du domaine

Souhaitant poursuivre le travail engagé autour de l'évaluation CEDRE, en considérant dans une moindre mesure les évaluations internationales, nous avons situé notre étude en fin d'école élémentaire. De façon générale, les résultats à différentes évaluations externes ont montré « une dégradation des performances des élèves en mathématiques, à la fin de l'enseignement obligatoire » (Feyfant 2015). Plus précisément, à la fin de l'école primaire, les évaluations nationales ont permis d'établir, depuis plusieurs années, que les élèves présentent des difficultés sur les nombres et sur les opérations à l'entrée en 6ème (Chesné 2014). Celles-ci sont repérées principalement sur les nombres décimaux et finalement, aucun état des connaissances des élèves sur les nombres entiers n'est dressé de façon précise à ce stade de l'enseignement ; or, on peut supposer que les difficultés inhérentes aux nombres décimaux sont liées à une compréhension inadaptée du système décimal d'écriture des nombres, ce qui justifie un travail en amont sur l'évaluation des connaissances des élèves sur les nombres entiers en fin d'école.

La perspective d'un travail autour des nombres entiers et du calcul en fin d'école et à l'entrée au collège semble d'autant plus importante que la comparaison des résultats aux évaluations menées en fin de CE2 en 1999 et en 2013 montre une stabilité dans le calcul posé et mental, mais une baisse dans la connaissance des nombres et la résolution de problèmes numériques (Andreu & al. 2014). S'appuyant en partie sur ce constat, le Conseil National de l'évaluation du système scolaire a choisi pour thème de sa deuxième conférence de consensus : « nombres et opérations : premiers apprentissages ». Cette initiative montre non seulement l'intérêt porté aux différentes évaluations externes par les instances institutionnelles, mais elle témoigne aussi de la prise en compte des difficultés persistantes repérées auprès des élèves de fin d'école sur les premiers apprentissages des nombres.

Le domaine que nous nous proposons d'étudier englobe donc ce qui relève des nombres entiers et de leur écriture, du calcul et de la résolution de problèmes avec les nombres entiers. Pouvoir ainsi caractériser d'un point de vue didactique les connaissances des élèves sur les nombres entiers, le calcul et la résolution de problèmes à la fin de l'école et à l'entrée du collège est un objectif qui nous semble crucial à la fois pour comprendre les difficultés qui peuvent apparaître dans l'apprentissage des nombres en général (décimaux et rationnels) et des opérations, mais aussi pour étudier l'origine de ces difficultés en lien avec les programmes scolaires et les pratiques enseignantes. Comment caractériser les connaissances que les élèves doivent acquérir en fin d'école ? Comment les évaluer pour pouvoir déterminer d'éventuels besoins d'apprentissage permettant à ces élèves de progresser ? En quoi les résultats de ces évaluations peuvent-ils être exploités pour étudier l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire ?

Second axe de travail

La question de l'évaluation des besoins des élèves rejoint celle de la gestion de l'hétérogénéité dans les classes que nous soulevions précédemment. Si l'on observe de plus près les résultats aux évaluations nationales, les connaissances maitrisées par les élèves sont spécifiées, mais aucune précision n'est donnée quant aux difficultés rencontrées puisque ce n'est pas l'objectif de telles évaluations. Ainsi, les constats sur l'hétérogénéité des connaissances des élèves se multiplient, sans pour autant donner à l'enseignant des ressources lui permettant de réguler son enseignement au service des apprentissages des élèves.

Au-delà des manques institutionnels que nous avons rappelés au début de cette introduction, nous constatons que certaines collections de manuels pour l'école élémentaire et pour le collège proposent désormais des outils de différenciation sous la forme d'exercices différenciés, de supports d'aide avec un accompagnement pour la mise en œuvre en classe et d'exemples d'évaluations. Si de courts tests, bien souvent sous la forme de QCM, sont proposés en début de chapitre dans certains manuels de 6ème pour repérer les connaissances des élèves avant de mener la séquence, ils ne sont pas encore présents de façon aussi systématique dans les manuels de l'école. Les ressources se développent donc pour outiller l'enseignant dans la différenciation et l'adaptation de son enseignement, mais les évaluations présentes dans ces ressources restent cependant rares et difficilement exploitables. En effet, déterminer les besoins des élèves demande au préalable non seulement d'évaluer leurs connaissances, mais aussi de pouvoir interpréter leurs erreurs, d'en comprendre les causes pour ensuite proposer un enseignement adapté ; le traitement des réponses des élèves doit donc dépasser le codage binaire correct-incorrect pour prendre en compte la démarche adoptée, le type d'erreur, etc. Ce qui peut se révéler assez fastidieux et non usuel pour un enseignant.

Le développement d'outils de diagnostic automatisé apparaît comme une solution pour pallier ces besoins tels que nous les avons identifiés ; si la conception d'un tel outil peut permettre d'accompagner l'enseignant et de favoriser l'apprentissage des élèves, elle constitue aussi une problématique de recherche en didactique particulièrement riche, comme en témoignent les travaux menés autour du développement du diagnostic automatisé *Pépite* (Grugeon 1995, Grugeon-Allys & al. 2012) en algèbre au début du lycée. En effet, la construction d'un tel dispositif demande à la fois de concevoir un test solide, de déterminer des classes de réponses anticipées pour caractériser les erreurs des élèves et de définir des profils d'élèves conduisant ensuite à la mise en œuvre de parcours de différenciation adaptés (Pilet 2012).

Le second axe de notre travail se situe donc dans la continuité des recherches menées autour du diagnostic *Pépite* en algèbre au début du lycée : il s'agit pour nous de mettre à l'épreuve les modèles construits dans le cadre de ces travaux, d'étudier leur robustesse et leur adaptation à un autre domaine mathématique, ici notre domaine d'étude (écriture des nombres entiers - calcul - résolution de problèmes) et à un autre niveau d'enseignement (fin d'école - début de collège). L'automatisation du diagnostic, telle qu'elle existe actuellement pour *Pépite* en algèbre (Delozanne & al. 2010), n'est pas un des objectifs de notre travail et nous nous limitons dans la thèse à définir un modèle de profils d'élèves à partir de classes de réponses anticipées. Comment modéliser les connaissances des élèves sur les nombres entiers et le calcul à l'entrée en fin d'école pour les structurer ? Comment articuler des classes de réponses anticipées avec le modèle d'analyse pour concevoir des profils d'élèves ?

Premiers éléments de problématique

Nous situons donc notre travail à l'articulation école-collège, sur le domaine des nombres entiers (écriture des nombres entiers - calcul - résolution de problèmes). Un premier axe vise à analyser des dispositifs d'évaluations externes existants, en particulier les bilans CEDRE 2008 et 2014, avec un double enjeu : concevoir une méthodologie d'analyse prenant en compte la spécificité de ces dispositifs et exploiter cette dernière pour décrire les résultats obtenus par les élèves de fin d'école sur le domaine étudié et ainsi aboutir à la caractérisation de leurs connaissances dans le domaine des nombres entiers.

Quelle que soit l'évaluation considérée, la recherche de conditions pour définir une évaluation valide au sens « d'évaluer effectivement ce qu'elle prétend évaluer » s'avère cruciale. Nous visons donc la construction d'une méthodologie d'analyse de la validité des évaluations, en particulier des évaluations externes. Celles-ci se révèlent en effet spécifiques puisqu'elles intègrent, dans leur conception, des outils statistiques et probabilistes qui ne sont pas sans conséquence sur le choix des items et sur les résultats produits. Cette méthodologie doit permettre d'analyser le contenu des évaluations, mais aussi d'interpréter les résultats des élèves et de les mettre en regard de l'enseignement prescrit et dispensé. Il est donc nécessaire, en vue d'une étude didactique des évaluations, de définir, sur le domaine des nombres en fin d'école, un référent décrivant les savoirs attendus à ce niveau scolaire. En nous plaçant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1999), la définition d'une praxéologie de référence permet d'analyser les techniques et technologies apprises, déterminées à partir des résultats des élèves, au regard des praxéologies à enseigner et enseignées : un tel choix, que nous justifierons par la suite, ne nous semble pas suffisant. En effet, dans ce cadre, les erreurs des élèves sont analysées selon les différentes institutions dans lesquelles vit le savoir mathématique et selon les différentes étapes de la transposition didactique. C'est, en partie pour cette raison et en particulier pour l'analyse des productions des élèves, que nous avons souhaité croiser une approche anthropologique avec une approche cognitive.

Ces deux approches sont en effet indispensables pour travailler ou explorer le second axe de notre travail qui s'intéresse à la conception d'une évaluation diagnostique permettant de repérer les besoins des élèves et par la suite de réguler l'enseignement. Pour ce faire, il est nécessaire de concevoir, au préalable, un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances arithmétiques et numériques (sur les nombres entiers) des élèves de fin d'école conduisant à la définition de profils d'élèves. Aussi, nous avons conçu une évaluation diagnostique en lien avec la méthodologie d'analyse développée pour les évaluations externes (sans prise en compte des approches statistiques) en la fondant sur la praxéologie de référence et l'avons expérimentée sur un échantillon d'élèves de fin d'école.

Plan de la thèse

Afin d'introduire notre problématique et de mieux situer les enjeux de notre travail, nous consacrons le premier chapitre de la thèse aux questions didactiques relatives à l'évaluation et aux évaluations externes en particulier, avec un double point de vue : les questions que la didactique pose aux évaluations externes et, réciproquement, celles que les évaluations posent à la didactique. En abordant non seulement les recherches menées en didactique sur cette question, mais aussi les méthodologies de conception des évaluations externes standardisées, nous précisons notre questionnement et formulons les deux axes de notre problématique à la suite de ce premier chapitre.

Nous consacrons le deuxième chapitre de la thèse à la définition d'une organisation mathématique de référence pour l'étude du domaine des nombres entiers et de l'arithmétique en fin d'école / début de collège. En situant ce domaine par rapport aux programmes de l'école primaire et en définissant mathématiquement les notions impliquées dans ce dernier, nous menons une étude épistémologique s'appuyant sur des traités et des manuels anciens. Cette analyse montre des exemples de transpositions, notamment sur les opérations et le calcul, entre des savoirs mathématiques définis par les mathématiciens et des savoirs enseignés. Nous complétons ce travail par une partie spécifique à la résolution de problèmes et concluons en présentant la structure de l'organisation mathématique (OM) de référence en OM régionales et locales.

Le troisième chapitre porte sur l'étude des praxéologies de l'OM de référence à travers la présentation des différents types de tâches, des techniques et technologies qui leur sont associées ; nous nous appuyons sur l'étude menée dans le chapitre précédent et la complétons par des extraits de manuels actuels en lien avec les programmes de l'école primaire.

Nous définissons dans le quatrième chapitre la méthodologie construite pour concevoir et analyser le contenu d'une évaluation et l'interprétation de ses résultats. Cette méthodologie repose sur une complémentarité de différentes approches épistémologique, didactique, psycho-didactique et psychométrique; elle permet d'étudier la variété et la représentativité des tâches, de déterminer les techniques qui peuvent être mobilisées pour résoudre les tâches proposées et de dégager des éléments de validité relatifs à l'évaluation étudiée. Nous étudions les tâches de l'évaluation à partir de l'OM de référence définie dans le chapitre 3 et expliquons la façon dont nous prenons en compte différents facteurs intervenant dans la complexité des items.

L'exploitation de cette méthodologie pour analyser les évaluations CEDRE fin d'école 2008 et 2014 fait l'objet du cinquième chapitre**,** avec un double enjeu :

- une étude du contenu même de l'évaluation et les résultats produits : que nous apprend l'évaluation CEDRE sur les connaissances des élèves en fin d'école sur le domaine des nombres entiers ? Avec quelles garanties de validité ? Après une analyse des tâches relevant du domaine étudié, nous exploitons l'échelle des scores de CEDRE 2014. Des considérations plus locales suivent, notamment dans des perspectives comparatives entre 2008 et 2014, à la fois sur l'échelle de scores et sur certains items « spécifiques », présentant des caractéristiques statistiques particulières (fonctionnement différentiel, item non discriminant, etc.).
- une exploitation secondaire des données pour apporter des éléments plus ciblés sur les savoirs que les élèves maitrisent en fin d'école sur le calcul.

En conclusion de cette partie et suite à ces analyses locales et globales, nous interrogeons, au regard des praxéologies apprises et des praxéologies à enseigner, celles enseignées.

Nous consacrons le sixième chapitre à la définition d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances des élèves sur les nombres entiers (numération et arithmétique) s'appuyant sur la praxéologie de référence définie précédemment. Le modèle d'analyse conçu dans cette partie s'appuie sur des approches anthropologique et cognitive ; nous le comparons à d'autres modèles existants sur le domaine du nombre (modèles cognitifs) et à des modèles sous-tendant des évaluations externes ou des outils d'évaluation.

Enfin, le septième chapitre est consacré à la conception d'un test diagnostique se situant dans la lignée du diagnostic *Pépite* réalisé en algèbre, portant sur le domaine des nombres entiers (numération et arithmétique en fin d'école). Les critères de validité dégagés dans le quatrième chapitre interviennent dans la conception du test ; certains choix sont aussi orientés par les résultats des évaluations CEDRE étudiés dans le cinquième chapitre. Enfin le modèle d'analyse multidimensionnelle défini dans le sixième chapitre permet de définir des classes de réponses anticipées et de construire des profils. Une première mise à l'épreuve du test et du modèle sur des élèves de fin de CM2 permet de montrer l'opérationnalité et l'intérêt du modèle et de proposer des pistes d'amélioration en lien avec une informatisation du test et ses applications pour organiser une régulation de l'enseignement.

Un schéma récapitulatif de l'architecture de la thèse et de l'articulation entre les différents chapitres est donné page suivante.

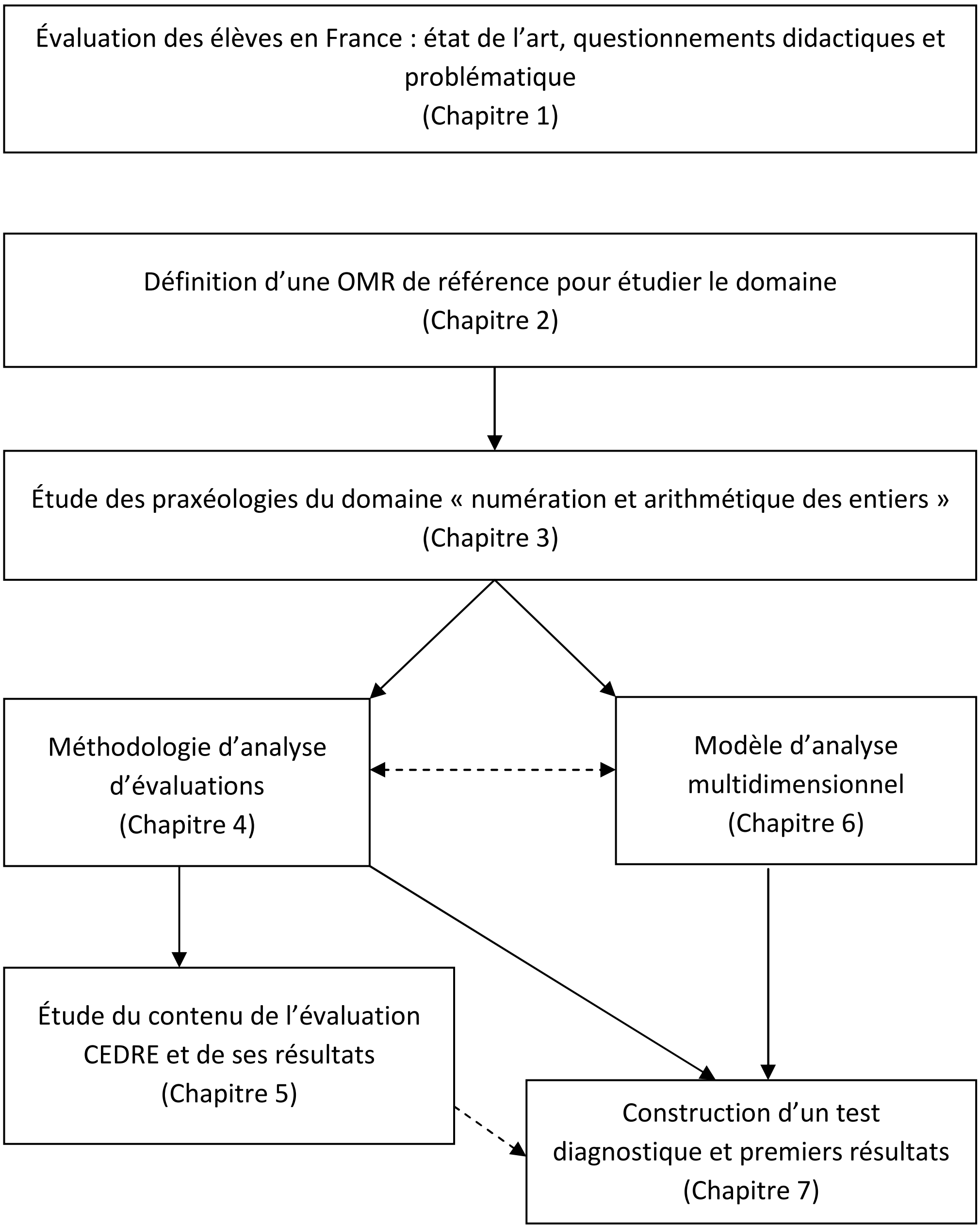


Figure 1 - Organisation générale de la thèse

Cette thèse s'inscrit dans le projet ANR NéoPraEval (Nouveaux Outils pour de nouvelles PRAtiques d'EVALuation et d'enseignement des mathématiques). Ce projet est financé par l'Agence Nationale de la Recherche et a pour objectif d'outiller les enseignants pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en mettant à leur disposition des outils d'évaluation diagnostique automatique utilisables dans leurs classes ainsi que des ressources appropriées aux besoins repérés des élèves (http://www.ldar.univ-paris-diderot.fr/page/praeval). Notre travail se situe plus particulièrement dans les tâches 1 (Développer une expertise pour étudier la validité des outils d'évaluation et concevoir des dispositifs d'évaluation) et 2 (Utiliser cette expertise pour étendre des dispositifs d'évaluation existants) de ce projet ; nous précisons dans le texte les travaux qui s'appuient sur ceux menés dans le cadre de l'ANR et que nous reprenons pour la thèse.

CHAPITRE 1

ÉVALUATION DES ÉLÈVES EN FRANCE : ÉTAT DE L'ART, QUESTIONNEMENTS DIDACTIQUES ET PROBLÉMATIQUE

Interroger au filtre de la didactique les dispositifs d'évaluation externes existants demande au préalable que nous précisions leurs enjeux, la méthodologie de leur conception, les résultats qu'ils fournissent, mais aussi que nous les replacions dans le champ plus global des recherches en docimologie et en psychométrie : c'est l'objet d'une première partie de ce chapitre. Nous revenons alors sur des considérations générales articulant évaluation et didactique qui nous conduisent à aborder différents types d'évaluation, leurs enjeux et aussi la notion de compétence, qui apparait désormais de façon récurrente, comme objet évalué, au même titre que les connaissances.

Nous présentons ensuite des dispositifs d'évaluations externes existant en mathématiques ; il ne s'agit pas d'être exhaustive sur ce point, mais plutôt de présenter leurs objectifs, les cadres sur lesquelles ils reposent et les différentes étapes de leur conception. Nous articulons cette présentation avec des questions transversales liées à la validité des évaluations, mais aussi aux méthodologies statistiques qui engendrent les résultats. En effet, ces évaluations sont conçues avec un protocole spécifique et des contraintes qui leur sont propres ; la psychométrie y occupe une place importante et les modèles statistiques ou probabilistes qui sont utilisés pour produire les résultats ne peuvent être ignorés puisqu'ils sont soumis à des hypothèses fortes qui leur confèrent certaines limites.

Nous choisissons donc de présenter dans ce chapitre des généralités sur les évaluations, puis d'exposer les étapes de conception des évaluations externes en revenant sur les modèles psychométriques qui les sous-tendent ; nous listons progressivement les questions que nous aborderons dans notre travail et clôturons ce chapitre par la présentation de notre problématique, en précisant au préalable les éléments théoriques sur lesquels elle s'appuie.

I ÉVALUATION ET DIDACTIQUE : CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

Ce premier paragraphe vise à préciser les termes que nous employons par la suite et à les situer non seulement dans le champ de l'évaluation, mais aussi dans celui de la didactique des mathématiques, en nous référant aux travaux existants.

I.1 Qu'évalue-t-on ? Comment ? Dans quels buts ?...

Les définitions de la notion d'évaluation prolifèrent, « chaque auteur en propose une, si ce n'est la sienne propre » (Figari & Remaud 2014, p.39). Nous avons donc choisi de ne pas en faire une revue, d'autant qu'elles ne sont pas toutes formulées dans un contexte d'enseignement, mais plutôt de nous centrer sur celles déjà exploitées dans des travaux en didactique des mathématiques et sur celles qui nous permettent de préciser notre questionnement.

I.1.1 Des définitions de l'évaluation

Dans une des premières recherches sur l'évaluation en didactique des mathématiques, Chevallard & Feldmann (1986) s'appuient sur Noizet et Caverni (1978) pour définir l'évaluation comme « un acte par lequel, à propos d'un évènement, d'un individu ou d'un objet, on émet un jugement en se référant à un (ou plusieurs) critère(s), quels que soient ces critères et l'objet du jugement », puis sur celle de De Landsheere (1979) qui perçoit l'évaluation comme « le processus systématique visant à déterminer dans quelle mesure les objectifs éducatifs sont atteints par les élèves ». Ces deux premières définitions soulèvent ainsi la question du jugement relativement à une norme, définie ici en termes de critères ou d'objectifs à atteindre.

Bodin (1997), ajoute une dimension différente de celle de jugement, celle du traitement de ces informations, en proposant la définition suivante, qu'il qualifie de « minimale » :

> « Évaluer suppose d'*organiser* et d'*étudier* des situations permettant de recueillir des informations qui, après *traitement*, soient susceptibles de révéler quelque chose de fiable et de substantiel sur la « valeur » d'un « objet » ». Bodin (1997, p. 60)

Nous retrouvons les trois étapes (recueillir, étudier, traiter) caractérisant le processus d'évaluation chez De Ketele (1989) pour qui évaluer signifie :

> « Recueillir un ensemble d'informations suffisamment pertinentes, valides et fiables ; d'examiner le degré d'adéquation entre cet ensemble d'informations et un ensemble de critères adéquats aux objectifs visés au départ ou ajustés en cours de route ; en vue de prendre une décision évaluative. » De Ketele (1989)

Cette définition questionne la qualité même des informations récoltées à partir des situations d'évaluation évoquées par Bodin et soulève des questions relatives à la fidélité, la pertinence et la fiabilité des évaluations ; nous définirons par la suite ces trois critères pour les dispositifs d'évaluations externes.

Retenons une dernière définition, donnée par De Peretti & al. (1998), différente des précédentes, mais qui nous semble complémentaire puisqu'elle prend en compte la relation entre l'élève et l'enseignant et s'appuie sur l'étymologie du terme « évaluation » :

> « comme celui d'une incitation délibérée à faire sortir des valeurs », à valoriser. Il s'agit alors clairement d'une visée d'encouragement des élèves dans leur travail, établissant au voisinage de l'enseignant un climat de confiance : en vue de soutenir et de rythmer, chez les enseignés, les efforts d'apprentissage, de savoir faire et d'obtention du savoir, en se protégeant de tout laxisme.» De Peretti & al. (1998, p. 474)

Nous rejoignons Reuter & al. (2013, p.101) sur le fait que, quelle que soit la définition que l'on choisit elle reste large et montre que l'évaluation « n'est pas initialement une notion didactique » ; ce que Chevallard (1999) considère positivement, « l'évaluation scolaire gagne à être saisie comme une spécification de la notion générique d'évaluation.»

Si la dernière définition (De Perreti & al. 1998) est plutôt axée sur l'encouragement des élèves dans leur travail et est davantage en lien avec les pratiques d'évaluation de l'enseignant dans sa classe, nous retenons plutôt pour notre travail, qu'un dispositif d'évaluation, en particulier externe, peut être caractérisé par trois étapes :
- un recueil d'informations, que nous centrons en didactique, sur les connaissances mathématiques des élèves ;
- un traitement de ces informations consistant à l'analyse des réponses avec un éventuel codage ;
- une production de résultats qui peuvent être de formes différentes selon les enjeux de l'évaluation (par exemple sous la forme de scores, comme dans les évaluations internationales).

Évaluer les connaissances des élèves à un instant donné de leur scolarité demande à ce que soient pris en compte les programmes scolaires et l'enseignement reçu ; par conséquent, si on devait caractériser une approche didactique de l'évaluation, elle se devrait d'étudier les «relations entre enseignement, apprentissages et contenus, entre évaluation et construction des disciplines scolaires ou encore entre didactiques et pédagogies ». (Reuter & al. 2013). Or, pour déterminer l'état des connaissances des élèves, le concepteur de l'évaluation doit sélectionner différentes tâches pour pouvoir mettre en relation les différentes informations recueillies lors du traitement des réponses fournies. Pluvinage (1979) évoque alors la notion de risque pour décrire à la fois la position de l'élève, mais aussi celle du concepteur :

> « il n'y a pas d'évaluation sans risque : risques pris par l'évalué en répondant, mais aussi risques pris par l'évaluateur en élaborant et en corrigeant. […] Cette prise en considération de la notion de risque est elle-même issue de la conviction que nous ne savons pas, nous ne pouvons pas savoir, exactement ce que quelqu'un sait et ce qu'il sait faire. » Pluvinage (1979)

En construisant des outils méthodologiques adaptés à l'analyse des évaluations externes ou internes, nous visons à diminuer les risques pris par l'évaluateur pour concevoir des évaluations de qualité permettant non seulement de repérer les besoins d'apprentissage des élèves, mais aussi des leviers leur permettant de progresser.

I.1.1.i Évaluer pour juger, évaluer sans juger...

Si la seule définition de Noizet et Caverni (1978) que nous avons citée réfère à un quelconque « jugement », Bodin (1997) soulevait lui aussi cette question : « évaluer pour juger ou évaluer pour aider ? ». En évaluation et en docimologie, la formulation d'un jugement de valeur est une des finalités qui est souvent assignée à l'évaluation (Figari & Remaud 2014, p.42). Comme l'expliquent Figari et Tourmen (2006), ce jugement renvoie à la mise en relation et à la comparaison entre des données (des référés) et un référent, une «information choisie en référence, qui peut être constituée par un idéal ou une norme, mais aussi par un niveau, un élément de comparaison particulier, non normatif. »

Que l'on définisse le référent comme un idéal ou plus largement comme un élément de comparaison, c'est en se référant à lui que l'interprétation des données sera menée et conduira à un jugement évaluatif. Pour notre travail, la définition de ce référent, intrinsèque à l'évaluation, joue un rôle central et crucial puisque c'est par rapport à lui que le contenu des évaluations est défini (ou analysé) ; nous y reviendrons dans le paragraphe IV.1 de ce chapitre.

Cardinet (1989) défend, dans son article « évaluer sans juger », un autre point de vue : celui d'une évaluation descriptive, sans jugement, sans comparaison entre groupes d'élèves, qui respecte l'élève, dans le sens où elle se doit « d'être compatible avec une relation éducative » (ce qui n'est guère le cas avec les notations chiffrées ou les appréciations les accompagnant parce qu'« elles transforment l'élève en objet »). Notons que ce point de vue est aussi partagé par Van den Heuvel-Panhuizen (2005) dans l'évaluation en mathématiques ; elle insiste sur le fait que l'évaluation doit être juste *(« fair »)* et se faire avec « respect » pour l'élève.

Cardinet (1989) précise ensuite que :

> « la nouvelle définition proposée pour l'évaluation est issue de l'analyse de système, qui fait d'un processus d'évaluation efficace, la condition de fonctionnement essentielle de tout ensemble régulé : l'évaluation est l'apport d'informations en retour sur le résultat des actions passées, qui permet au sujet d'adapter la suite de ses actions, par rapport à son but. Vue dans cette perspective, l'information concernant la réussite ou l'échec de son projet est, pour l'enfant, une évaluation essentielle, celle sur laquelle se construit sa connaissance du monde, selon Piaget. » Cardinet (1989, p. 51)

Le « jugement » ou l'échelle de valeur qui pourrait être donné à partir d'une évaluation disparait puisque le retour à l'élève consiste uniquement en un apport d'informations, et donc n'est pas porteur de jugement. C'est dans cette perspective que nous situons la conception de notre évaluation diagnostique : il ne s'agit pas de comparer la production de l'élève avec celles des autres, mais de repérer, selon les réponses données, ses praxéologies apprises par rapport à une référence.

I.1.1.ii La question de la mesure

Qu'elle prenne la forme d'une note dans les évaluations menées en classe par l'enseignant ou lors d'examens terminaux (comme le Diplôme National du Brevet ou le baccalauréat) ou la forme de scores (par élève, par pays, etc.) dans les évaluations externes nationales ou internationales, la mesure intervient dans de multiples dispositifs d'évaluations. Question vive dans les débats actuels sur l'éducation, la remise en question de la note remonte au début du XXème siècle et correspond en France aux premiers travaux en docimologie menés par Piéron en 1922 (Piéron 1963). La note ne saurait d'ailleurs être objective vu les nombreux biais qui peuvent être imputés au système lui même, aux enseignants et aux élèves (Leclercq & al. 2004). L'étude menée par Chevallard & Feldmann en didactique des mathématiques en 1986 avait alors permis d'observer la répartition des notes obtenues par différents enseignants et d'aborder la question du « langage des notes » auprès de la classe, de l'établissement et des parents et d'interroger les négociations existantes autour des notes. Glaeser (1995) soulignait aussi les « effets pervers de la notation » et les liait à un « détournement des objectifs de l'enseignement ».

Nous n'évoquons pas davantage la question des notes dans notre travail, mais nous introduisons un premier questionnement autour de la mesure, cette dernière occupant une place prépondérante dans les évaluations externes. En effet, pour toutes les évaluations menées nationalement ou internationalement, les résultats sont donnés en termes de performance, c'est à dire qu'ils sont issus d'un calcul statistique ou de l'utilisation d'un modèle probabiliste. Par ailleurs, l'idée de négociation développée par Chevallard & Feldmann (1986) autour des notes données par l'enseignant dans sa classe peut être transférée aux évaluations externes (Matheron 2012) ; ce que nous aborderons dans le paragraphe spécifique aux évaluations externes.

I.1.2 Quelle évaluation pour quels enjeux ?

Reprenons les propos de Cardinet (1990) cités par Figari & Remaud (2014) pour introduire notre propos :

> « « L'évaluation traite de problématiques très différentes selon qu'elle vise une fonction sommative, formative ou prédictive ou qu'elle traite du système, de l'école ou de l'élève. »

> (Cardinet 1990, p.139), mais aussi selon que le point de vue initial sur l'objet évalué sera externe, interne, ou négocié. » Figari & Remaud (2014, p. 28)

Dans la langue française, le terme d'évaluation (avec les différentes définitions que l'on a pu lister précédemment) est aussi bien utilisé selon que l'on s'intéresse aux élèves ou aux systèmes ; dans le monde anglo-saxon, deux termes distincts sont employés et permettent la distinction soulevée dans la citation précédente : « *assessment* » renvoie « au regard porté sur les connaissances acquises par les élèves en général et par chaque élève en particulier » (Bodin 1997)[1] alors qu'« *evaluation* » concerne les systèmes d'étude en général. Nous nous situons donc dans un travail autour de *l'assessment (*et non de l'*evaluation).*

Pour traiter des enjeux de l'évaluation, nous commençons par distinguer les évaluations externes des évaluations internes (avec quelques précisions relatives à leurs enjeux), puis nous abordons les fonctions des évaluations (diagnostique, formative et sommative).

I.1.2.i Évaluation interne, évaluation externe

Nous revenons sur ces deux termes que nous avons employés sans les définir, non seulement pour les préciser, mais aussi parce que comme le soulignent Figari & Remaud (2014), le point de vue sur l'évaluation n'est pas le même. Bonami (2005) ou Figari & Remaud (2014) différencient les évaluations internes des évaluations externes principalement selon les instances qui commanditent l'évaluation ou selon la position de l'évaluateur par rapport à la situation d'évaluation.

Pour notre travail, nous retenons qu'une évaluation interne est construite et menée dans sa classe par un enseignant : la personne qui évalue, ici l'enseignant, est interne à la classe. Il conçoit, traite et prend les décisions à la suite de l'évaluation, comme par exemple lors des contrôles et autres interrogations. Les évaluations externes sont quant à elles construites et traitées par des personnes extérieures à la classe et leurs résultats ne sont pas destinés directement à l'enseignant pour sa classe ; sont donc considérés comme évaluations externes, les évaluations internationales (par exemple PISA), les évaluations nationales (par exemple CEDRE : Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon), mais aussi les examens type DNB ou Baccalauréat. Nous qualifions aussi d'évaluations standardisées des évaluations externes qui ont un processus de passation défini de façon précise et qui doit être suivi par les personnes qui participent à l'évaluation (aussi bien les évalués que les personnes qui gèrent la passation). La standardisation des passations permet une certaine comparabilité entre les résultats de personnes qui ont composé dans des conditions similaires. Enfin, nous distinguons les évaluations de masse (concernant l'ensemble des élèves d'une classe d'âge, d'un niveau scolaire, etc.) des évaluations réalisées sur échantillon (échantillon représentatif d'une classe d'âge, d'un niveau scolaire, etc.) ; les évaluations telles que CEDRE, TIMSS[2] ou PISA étant réalisées, en France, sur échantillon. (Troseille & Rocher 2015).

Cette définition très restrictive de ce que nous qualifions d'évaluation externe, nous amène à définir un autre type d'évaluation, celle externe à usage interne. Nous regroupons sous ce terme les évaluations construites par des personnes extérieures à la classe (en ce sens elles sont externes), mais qui sont utilisées par l'enseignant, de façon interne à sa classe. Différents exemples d'évaluations de ce type peuvent alors être donnés : l'ensemble des « tests », évaluations ou autre

---

[1] Traduit en français par Programme international de suivi des acquis, l'acronyme PISA en anglais signifie Programme for International Student Assessment : l'objectif de PISA n'est pas d'évaluer les systèmes éducatifs, mais les élèves âgés de 15 ans, c'est pourquoi le terme « *assessment* » est employé.

[2] Trends in International Mathematics and Science Study.

outils destinés à l'enseignant (type Banqoutils[3], évaluations nationales en fin de CM2 ou à l'entrée en 6ème ou le diagnostic *Pépite* (Grugeon 1997)) : construits par des personnes extérieures à la classe, c'est à l'enseignant qu'il revient de les mettre en place en classe, d'éventuellement les traiter avec un certain codage, pour ensuite exploiter les résultats. Il a alors la possibilité d'exploiter ces outils comme il le souhaite, même si la passation est standardisée ou si le traitement est en partie informatisé.

Au delà d'une distinction sur les personnes qui conçoivent l'évaluation, la position même du concepteur de l'évaluation par rapport aux évalués conduit aux observations suivantes : on peut opposer à une certaine illusion de la subjectivité ou de la simplicité des évaluations externes, les risques des évaluations internes, en particulier dans le manque de comparaison avec des normes extérieures (Figari & Remaud 2014, p. 29).[4]

La complémentarité qui devrait pouvoir exister entre ces deux types d'évaluations est soulignée à de nombreuses reprises, mais pas nécessairement dans un cadre didactique, ni en mathématiques (par exemple Mercier-Brunel (2014) pour la lecture). Plus généralement, les effets des évaluations externes sur les pratiques des enseignants ont été étudiés par Mons (2009) citant par exemple la dérive du « *teaching to the test* » (p. 27) ou l'apparition de phénomènes de « rétrécissement des curricula », les enseignants centrant leur enseignement sur les compétences évaluées (et uniquement celles-ci) ; Demailly (2001), cité par Mons (2009, p. 26), pointe néanmoins un aspect positif des évaluations externes :

> « les effets formatifs de l'évaluation ne sont pas négligeables [...] Réflexion sur le «référent», identification d'indicateurs pertinents permettant de décrire le fonctionnement des dispositifs, mises à plat parfois douloureuses des pratiques ». Demailly (2001)

Si une complémentarité s'avère en effet nécessaire entre les évaluations externes bilans, celles internes menées par l'enseignant dans la classe et d'éventuelles évaluations externes à usage interne mises à disposition de l'enseignant, il faut tout de même rester « prudent » face au développement et à l'exploitation des évaluations standardisées de masse. En effet, Mons (2009) signale :

> «Une littérature, désormais très riche et développée dans des contextes nationaux multiples, a mis l'accent sur les effets pervers de l'évaluation standardisée pour les activités d'enseignement. Ces recherches montrent clairement que les tests, en particulier quand ils sont associés à de forts enjeux, peuvent conduire à la fois à une évolution défavorable des pratiques pédagogiques ainsi que, dans certaines circonstances, à un sentiment de déprofessionnalisation, qui se traduit par des phénomènes de démotivation des enseignants. » Mons (2009, p. 27).

[3] La Banquoutils est un ensemble de ressources mis à la disposition des enseignants pour « les aider à évaluer les compétences » de leurs élèves et leur permettre « d'adopter un point de vue « autre » sur les enseignements et sur les élèves ». Il s'agit principalement d'exercices d'évaluation avec un codage spécifique des réponses permettant de repérer les acquis mais aussi certaines conceptions erronées et accompagnés de pistes pédagogiques exploitables par l'enseignant pour mettre en place un enseignement différencié. http://www.banqoutils.education.gouv.fr/presentationc.php

[4] L'évaluation négociée définie par Cardinet (1990) apparaît comme un compromis entre l'évaluation externe et interne; « elle prend en compte les représentations des différentes catégories d'acteurs concernées et se trouve amenée à « confronter tous les points de vue possibles ». La « réalité » soumise à évaluation sera alors constituée par la somme des faits objectifs de la première approche (externe) et des représentations subjectives de la seconde (interne). » Figari & Remaud (2014, p. 29)

Les évaluations nationales à l'entrée en 6ème (évaluations externes standardisées de masse à usage interne[5] menées entre 1989 et 2008) en France, destinées à outiller l'enseignant pour diagnostiquer l'état des connaissances des élèves, ont eu un effet très limité comme le soulignent Bardi & Mégard (2009) :

> « Si ces outils ne font pas totalement système, le plus grave est sans doute qu'ils ne font pas réellement sens pour les enseignants et n'ont finalement aucun effet ni sur les enseignements, ni sur les pratiques d'évaluation dans les classes. » Bardi & Mégard (2009, p. 133)

Ainsi, la question plus large de l'effet des évaluations externes sur les pratiques des enseignants mériterait d'être davantage étudiée, en particulier dans le cadre de la didactique : ainsi, Ruminot-Vergara (2014) a pu montrer dans sa thèse l'effet de l'évaluation nationale chilienne SIMCE (Sistema de Medición de la Calidad de la Educación),[6] à différents niveaux de l'institution (programmes d'enseignement, organisation dans l'établissement, pratiques des enseignants). Elle conclut alors que :

> « sans qu'il soit possible de l'attribuer directement à l'influence de l'évaluation SIMCE, on observe bien une contraction de la vision du programme d'enseignement». Ruminot-Vergara (2014)

À un niveau plus local (districts académiques), en France, nous citons aussi l'existence du dispositif PACEM (Projet pour l'acquisition des compétences en mathématiques) visant à faire évoluer les pratiques des enseignants, *via* une formation, à partir des résultats des élèves à une évaluation commune externe (Chesné 2014). Même si la formation des enseignants développée dans ce projet ne s'appuie pas sur une évaluation nationale, mais sur une évaluation plus locale (de tous les élèves du district entrant en 6ème ou au CM1), elle repose néanmoins sur l'exploitation d'une évaluation diagnostique externe dans le cadre d'une formation et montre ainsi les potentialités d'un tel dispositif (à condition d'exploiter les résultats comme support de formation et non comme outil de pilotage institutionnel).

I.1.2.ii Évaluation diagnostique, formative et sommative : quelle fonction pour l'évaluation ?

Comme pour les évaluations interne et externe, nous avons utilisé jusqu'alors les termes d'évaluation diagnostique ou sommative sans les définir ; nous revenons dans ce paragraphe sur ces définitions pour préciser notre propos.

Pour Scallon (1988, cité par Grégoire 2008), deux aspects peuvent caractériser une évaluation diagnostique, selon sa position dans la séquence :
(a) avant une séquence, repérer le niveau de connaissance des élèves ;
(b) repérer les causes des difficultés persistantes quelque soit l'épisode de la séance.

Nous retrouvons l'aspect (a) dans ce qu'écrit Chevallard (1998) qualifiant ce type d'évaluation de « test d'entrée » :

> « il doit permettre à l'élève et au professeur d'apprécier la maîtrise réelle qui est celle de l'élève sur les types de problèmes situés à la frontière entre l'une et l'autre classes. » Chevallard (1998)

L'approche de l'évaluation diagnostique telle que la décrit Scallon diffère de celle développée par Grugeon (1997) pour la conception du diagnostic *Pépite* : dans ce cadre, il ne s'agit pas de déterminer

---

[5] Nous revenons par la suite sur l'usage fait de ces évaluations (paragraphe II.1.1).
[6] Système de Mesure de la Qualité de l'Éducation

un niveau de connaissance des élèves, mais plutôt de rechercher des cohérences de fonctionnement qui permettent de repérer des besoins d'apprentissage chez les élèves.

L'objectif d'une évaluation formative est de réguler l'apprentissage (Hadji 1989, p. 86, Reuter & al. 2013, p. 102) ou d' « améliorer les conditions d'apprentissage » Cardinet (1989). Ce type d'évaluation est intégrée à l'acte d'enseignement et d'apprentissage : elle permet à l'enseignant de connaitre la façon dont se construisent les apprentissages et à l'élève d'être informé sur ses réussites et ses difficultés (Alexandre 2010).

Grégoire (2008) voit alors un « flou » dans la distinction entre une évaluation diagnostique et une évaluation formative, l'aspect (b) rejoignant les fonctions potentielles d'une évaluation formative. Flou que l'on retrouve chez Chevallard (1998), qui, même s'il parle de « test d'entrée » lui attribue à la fois des fonctions relevant de l'évaluation diagnostique (« permettre la détection – et l'auto-détection – des élèves présentant un déficit net sur le thème considéré ») et des fonctions relevant de l'évaluation formative dans le sens où elles amènent l'enseignant à réguler et différencier son enseignement :

> « éclairer le professeur (et les élèves) sur l'action à engager, laquelle peut consister : 1) à ne rien faire de plus, et à aborder sans attendre l'étude de ce qui est vraiment nouveau ; 2) à proposer à certains élèves, supposés en petit nombre et pour lesquels la chose semble s'imposer, un travail personnel adapté, et ne reprendre l'étude collective du thème que quelques jours plus tard ; 3) à diriger en classe entière […] ou, de manière plus ciblée[…] un travail transitionnel spécifique sur le thème à étudier. » Chevallard (1998)

Pour lever ce « flou », Grégoire (2008) s'appuie toujours sur Scallon (1988) et précise que la distinction entre ces deux types d'évaluation peut se faire selon :

> « les types de causes des difficultés d'apprentissage. L'évaluation diagnostique s'intéresserait aux causes exogènes à la situation d'apprentissage alors que l'évaluation formative prendrait uniquement en compte les causes endogènes à cette même situation. » Grégoire (2008).

Cardinet (1989) ne distingue pas ces deux types d'évaluation, mais utilise l'expression d' « évaluation formative diagnostique[7] » pour qualifier toute évaluation qui vise à identifier les difficultés des élèves ; par ailleurs, plutôt que de parler d' « évaluation diagnostique » en lien avec l'aspect (a), il utilise l'expression « évaluation formative de départ » ; expression qui semble rejoindre l'expression « test d'entrée » employée par Chevallard (1998), aussi bien dans sa détermination que dans ses fonctions et sa place par rapport aux moments de l'étude. Par la suite, et plus récemment, une distinction a été faite entre évaluation formative et l'évaluation formatrice (Hadji, 1995, cité par Reuter & al. 2013) : la première pouvant rester à un niveau pédagogique, alors que la seconde prend en compte la compréhension de l'élève et les processus d'apprentissage.

Pour la suite de notre travail et en lien avec la position de Cardinet, nous choisissons de qualifier d'évaluation « formative diagnostique » une évaluation qui permet à la fois de détecter les besoins d'apprentissage des élèves en vue de proposer un enseignement adapté : il ne s'agit pas uniquement de repérer des besoins à l'aide d'un diagnostic, mais aussi de construire un enseignement adapté, régulé et différencié favorisant les conditions d'apprentissage (aspect formatif). L'expression « évaluation diagnostique », lorsqu'elle est employée seule, qualifie une évaluation située avant une séquence, ou avant l'étude (comme par exemple les évaluations à l'entrée en 6ème). Le fait

---

[7] Pour Cardinet (1989), et comme nous l'avons déjà évoqué, l'évaluation (en particulier formative) ne doit pas conduire à juger l'élève, mais lui apporter un retour d'information ne portant pas sur lui, mais s'adressant à lui.

d'adjoindre l'adjectif « formatif » à l'évaluation diagnostique signifie que l'enseignant utilise effectivement les résultats de l'évaluation pour réguler les apprentissages ; les évaluations nationales à l'entrée en 6$^{\text{ème}}$ ou en 2$^{\text{nde}}$ jusqu'en 2001 avaient un objectif à la fois diagnostique et formatif, mais elles ont été peu employées dans ce sens et n'ont pas rempli leur fonction d'évaluation diagnostique, les grilles d'analyse étant peu adaptées. Nous y reviendrons.

Par ailleurs, Grégoire (2008) souligne le « manque cruel de modèle théorique » pour la majorité des évaluations diagnostiques formatives en mathématiques ; après avoir présenté quelques modèles, il conclut que l'approche en termes de performance, qui est le plus souvent choisie comme base du modèle, ne permet ni de comprendre les difficultés des élèves ni, par conséquent, de mettre en place des dispositifs de différenciation adéquats.

Au delà de l'existence d'un modèle qui sous-tende la conception des évaluations diagnostiques, se pose aussi la question du traitement des réponses des élèves : un codage « réussite-échec » peut permettre de déterminer un score correspondant à une certaine performance, mais il est difficile d'exploiter davantage ce score. On retrouve ici une problématique similaire à celle de la signification d'une note attribuée à un élève. Il est donc nécessaire, pour aller plus loin dans l'analyse de la réponse produite, de prendre en compte les procédures (justes ou fausses), expertes ou non, et de déterminer si elles correspondent à d'éventuelles conceptions erronées ou si elles s'appuient sur des propriétés mathématiques correctes.

C'est le cheminement employé par Grugeon (1997) dans la construction du diagnostic *Pépite* : en définissant un modèle multidimensionnel de la compétence algébrique, il est alors possible de déterminer des classes de réponses anticipées, c'est-à-dire de passer d'une description microscopique à une description macroscopique (Grugeon 1997) et par la suite d'implémenter sur logiciel un codage des réponses conduisant à la définition de profils. Nous reprenons la définition de Grugeon-Allys & al. (2012) pour expliciter ce que nous entendons par « profil de l'élève » :

> « Nous définissons ensuite le profil de l'élève en algèbre élémentaire comme une description des principaux traits de son activité algébrique. Une analyse transversale du codage obtenu permet de construire ce profil tant sur le plan quantitatif, en termes de taux de réussite selon les tâches diagnostiques de même type, que sur le plan qualitatif en termes de technologies dominantes selon les composantes. » Grugeon-Allys & al. (2012)

La définition formulée ici par rapport à l'activité algébrique de l'élève est transférable pour différents domaines d'étude ; l'évaluation diagnostique dans ce cadre ne se limite pas à la détermination d'un score, mais vise à identifier les techniques et les technologies apprises au regard de celles attendues institutionnellement. La définition des profils des élèves permet ensuite de construire des parcours d'enseignement différencié (Pilet 2012) : c'est dans la perspective d'une évaluation diagnostique formative que ces dispositifs ont été conçus.

I.1.2.iii Évaluation sommative, évaluation bilan

Si Chevallard (1999) prend en compte l'acte d'évaluation dans l'activité globale de l'enseignant, il le situe de la façon suivante par rapport aux différents moments de l'étude :

> « Le *sixième moment* est celui de l'*évaluation*, qui s'articule au moment de l'institutionnalisation (dont il est à certains égards un sous-moment) : la supposition de rapports institutionnels transcendants aux personnes, en effet, fonde en raison le projet d'évaluer les rapports *personnels* en les référant à la *norme* que le moment de l'institutionnalisation aura ainsi hypostasiée. En pratique, il arrive un moment où l'on se doit de « faire le point » : car ce moment de réflexivité où, quels que soient le critère et le juge, en

> examine ce que *vaut* ce qui a été appris, ce moment de véridiction qui, malgré les souvenirs d'enfance, n'est nullement une invention de l'École, participe en fait de la « respiration » même de toute activité humaine. » Chevallard (1999).

Nous trouvons ici explicitement une relation entre la norme (le référent) et l'institutionnalisation que nous développons par la suite ; il semble aussi que l'auteur place ici l'évaluation à la fin de l'étude, et non pas comme un élément pouvant intervenir avant l'étude pour déterminer d'éventuels besoins dans les savoirs nécessaires à l'acquisition des savoirs visés, comme nous avons pu l'évoquer avec les évaluations diagnostiques. En réalité, les différents moments de l'étude n'étant pas listés de manière chronologique, nous pouvons considérer qu'une évaluation diagnostique formative porte principalement sur des savoirs qui auraient été institutionnalisés précédemment. Par conséquent, ce n'est pas tant la place attribuée au moment de l'évaluation dans les différents moments de l'étude qui importe, mais son lien fondamental avec le savoir institutionnalisé et avec le référent.

Dans le champ de l'évaluation, l'évaluation sommative (ou bilan) se place à la fin de l'acte d'enseignement, pour vérifier les savoirs appris et éventuellement apporter une certaine certification par la délivrance d'un diplôme. Sont généralement considérés comme des évaluations sommatives, les contrôles habituels réalisés par les enseignants en fin de séquence ; les examens terminaux (DNB, baccalauréat) sont des évaluations certificatives. Dans les évaluations externes, c'est plutôt le terme de « bilan » que celui de « sommatif » qui est employé pour l'évaluation visant à mesurer les savoirs des élèves à un moment fixé de leur scolarité. Au delà de cette distinction de vocabulaire, c'est aussi une question d'enjeu qui se pose sur ces différentes évaluations terminales : il faut distinguer les évaluations à visée didactique (par l'enseignant et pour les élèves), de celles à visée institutionnelle, contribuant par exemple au pilotage du système éducatif (comme les évaluations bilans type CEDRE), ou encore à visée de certification (comme pour le DNB par exemple).

En décrivant les différentes fonctions de l'évaluation et les mettant en perspective des évaluations internes et externes, nous observons de façon récurrente, quelle que soit l'évaluation considérée, la nécessité de définir un référent. Il devient alors nécessaire pour le chercheur de pouvoir analyser, sur un domaine donné, ces différents référents ; en effet, la comparaison des résultats à différentes évaluations ne peut se faire de façon significative uniquement si les référents sont comparables.

Pour notre travail, c'est en définissant un référent d'ordre épistémologique et didactique sur le domaine de la numération et de l'arithmétique des entiers, qu'il deviendra alors possible de décrire et comparer les référents intrinsèques des évaluations et leurs résultats. Nous reviendrons dans la conclusion de ce chapitre sur ce référent et le définirons sur le domaine étudié (chapitres 2 et 3 de la thèse) et l'exploiterons par la suite pour analyser des évaluations externes (chapitres 4 et 5) et pour concevoir une évaluation diagnostique à visée formative dans la lignée de celle développée en algèbre avec *Pépite* (chapitres 6 et 7).

I.2 Évaluer des compétences

Actuellement centrale dans les programmes et dans la définition du socle commun de connaissances, de compétences, il est difficile de ne pas aborder dans cette partie introductive la question des compétences et de leur évaluation. Nous ne visons pas une étude approfondie de la notion de compétences, mais nous cherchons plutôt à présenter différentes façons de la concevoir en sciences de l'éducation d'abord et en didactique ensuite ; nous pourrons alors nous situer par rapport à ces approches lorsque nous étudierons des évaluations dont l'objectif est d'évaluer des compétences.

I.2.1 Aperçu de la notion de compétence

D'un point de vue institutionnel, dans le socle commun de connaissances de compétences (2006), la notion de compétences est présentée de la façon suivante :

> « Chaque grande compétence du socle est conçue comme une combinaison de connaissances fondamentales pour notre temps, de capacités à les mettre en œuvre dans des situations variées, mais aussi d'attitudes indispensables tout au long de la vie, comme l'ouverture aux autres, le goût pour la recherche de la vérité, le respect de soi et d'autrui, la curiosité et la créativité. » Socle commun de connaissances et de compétences (2006[8])

La notion de compétence, dans la diversité des définitions qui lui sont données, traverse davantage le champ des sciences de l'éducation que celui de la didactique des mathématiques ou des didactiques en général ; qu'il s'agisse de compétences transversales ou spécifiques liées à une matière, les définitions de la compétence se rejoignent sur le fait qu'une compétence permet « l'accomplissement efficace d'une tâche » (Rey & al. 2010). Ce que nous retrouvons dans la définition du socle commun à travers le fait de mettre en œuvre ses connaissances dans des situations variées dans le but d'agir, mais aussi par exemple, ou dans la définition que donne Perrenoud (1997) de la compétence comme « une capacité d'agir efficacement dans un type de situations ».

Nous retrouvons ainsi chez Vergnaud (non daté) non seulement le fait qu'une compétence est liée à l'action et une certaine efficacité, mais aussi qu'elle se définit dans des classes de situations :

> « La compétence au singulier se décline d'abord au pluriel, en relation avec les différentes situations que peut rencontrer un élève ou un professionnel, dans telle discipline ou sous discipline, dans telle ou telle situation professionnelle. Voici plusieurs critères possibles de la compétence, qui vont me permettre de montrer que le concept de compétence n'est pas un concept scientifique à lui tout seul.
>
> - est plus compétent celui qui sait faire quelque chose qu'il ne savait pas faire (perspective développementale) ou que d'autres ne savent pas faire (perspective différentielle) ;
> - est plus compétent celui qui s'y prend d'une manière plus fiable, plus économique, plus générale, plus élégante, mieux compatible avec le travail des autres...;
> - est plus compétent celui qui dispose d'une plus grande variété de procédures pour traiter une classe de situations, en fonction des valeurs particulières prises par les variables de situation ;
> - est plus compétent celui qui est moins démuni devant une situation nouvelle, jamais rencontrée auparavant. » Vergnaud (non daté)

Rey & al. (2010) associent à la notion de compétence, comme Vergnaud, la capacité de l'élève à choisir parmi un ensemble de procédures dont il dispose, celle qui se révèlera la plus adaptée en termes d'efficacité ou d'économie à la résolution du problème posé ; ils définissent alors trois degrés de compétences :

> « 1. savoir exécuter une opération [...] en réponse à un signal (qui peut être, en classe, une question, une consigne, ou une situation connue et identifiable sans difficulté ni ambigüité) ; nous parlerons alors de « procédure » ou de « compétence élémentaire » [...] ;

[8] S'intitulant depuis le 2 avril 2015 « Socle commun de connaissances de compétences et de culture », le nouveau socle entrera en vigueur à partir de la rentrée 2016 ; nous nous référons donc dans notre travail au socle commun défini en 2006.

> 2. posséder toute une gamme de ces compétences élémentaires et savoir, dans une situation inédite, choisir celle qui convient [...] ; nous parlerons de compétence élémentaire avec cadrage ou de compétence de deuxième degré ;
> 3. savoir choisir et combiner correctement plusieurs compétences élémentaires pour savoir traiter une situation nouvelle et complexe. Nous parlerons alors de « compétence complexe » ou de « compétence de troisième degré.» » Rey &al. (2010, p. 26)

Ces degrés de compétences sont relatifs à l'élève et non à la compétence elle-même : ce qui peut relever d'une compétence du deuxième ordre pour un élève (parce que la situation est inédite pour lui) peut relever d'une procédure automatisée pour un autre (la situation n'étant plus inédite). Les auteurs reconnaissent dans le troisième degré, ce qu'ils qualifient de « compétence authentique » alors qu'ils associent difficilement le terme de compétence au premier degré (et préfèrent celui de procédure) puisque les situations proposées ne sont pas inédites.

I.2.2 La notion de compétence en didactique des mathématiques

Si nous nous intéressons désormais à la façon dont les didacticiens des mathématiques se sont emparés de cette notion, Winslow (2005) définit la notion de compétence mathématique spécifique[9] à travers celle de potentiel d'action d'un individu :

> « Nous appellerons compétence mathématique spécifique le potentiel d'action d'un individu lié à un élément de matière et à une classe de situations ; ici, une « classe de situations » est spécifiée de façon descriptive et non par énumération exhaustive. [...]
> Nous parlons du « pouvoir faire » de l'individu où le « faire » consiste à utiliser ses connaissances de la matière par rapport à une classe de situations susceptibles de les mobiliser. Nous pouvons constater sa présence chez un individu dans la mesure où il réussit effectivement à agir de façon convenable dans ces situations. Notons, toutefois, que la compétence spécifique ne se réduit ni à la maîtrise d'une technique associée, ni à des formes de comportement, ni à une connaissance théorique ; elle réside dans le potentiel de l'individu de faire usage, dans les situations visées, de tous les éléments de sa connaissance par rapport à l'élément de matière. » Winslow (2005)

L'auteur apparente ensuite les classes de situations aux types de tâches définis dans l'approche anthropologique (Chevallard 1999) et les compétences spécifiques comme étant « liées aux praxéologies, surtout les blocs pratico-techniques (qui sont, pourtant, dépersonnalisées) » (Ibid.), tout en précisant que les compétences, telles qu'il les définit, ne sont pas « clairement » situées par rapport à cette approche. Le caractère inédit de la situation n'est pas aussi présent chez Winslow que chez Rey & al. ; il s'agit ici d'appréhender la notion de compétence non pas à travers une seule situation, mais plutôt à travers une classe de situations.

Schneider (2006) aborde la question des compétences, d'une façon similaire, mais en posant celle du transfert de connaissances d'un problème à un autre à l'intérieur (ou non) d'une même classe de situations. C'est à partir du moment où l'élève maîtrise différentes classes de problèmes qu'il doit reconnaître à quelle classe appartient le problème posé et par conséquent mettre en œuvre une technique de résolution adaptée. Par ailleurs, doivent être pensées les formes spécifiques que prennent des compétences transversales, selon la discipline. Schneider (2004) illustre cette question au sein de l'enseignement des mathématiques à partir de trois compétences transversales, qui ne

[9] Nous ne développons pas dans le cadre de la thèse les compétences mathématiques générales définies par Winslow (2005) comme étant indépendantes d'une matière mathématique concrète et qu'il considère comme une notion dérivée des compétences mathématiques spécifiques.

dépendent plus des classes de situations : faire preuve d'esprit critique, formuler et vérifier des hypothèses et communiquer.

C'est dans cette même lignée que Grugeon (1997) situe la compétence algébrique ; même si elle ne définit pas explicitement cette dernière, c'est à partir de différents types de problèmes du domaine mathématique étudié (que nous apparentons, en nous appuyant sur Winslow (2005), aux classes de situations) qu'elle évalue les différents aspects de cette compétence.

Enfin la définition de compétence que [nous][10] avons choisie est finalement proche de celle que Perrenoud (1997) a proposée, mais complétée par la prise en compte de l'aspect inédit de la tâche à réaliser retenu par certains auteurs (par exemple Beckers 2002, Rey & al. 2010) car il [nous] semble que ce caractère est déterminant pour témoigner de la disponibilité des connaissances que les élèves mobilisent lorsqu'ils sont confrontés à une tâche mathématique. [Nous] avons alors défini une compétence mathématique comme :

> « une capacité d'agir de manière opérationnelle face à une tâche mathématique qui peut s'avérer inédite, en s'appuyant sur des connaissances que l'élève mobilise de façon autonome. » Sayac & Grapin (2015)

Nous reviendrons par la suite de notre travail sur le côté inédit des tâches, en lien avec la complexité et avec les niveaux de mises en fonctionnement des connaissances (Robert 1998) et leur reformulation dans le cadre de la théorie anthropologique par Castela (2008). Nous l'expliciterons par la suite.

Quelle que soit l'évaluation que l'on considère (diagnostique, formative, sommative), qu'elle soit interne ou externe, les évaluateurs (enseignants ou personnes extérieures à la classe) se doivent de comparer les savoirs appris avec un savoir que l'on pourrait qualifier de référence. Comment ce référent est-il défini, à un niveau et sur un domaine donnés ? Plus généralement comment ces évaluations sont-elles conçues ? Et comment s'assure-t-on qu'elles mesurent bien ce qu'elles prétendent mesurer ?

II CONCEPTION DES ÉVALUATIONS EXTERNES STANDARDISÉES- QUESTIONS DE VALIDITÉ

Nous abordons dans cette partie, les différentes évaluations externes existant en France et mises en œuvre par la DEPP (Direction de l'évaluation de la prospective et de la performance) en fin d'école, en mathématiques : il s'agit de les recenser, de présenter leurs enjeux et de montrer comment leurs résultats peuvent être exploités par les décideurs ou par les chercheurs en didactique. Nous abordons ensuite une question commune à l'ensemble de ces évaluations (et *a fortiori* à toute évaluation) qui est celle de la validité ; ce qui nous amène à présenter des critères plus spécifiques liés à des considérations psychométriques, puisque les évaluations externes que nous étudions sont soumises à un traitement statistique ou à l'application de modèles probabilistes pour déterminer, par exemple, des scores, des indices de performance.

La présentation des enjeux de ces évaluations et des types de preuve qui permettent de garantir leur validité nous amène ensuite à présenter les différentes étapes de conception de ces évaluations externes : quelles considérations didactiques sous-tendent le cadre de l'évaluation et son contenu ? En particulier, comment le référent est-il défini ? Prend-il en compte les différentes étapes de la

[10] Il s'agit ici d'un travail mené avec Sayac (Sayac & Grapin 2015).

transposition didactique, et de quelle façon ? Comment la validité de ces évaluations est-elle assurée ? Nous exploitons principalement le bilan CEDRE, et dans une moindre mesure l'évaluation TIMSS, pour illustrer nos propos et introduire progressivement nos questionnements didactiques relatifs à la conception des évaluations et à leur validité.

II.1 La DEPP et l'évaluation du système éducatif français : quelles évaluations ? Pour quels usages ?

Ce paragraphe nous conduit à faire un état des lieux des évaluations existantes en fin d'école en mathématiques, à en comprendre leurs enjeux en lien avec leur exploitation et à intégrer celles qui ont déjà été étudiées en didactique.

II.1.1 Évaluations nationales et internationales : des enjeux différents et une exploitation parfois « ambigüe »

Il ne s'agit pas ici d'entrer dans l'histoire des évaluations externes en France (nous renvoyons pour cela à Bottani & Vrignaud (2005) et Troseille & Rocher (2015)), mais de comprendre comment s'est créée une certaine ambigüité sur les outils d'évaluation, entre des évaluations sensées être « bilan » et les autres supposées être « diagnostiques », et de voir les objectifs qui leur sont assignés.

Depuis une quarantaine d'années des évaluations standardisées sont menées en France avec des objectifs qui diffèrent selon la période : des évaluations « bilans » pour mesurer les acquis des élèves entre les années 1975 et 1989, des évaluations diagnostiques de masse devant outiller les enseignants pour l'évaluation de leurs élèves dans les années 1990 - 2000, et dernièrement des évaluations bilans à visées comparatives nationales et internationales (Troseille & Rocher 2015). Si nous pouvons repérer *a priori* deux orientations distinctes données à ces évaluations, les évaluations bilans axées sur les populations servant au pilotage du système éducatif et les évaluations diagnostiques, axées sur les élèves, destinées aux enseignants pour évaluer leurs élèves, l'exploitation dans la réalité en a été tout autre : les évaluations diagnostiques ont été détournées de leur objectif premier à partir de 2008. Non seulement, il leur a été attribué à la fois une fonction diagnostique et bilan (les évaluations ne sont plus menées à l'entrée du CE2 ou de la 6ème, mais au cours de l'année de CE1 et de CM2), mais elles sont aussi utilisées à des fins de pilotage. (Troseille & Rocher 2015).

Cette confusion a non seulement créé une certaine « ambigüité », mais n'a pas favorisé l'exploitation par les enseignants des outils diagnostiques mis à leur disposition. Par ailleurs si la DEPP qui coordonne les évaluations standardisées s'attache à une standardisation des passations pour pouvoir mener des comparaisons temporelles ou longitudinales, les conditions dans lesquelles les évaluations diagnostiques étaient passées ne permettaient guère de telles comparaisons (Bardi & Mégard 2009, Troseille & Rocher 2015).

La mise en place, par le Ministère de l'éducation nationale, à partir de 2007, d'évaluations bilans (en particulier avec le cycle d'évaluation CEDRE) ayant pour seul enjeu d'évaluer les acquis des élèves est une des réponses à l'ambigüité soulevée précédemment ; les différentes évaluations externes sur échantillon qui se sont alors développées visent ainsi : à évaluer la mise en application de la LOLF (Loi organique relative aux lois de finances[11]), à mettre en perspective des résultats des élèves aux

[11] Promulguée en aout 2001, l'ambition de cette loi est de réformer la gestion de l'État tout entière, c'est-à-dire la façon dont l'argent public est utilisé par chaque ministère. Auparavant, chaque ministère recevait une certaine somme. Désormais, des moyens sont alloués en vue d'une action précise. *Source : www.education.gouv.fr*

évaluations internationales avec ceux obtenus aux évaluations nationales et enfin, à favoriser la mise en œuvre des programmes de 2008.

II.1.2 Quelles évaluations externes en mathématiques en fin d'école ?

Nous avons établi la liste des évaluations externes existant en fin d'école (Annexe 1) pour évaluer les élèves en mathématiques. Si nous constatons, actuellement, la disparition d'évaluations diagnostiques (voire celle d'outils diagnostiques, tels que ceux qui existaient dans la Banqoutils), nous retrouvons les trois visées définies précédemment, avec des rythmes de passation différents selon que sont évalués :
- les acquis au regard des programmes scolaires : bilan CEDRE tous les 6 ans (2008 et 2014 en mathématiques)
- des compétences « de base » dans le cadre de la LOLF (tous les ans)
- les connaissances en calcul pour des comparaisons temporelles (1987-2007-2014)
- les connaissances au regard des programmes scolaires de plusieurs pays (TIMSS) à partir de 2015.

Ces différentes évaluations, conçues et analysées d'un point de vue institutionnel, donnent lieu à la diffusion de notes d'information publiées par la DEPP ou de différentes publications institutionnelles (par exemple, Lescure & Pastor 2012). Le cas de l'évaluation TIMSS est légèrement différent et fait l'objet de publications plus larges puisque cette évaluation est menée à l'échelle internationale (Mullis & al. 2013). Pour la thèse, nous centrons notre travail sur le bilan CEDRE, mais nous serons amenée au cours de notre travail à évoquer aussi ponctuellement les autres évaluations.

II.1.3 Quels usages de ces évaluations externes ?

Après avoir présenté les différentes évaluations externes existantes en fin d'école en France, nous revenons sur l'exploitation de leurs résultats en lien avec leurs objectifs ; nous avons déjà évoqué l'usage des évaluations nationales (à l'entrée en 6ème ou au CM2) par les enseignants et l'ambigüité qui les accompagnait, nous abordons désormais la question de l'usage de ces évaluations par les décideurs d'abord mais aussi par les chercheurs, notamment en didactique.

Les évaluations que nous avons listées précédemment et auxquelles nous nous intéressons sont plutôt vouées à rendre compte des résultats de population d'élèves nationalement et internationalement ; elles peuvent conduire à des comparaisons :
- temporelles pour chacune d'entre elles puisqu'elles sont reconduites régulièrement ; pour permettre la comparabilité des résultats entre les différentes années, des items identiques (d'ancrage) sont proposés lors des différentes passations. La plupart des items ne sont pas rendus publics, en particulier ceux d'ancrage, pour que les évaluations puissent être reconduites et que leurs résultats puissent être comparés ;
- au niveau des systèmes éducatifs dans le cadre de TIMSS ; nous détaillerons le cadre de cette évaluation dans le paragraphe III.

Leurs conclusions ne portent pas uniquement sur l'évolution ou la comparaison des résultats des élèves : les résultats de PISA 2012 (Kaspaik & Salles 2013) ont ainsi montré que la performance des élèves français était corrélée avec le niveau socio-économique et culturel des familles et plus récemment, les résultats du bilan CEDRE école 2014 (Dalibard & Pastor 2015) ont conduit à un constat similaire.

Par ailleurs, les évaluations nationales et internationales se révèlent être complémentaires entre elles, par exemple, dans la mise en perspective de résultats obtenus à une évaluation internationale avec ceux obtenus à des évaluations nationales[12]. De façon plus générale, c'est un double rôle qui est attribué à ces évaluations externes standardisées, à la fois, outils de régulation et outils de mesure :

> « il apparait, à travers la définition de ces cadres théoriques politiques, que l'évaluation standardisée y joue un double rôle essentiel : instrument de régulation, elle permet l'articulation entre différentes politiques éducatives emblématiques des réformes d'envergure entamées dans la très grande majorité des pays de l'OCDE ; outil de mesure, elle sert à l'évaluation de ces mêmes réformes ». Mons (2009, p.10)

Si « la mise en œuvre de politiques éducatives se réfère aujourd'hui systématiquement à ces évaluations, en particulier aux évaluations internationales » (Troseille & Rocher 2015), ce sont aussi des « instruments d'information », dont les résultats sont de plus en plus relayés par les médias d'informations générales (et pas seulement les médias spécialisés), et qui peuvent faire l'objet d'une certaine « instrumentalisation politique » (Ibid se référant à Mons 2008).

D'un point de vue médiatique, si c'est principalement la hausse ou la baisse des résultats qui est soulignée et mise en avant, certains documents institutionnels exploitent de façon plus ciblée les résultats de ces évaluations, comme en témoigne les premiers chapitres des actes de la conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques en 2011, dont les titres sont assez éclairants : « Ce que nous apportent les évaluations standardisées sur les acquis des élèves à la fin de l'école primaire en mathématiques » (Chesné 2012), « Les résultats des élèves aux évaluations CEDRE 2008 et les besoins qu'ils révèlent » (Huguet 2012).

Comme nous l'avons évoqué précédemment avec les travaux de Mons (2009), mais aussi avec ceux de Pons (2010), si les résultats de ces évaluations sont exploités par les décideurs, nous constatons qu'ils sont aussi le point de départ d'interrogation sur l'enseignement et les programmes du côté des chercheurs, comme en témoigne le bulletin de veille de l'IFE n°102 (Feyfant 2015) qui s'appuie sur les résultats des évaluations nationales et internationales pour interroger l'apprentissage des nombres et des opérations à l'école.

Si l'évaluation PISA fait l'objet de nombreuses recherches et si ses résultats sont largement commentés dans les médias généralistes et spécialisés, notons que les évaluations externes menées à l'école jusqu'à présent étaient principalement nationales (mis à part TIMSS en 1995, qui est reconduite désormais à partir de 2015), et leurs résultats étaient peu diffusés, hors d'une sphère de spécialistes. Nous soulignons tout de même la volonté de la DEPP de diffuser plus largement les résultats de ces enquêtes, avec la publication d'ouvrages destinés aux enseignants et aux formateurs (Lescure & Pastor 2012), mais aussi de rendre publics certains items afin qu'ils puissent être exploités en formation. Ce n'est pas tant aux usages et aux éventuels effets de ces évaluations sur les pratiques qu'au contenu ou aux résultats de ces évaluations que les didacticiens des mathématiques se sont intéressés, mise à part récemment la thèse de Ruminot-Vergara (2014) que nous avons déjà évoquée ; les résultats globaux sont plutôt le point de départ d'une question de recherche (comme par exemple Tempier 2013, p.10 et p.73) visant à interroger les savoirs appris aux regards de ceux enseignés et/ou à enseigner.

Quel que soit l'acteur concerné, qu'il soit décideur, chercheur ou enseignant, c'est aux résultats de l'évaluation, voire à certains items libérés ou au cadre de l'évaluation, qu'il peut se référer sans pour autant pouvoir les recontextualiser dans le dispositif global de l'évaluation : à partir de quels items

[12] Éclairer les résultats à des évaluations internationales par ceux obtenus à des évaluations nationales, et réciproquement, a été fait à l'occasion des résultats du bilan CEDRE 2014 en fin de collège avec une mise en parallèle des résultats avec ceux de PISA 2012 (Dalibard & Arzoumanian 2015).

les résultats sont-ils produits ? L'item libéré est-il représentatif des autres figurant dans l'évaluation ?, etc. Plus généralement, c'est la portée des résultats de ces évaluations qui est souvent remise en cause à travers la question de ce qu'elles évaluent effectivement (Bodin 1997). C'est en s'assurant que les évaluations sont valides que les concepteurs garantissent la qualité des résultats. Nous présentons donc dans les paragraphes suivants les différentes preuves de validité qui peuvent être apportées lors de la conception d'une évaluation externe et consacrons un paragraphe spécifique aux modèles statistiques et psychométriques puisqu'ils occupent une place importante dans les dispositifs d'évaluations externes à grande échelle, et sont en lien avec la validité d'une évaluation ; en effet, comme nous le montrons par la suite, même si les modèles statistiques diffèrent entre les évaluations de masse et celles sur échantillon, ils n'en demeurent pas moins présents pour produire les résultats, mais aussi pour sélectionner les items lors de la conception de l'évaluation.

II.2 Premières considérations sur la validité d'une évaluation

Pour toute évaluation, qu'elle soit externe ou non, le concepteur veille prioritairement à ce qu'elle soit valide, c'est-à-dire qu'elle permette d'évaluer ce pour quoi elle a été conçue, et uniquement cela ; c'est à la question de validité d'une évaluation et de preuves de cette dernière que nous consacrons ce paragraphe. Si la qualité de la méthodologie statistique employée dans les études internationales est soulignée comme excellente (Bottani & Vrignaud 2005, Baudelot & Establet 2009), le contenu de ces mêmes évaluations n'est pas toujours mis en perspective avec les résultats produits, pour une raison qui semble assez simple : les exercices des évaluations externes sont rarement rendus publics et par conséquent, il est difficile de faire une analyse précise du contenu global de l'évaluation. Par contre, il est fréquent, notamment en didactique des mathématiques, qu'un exercice issu des évaluations externes soit utilisé dans le cadre d'une analyse locale de sa validité (Bodin 2006a, 2006b, Ruminot-Vergara 2014, Artigue & Winslow 2010).

Pour mieux comprendre comment les évaluations externes sont conçues et les critères de qualité qui leur sont attribués, mais aussi pour introduire certaines questions didactiques liées au contenu de l'évaluation, nous revenons d'abord dans un premier paragraphe sur les critères de qualité d'une évaluation, et en particulier nous définissons celui de la validité ; par la suite, nous explicitons les différentes preuves de validité qui peuvent être apportées, ce sur quoi elles s'appuient et en quoi elles se révèlent être complémentaires.

II.2.1 Quels sont les critères de qualité d'une évaluation ?

Comme nous l'avons souligné lors de la définition de l'évaluation (paragraphe I.1), trois critères peuvent garantir la qualité d'une évaluation : la pertinence, la validité et la fiabilité (De Ketele 1989). Que signifient ces trois termes ? En quoi diffèrent-ils les uns des autres ? Si l'appréciation de la qualité des résultats d'une évaluation se fait en psychométrie grâce à des instruments de mesure basés sur des modèles issus de la théorie des tests, ils permettent, comme tout modèle, une certaine simplification de la réalité, mais aucun d'eux n'est parfait (Laveault & Grégoire 2005, p. 97) : quelles sont alors les limites de ces modèles ? Sur quels postulats reposent-ils ? Comment le contenu du test (c'est-à-dire l'ensemble des items accompagné des modalités de passation et de codage des réponses) est-il lui-même « évalué » ?

De Ketele & Gerard (2005) listent trois conditions nécessaires pour avoir une évaluation de qualité, à savoir, la pertinence, la validité et la fidélité :

> « La pertinence est le caractère plus ou moins approprié de l'épreuve, selon qu'elle s'inscrit dans la ligne des objectifs visés [...] C'est son degré de « compatibilité » avec les autres éléments du système auquel elle appartient [...].
> La validité est le degré d'adéquation entre ce que l'on déclare faire (évaluer telle ou telle dimension) et ce que l'on fait réellement, entre ce que l'outil mesure et ce qu'il prétend mesurer [...].
> La fiabilité est le degré de confiance que l'on peut accorder aux résultats observés : seront-ils les mêmes si on recueille l'information à un autre moment, avec un autre outil, par une autre personne, etc. ? Elle nous renseigne sur le degré de relation qui existe entre la note obtenue et la note vraie [...].Il ne faut cependant pas perdre de vue que la note vraie est une abstraction, un point de convergence souhaité indépendant des évaluateurs et des circonstances. » De Ketele & Gerard (2005)

Si ces trois conditions sont nécessaires, elles se doivent d'être remplies les unes indépendamment des autres ; ainsi, ces mêmes auteurs montrent la non-pertinence des évaluations telles que TIMSS, structurées à partir d'une approche selon les contenus, lorsqu'elles sont exploitées dans des systèmes éducatifs fondés sur une approche par les compétences, ces évaluations étant néanmoins valides et fiables.

Dans notre travail, c'est d'abord à la notion de validité que nous nous intéressons. Comme l'expliquent Laveault & Grégoire (2014, p. 163), il est inutile de questionner la précision de la mesure si le test n'évalue pas ce pour quoi il a été conçu. Par conséquent, le concepteur se doit de rechercher des preuves de validité pour garantir que les inférences faites à partir des résultats sont valides. Ces mêmes auteurs définissent cinq types de preuves de validité caractérisés de façon différente (Tableau 1), selon ce sur quoi elles sont basées : le contenu, les processus de réponse, la structure interne du test, les relations avec d'autres variables et les conséquences du *testing*.

Types de preuves basées sur...	**Caractéristiques**
Le contenu	Évaluation formalisée par des experts de l'ensemble des caractéristiques des items en référence à ce que le test prétend mesurer
Les processus de réponse	Évaluation de l'adéquation entre les caractéristiques visées par le test et celles qui sont effectivement mises en œuvre par les répondants
La structure interne du test	Évaluation du degré d'adéquation entre les items et les composantes du test définies par le modèle de référence
Les relations avec d'autres variables	Évaluation du degré de liaison des scores avec d'autres mesures externes au test
Les conséquences du *testing*	Évaluation des conséquences souhaitées ou non de l'application du test et de l'utilisation des scores

Tableau 1 - Synthèse des différentes preuves de validité ; extrait de Laveault & Grégoire (2014, p. 165)

L'approche de ces deux auteurs étant axée sur la mesure, les différentes façons d'apporter des preuves sont données en partie par des caractéristiques statistiques que nous ne décrivons pas dans la thèse (Ibid, p. 171 - 197), mais aussi par des éléments qualitatifs que nous introduisons ici et sur lesquels nous revenons avec un point de vue didactique lors de la synthèse de cette partie pour introduire notre problématique.

Parmi ces cinq types de preuves de validité listés, nous ne retenons que les trois premiers et écartons les preuves de validité basées sur les relations avec d'autres variables liées à une approche psychométrique (corrélation entre les scores à l'évaluation et d'autres mesures, faites par exemple lors d'autres évaluations) et celles basées sur les conséquences de l'application des tests (*testing*) que nous n'étudions pas[13]. Nous décrivons donc d'abord les types de preuves basées sur le contenu, puis sur les processus de réponse et enfin sur la structure interne du test.

II.2.2 Preuves de validité liées au contenu du test

La question de la validité de contenu en édumétrie a été abordée par De Landsheere (1988) qui la rattachait au test lui-même par opposition aux validités liées au score ; chaque item du test devant correspondre au domaine évalué et « l'ensemble des items couvrant à la fois toutes les composantes importantes du domaine » (p. 81). De Ketele &Gérard (2005) insistent aussi sur le« caractère représentatif de l'échantillon d'items par rapport à l'univers de référence ». La question de « l'échantillonnage des tâches » pour « s'assurer que les items sont représentatifs de l'univers évalué et surtout que certains aspects de cet univers n'ont pas été négligés » est aussi abordée par Bottani & Vrignaud (2005) mais avec une perspective d'efficacité, qui n'est pas toujours prise en compte :

> « une épreuve du type évaluation bilan destinée à évaluer les compétences des élèves d'un niveau donné devra donc comprendre des items efficaces pour la plage de compétences que l'on cherche à évaluer. » Bottani &Vrignaud (2005, p. 94)

L' « efficacité » à laquelle Bottani & Vrignaud font référence ici est liée à une contrainte commune à toutes les évaluations : le nombre d'items de l'évaluation étant limité, il est donc nécessaire que ceux retenus soient « efficaces » par rapport aux enjeux de l'évaluation. Par exemple, si l'objectif de l'évaluation est la construction d'échelle de scores conduisant à la définition de groupes (comme dans PISA), il est nécessaire que les items soient discriminants et permettent de classer les élèves. Il n'en est pas de même si l'objectif de l'évaluation est de déterminer un seuil de maitrise, comme pour les compétences de base (Rocher & al. 2008).

Pour la validité de contenu, De Landsheere (1988) différencie aussi ce qui relève de contenus figurant dans les programmes (validité curriculaire) de contenus enseignés réellement (validité pédagogique). Si la question du choix des items relativement au domaine et aux programmes d'enseignement se pose, la question des modalités de codage se pose tout autant : si lors d'un item de résolution de problèmes, les réponses ne sont codées que selon la « réussite-échec », il est impossible de distinguer un élève qui n'a pas su reconnaitre l'opération en jeu d'un élève qui a fait une erreur de calcul, etc. Ce qui interroge ce que le test évalue vraiment !

Plus globalement, pour que le contenu du test soit valide, il est nécessaire que les objectifs d'évaluation assignés à chacun des items correspondent aux techniques nécessaires *a priori* à la résolution de la tâche : par exemple, si l'objectif d'un item est d'évaluer la maitrise du calcul réfléchi, il faut que le résultat au calcul puisse être obtenu à l'aide d'une technique qui relève du niveau

[13] Il s'agit dans ce critère de prendre en compte les effets souhaités et non souhaités de l'usage des évaluations, par exemple, pour les évaluations menées dans un cadre scolaire, les conséquences sur les pratiques des enseignants. Nous ne les étudions pas dans le cadre de la thèse.

d'enseignement concerné, mais aussi qu'il nécessite effectivement la mise en œuvre d'une telle technique.

Au-delà du contenu même des exercices proposés, il s'agit aussi, à travers la validité d'une évaluation, de s'assurer que les inférences construites à partir des résultats sont elles aussi valides ; les questions générales relatives à la validité ne se posent donc pas uniquement en amont de la conception des items, mais aussi en aval sur l'interprétation des résultats. Nous retrouvons ici le double questionnement de De Landsheere (1988) reformulé de la façon suivante : qu'évalue cette épreuve ? Que puis-je faire de cette évaluation ?

Sans entrer plus en profondeur dans la lecture d'ouvrages généraux sur l'évaluation, nous constatons que les ouvrages de référence tel que celui de Laveault & Grégoire (2014) dégagent des principes généraux pour garantir la validité, ou expliquent comment calculer des indices de validité, mais qu'ils ne font aucune référence à une quelconque méthodologie possible s'appuyant sur des éléments épistémologique et didactique pour étudier le contenu d'un test portant sur des apprentissages scolaires. C'est une des questions que pose notre travail et sur laquelle nous revenons dans notre problématique.

II.2.3 Preuves de validité liées aux processus de réponse

Si, dans le type de preuve liée au contenu du test, il faut s'assurer de la cohérence entre l'objectif de l'item et les techniques *a priori* en jeu pour le résoudre, il s'agit aussi de s'assurer que l'élève mobilise effectivement les processus attendus pour produire sa réponse. Pour s'en assurer, il est possible de réaliser des entretiens avec des élèves ou d'utiliser d'autres données relevées à l'occasion du test et de les mettre en perspective. Par exemple, dans le cas d'une passation sur support informatique, il est possible d'exploiter les enregistrements des temps de réponse pour contrôler si l'élève a effectué un calcul mentalement ou non ; un temps de réponse trop long pourrait alors correspondre à une technique qui n'est pas mentale. (Laveault & Grégoire 2014)

D'autres questions liées à ce type de preuves peuvent apparaître, comme par exemple: l'impact de l'informatisation des items (est-ce que la passation sur un support informatique modifie les processus de résolution et de quelle manière ?) ou le format de question (comment le format d'une question -QCM ou ouvert- influence-t-il les processus mis en jeu pour produire la réponse ?).

A la différence des preuves de validité liées au contenu, qui peuvent être considérées à un niveau local sur chaque item et global sur l'ensemble du test, celles liées aux processus de réponse sont davantage orientées vers le processus de réponse de l'élève et prises en compte plus localement.

II.2.4 Preuves de validité liées à la structure interne du test

Dans les évaluations qui nous intéressent, les scores calculés n'ont de sens que si l'hypothèse est faite que tous les items du test sont corrélés entre eux et mesurent bien la même dimension (Rocher 2015). L'hypothèse d'unidimensionnalité du test est centrale dans les évaluations externes[14], la compétence mathématique étant la dimension principale (ou éventuellement la compétence numérique si on se limite aux items portant sur les nombres). Dans le cas d'évaluations portant sur les acquis des élèves en termes de savoirs relativement aux programmes en vigueur, l'unidimensionnalité peut paraitre « relativement » simple à maitriser puisque les tâches proposées correspondent aux objectifs fixés par les programmes.

[14] En particulier, les modèles de réponse à l'item (MRI) que nous décrivons dans le paragraphe II.3.2 nécessitent la condition d'unidimensionnalité.

Dans une telle approche, la mesure est un construit qui permet de mesurer une performance et à partir de la mesure de cette performance, il est possible d'inférer un niveau de compétences. On distingue ainsi la performance (ce qui est mesuré) et la compétence (ce qui est visé dans l'évaluation) (Bottani & Vrignaud 2005, Rocher 2008).

La question de l'unidimensionnalité est beaucoup plus complexe à maîtriser lorsque ce sont des compétences qui sont évaluées (dans le sens où sont évalués à la fois des savoirs, des savoir-faire et des savoir-être) et qu'elles ne se réfèrent pas explicitement à des contenus fixés par les programmes (comme c'est le cas pour l'évaluation de la culture mathématique dans le PISA), comme le montrent De Ketele & Gerard (2005), estimant que « les techniques de validation des épreuves d'évaluation selon l'approche par compétences sont donc à inventer, avec d'autres postulats que ceux de la théorie classique des scores. »

Comme nous l'avons déjà évoqué, toutes les évaluations externes auxquelles nous nous intéressons s'appuient sur des méthodologies statistiques importantes ; nous nous limitons ici à une présentation succincte des indicateurs statistiques que nous utilisons dans la suite de notre travail et renvoyons le lecteur aux ouvrages tels que celui de Laveault & Grégoire (2014) ou à Rocher (2015) pour des éclairages plus approfondis.

II.3 Éléments de méthodologie en psychométrie

Demeuse (2004) définit la psychométrie comme l'ensemble des méthodes de mesure utilisées dans le domaine psychologique et qui ne relèvent par conséquent pas uniquement de l'éducation ; ce qui a conduit au développement de l'édumétrie, définie par De Landsheere (1988) de la façon suivante :

> « Mot créé par Carver (1974), sur le modèle de psychométrie, pour désigner l'étude quantitative des variables relatives aux apprentissages suscités par l'éducation : influence d'une action pédagogique, performance effective par rapport à une performance attendue, épreuves centrées sur les objectifs… ». De Landsheere (1988)

Cardinet (2002), précise qu'en psychométrie, on ne s'intéresse qu'aux résultats et aux comportements des élèves, alors qu'il est possible de les exploiter bien davantage (notamment dans le cadre de l'édumétrie) :

> « On peut classer les questions d'après leur taux de bonnes réponses et chercher à comprendre leur difficulté intrinsèque, en étudiant la structure de leur formulation verbale, le nombre d'étapes logiques dans la résolution du problème, le type d'illustration fournie, etc. Ou bien, comparant au contraire la difficulté de chaque question avant et après l'année d'étude, on pourra en tirer des enseignements sur l'effet du curriculum suivi et les obstacles épistémologiques qui résistent. Ou bien encore, on pourra classer les questions par niveaux d'objectifs, pour savoir si l'apprentissage a suivi un certain ordre attendu a priori, etc. Cette fois, les objets d'étude ne sont plus les comportements des élèves. Ces comportements n'interviennent plus que comme des instruments pour réaliser des études totalement étrangères à la psychométrie, qui portent notamment sur la construction des questions ou des curriculums. » Cardinet (2002)

Nous reviendrons à la fin de cette partie sur le point de vue de Cardinet sur la psychométrie, mais nous entrevoyons dès lors, à travers les exemples qu'ils donnent, la potentialité d'exploitation des mesures produites par les évaluations externes. Il est néanmoins nécessaire de montrer *a minima* la façon dont ces différentes mesures sont produites pour les exploiter de façon raisonnée : un premier paragraphe permet ainsi de présenter les différents indicateurs statistiques calculés dans le cadre de la théorie classique des scores et un second nous amène à présenter les modèles de réponse à l'item.

II.3.1 La théorie classique des tests

Quatre indicateurs issus des statistiques descriptives sont généralement employés dans les évaluations que nous étudions :
- le taux de réussite à un item : il correspond à la proportion d'élèves ayant réussi l'item ;
- l'indice de difficulté de l'item, calculé à partir de la proportion d'élèves ayant fourni une bonne réponse ; c'est une caractéristique importante d'un test puisqu'elle permet de s'assurer *a posteriori* que tous les niveaux de difficulté ont été balayés (Rocher 2015)[15] ;
- l'indice de discrimination permet d'écarter les items qui ne sont pas informatifs, dans le sens où ils ne discriminent pas les élèves selon la compétence[16] évaluée (Bottani & Vrignaud 2005, p. 94) ; il peut être calculé à partir du coefficient bisérial : R_{bis}[17]. Le nombre d'items étant nécessairement limité, ils doivent être efficaces et apporter le plus d'informations possibles selon l'enjeu de l'évaluation.
- la fidélité : elle est définie comme la corrélation entre le score obtenu et « le score vrai » et renseigne sur la consistance interne du test. Elle peut se calculer à partir de l'alpha de Cronbach[18].

Les premiers indicateurs (taux de réussite, indice de difficulté et de discrimination) sont des caractéristiques des items (à un niveau local), alors que la fidélité est une caractéristique du test dans sa globalité. L'approche classique que nous avons présentée ne permet pas de distinguer ce qui relève de la difficulté du test ou du niveau de compétence des élèves (Rocher 2015) et par conséquent ne permet pas un classement des élèves indépendant des tâches qu'ils ont passées dans le test.

II.3.2 Les modèles de réponse à l'item (MRI)

La limite évoquée précédemment est dépassée par l'utilisation des modèles de réponse à l'item (MRI) qui séparent compétence des élèves et niveau de difficulté de l'item ; ces modèles sont fréquemment utilisés dans les évaluations à grande échelle, en particulier dans CEDRE et dans TIMSS. Utilisés la première fois en 1991 dans une évaluation internationale (Bottani & Vrignaud 2005, p.16), les MRI sont des modèles basés sur une approche probabiliste et reposent sur des hypothèses fortes, en particulier celle d'unidimensionnalité (c'est à dire le fait que le test ne mesure qu'une seule dimension) ; ils permettent de modéliser «la probabilité qu'un élève donne une certaine réponse à un item, en fonction de paramètres concernant l'élève et l'item. » (Rocher 2015).

---

[15] Nous pouvons reprendre ici l'interrogation de Cardinet et questionner le fait de vouloir balayer tous les niveaux de difficulté, c'est à dire d'avoir nécessairement des items qui ne seraient pas réussis.

[16] La compétence n'est pas définie explicitement en psychométrie ; il s'agit d'observer sa manifestation à travers la réussite au test. En ce sens, la compétence telle qu'elle est utilisée ici se rapprocherait de la mobilisation de connaissances dans des classes de situations (qui ne sont pas définies sur un même domaine, mais sur l'ensemble du programme évalué).

[17] Nous renvoyons à Rocher (2015) ou Laveault & Grégoire (2014, p. 213 - 223) pour les différentes façons de le calculer.

[18] Utilisé par la DEPP comme un indicateur statistique mesurant la fidélité (Rocher 2015), le coefficient α de Cronbach détermine le degré d'inter-corrélation entre les items ; c'est une des méthodes de mesure de la fidélité la plus répandue, mais qui présente certaines limites (Laveault & Grégoire 2014, p. 115 - 122).

Ils permettent entre autres :
- de ne pas faire passer l'ensemble des items du test à tous les élèves et d'étendre, à l'aide du principe des cahiers tournants[19], l'échantillon des items proposés sans augmenter le temps de passation ;
- de comparer les niveaux de compétence de différents groupes d'élèves ;
- de mettre en place des évaluations adaptatives (Rocher 2015).

Nous ne décrivons pas davantage ces modèles ; nous signalons néanmoins qu'ils permettent de placer sur une même échelle le niveau de compétence de l'élève et la difficulté de l'item, ce qui implique que deux élèves ayant un même niveau de compétence auront une probabilité de 0.5 de réussir un item donné. La compétence du sujet est alors définie comme sa probabilité de résoudre une tâche donnée ; à la différence de la théorie classique des scores, elle est définie par rapport à des tâches et non par rapport à d'autres sujets (Bottani & Vrignaud 2005).

Les MRI permettant de réaliser des comparaisons en groupes, il est alors possible de repérer des items qui ont un fonctionnement différentiel (FDI), et par conséquent qui présentent un certain biais :

> « Un FDI apparait entre des groupes d'individus dès lors qu'à niveau égal sur la variable latente mesurée, la probabilité de réussir un item donné n'est pas la même selon le groupe considéré. Cela signifie qu'une autre variable, liée au groupe, est intervenue, au-delà de la dimension visée. Un fonctionnement différentiel se traduit souvent par une différence de réponse entre les groupes plus importante à l'item considéré qu'en moyenne sur l'ensemble des items. » Rocher (2015, p. 40)

Ainsi, on peut considérer un test comme biaisé, si pour deux sujets ayant les mêmes compétences, le résultat d'un test est différent (Rocher 2015, p 43). Ce qui explique aussi le choix des MRI pour les évaluations internationales ; ces dernières visant à comparer des populations d'élèves de différents pays, les MRI permettent de mettre en évidence d'éventuels biais. Dans le cas de comparaisons temporelles, certains items sont alors écartés de l'analyse finale parce que leur difficulté n'est pas la même pour des groupes ayant un même niveau de compétences. Par exemple, dans la comparaison des résultats des élèves en calcul entre 1987 et 2007, Rocher (2008) explique les biais de certains items de mathématiques par un changement de programmes entre ces deux dates.

II.3.3 Les limites de la psychométrie

Une des principales limites des MRI est liée à l'hypothèse d'unidimensionnalité qui conduit à présupposer que « quel que soit le niveau de compétence des sujets, ceux-ci mettent en œuvre des processus et des stratégies similaires pour répondre aux items » (Bottani & Vrignaud 2005), ce qui n'est pas toujours le cas.

Soulignons pour conclure une limite méthodologique soulevée par Cardinet dès 1973 et expliquée ici par De Ketele et Gerard (2005) sur l'utilisation des modèles psychométriques :

> « Il existe de toutes façons une limite méthodologique importante lors de la validation d'épreuves d'évaluation pédagogique, quelle que soit l'approche à laquelle elles se réfèrent. Cette difficulté est liée au fait que l'on recourt à des techniques utilisées en *psychométrie* alors

[19] Utilisé dans les évaluations internationales telles que PISA et TIMSS, le principe des cahiers tournants est par exemple décrit dans Brun & Huguet (2008) figurant en Annexe 3 ou dans Rocher (2015). Les cahiers des élèves ne sont pas tous identiques : ils sont constitués de blocs d'exercices différents, et avec un système de tuilage, il est possible de déterminer la probabilité de réponse d'un élève à un exercice qu'il n'a pas passé.

que l'on est dans le champ de *l'édumétrie [...]*qui ne dispose pas d'outils suffisamment développés, en cohérence avec la spécificité de l'éducation.

La différence est notamment liée à la distribution attendue des résultats, qui se concrétise dans une courbe de référence. Lorsqu'on utilise un test psychométrique, on s'attend à ce que la population cible soit distribuée selon une loi normale, ou courbe de Gauss, avec une minorité de notes basses et une autre minorité de notes élevées pour une majorité de notes moyennes, la « moyenne » étant elle-même confondue avec le mode et la médiane.[...]La logique de l'éducation devrait donc être très différente parce qu'elle ne vise pas à décrire une population, mais à agir sur elle. L'éducation scolaire a pour objectif que les élèves apprennent et que tous les élèves[20] apprennent. La distribution attendue au terme d'un processus d'enseignement-apprentissage ne devrait donc pas - en bonne logique - être « normale », mais devrait correspondre à ce qu'on appelle une courbe en J, c'est-à-dire où il y a une majorité d'élèves qui ont acquis les objectifs fondamentaux visés et une minorité d'élèves qui n'ont pas atteint ces objectifs ». De Ketele &Gerard (2005)

Cardinet (2002) considère encore que les épreuves telles que les évaluations nationales ne peuvent servir pour des recherches en édumétrie : « les tests psychométriques ne sont conçus en fait qu'en vue de classer les élèves pour fonder la sélection scolaire » (Cardinet 2002). Est-ce effectivement le cas ? Est-il cependant possible d'exploiter les résultats issus de la psychométrie pour étudier des questions relatives aux curricula ?

III ÉTAPES DE CONCEPTION D'UNE ÉVALUATION : ILLUSTRATION DES QUESTIONNEMENTS DIDACTIQUES À PARTIR D'ÉVALUATIONS EXTERNES EXISTANTES

La méthodologie de conception d'une évaluation externe accorde logiquement une place importante à la détermination de preuves garantissant sa validité ; en présentant les différentes étapes de la conception, nous montrons alors comment les différents types de validité[21] sont pris en compte en lien ou non avec des caractéristiques psychométriques. Pour ce faire, nous nous appuyons sur la méthodologie générale de construction d'un test décrite par Laveault & Grégoire (2014, p. 10 - 61) en cinq étapes, et nous les transposons pour décrire la conception des évaluations externes :

1. déterminer les utilisations prévues du test ;
2. définir ce que l'on souhaite mesurer ;
3. créer les items ;
4. évaluer les items ;
5. déterminer les propriétés métriques du test définitif.

Nous décrivons d'abord chacune de ces étapes et les illustrons principalement par la conception de l'évaluation CEDRE fin d'école (2008 et 2014) ; nous évoquons aussi les évaluations TIMSS pour montrer certaines spécificités et dégageons au fur et à mesure, les questions didactiques qui peuvent se poser.

[20] Souligné par les auteurs.

[21] Il s'agit plus précisément de types de preuves de validité ; nous utilisons désormais les expressions « validité de contenu », « validité liée aux scores », etc. pour qualifier les types de preuves tels que nous les avons définis précédemment.

III.1.1 Étapes 1 et 2 : Déterminer les utilisations et définir ce que l'on souhaite mesurer

Ces deux étapes correspondent aux deux questions déjà évoquées que l'on retrouve : que souhaite-t-on mesurer ? A quoi le test va-t-il servir ? (De Landsheere 1988). Ces deux questions sont prises en compte par la définition du cadre de l'évaluation : il fixe à la fois les objectifs de l'évaluation, mais aussi ce qui va être mesuré (ce qui ne sera pas sans incidence sur la méthodologie statistique employée). De façon générale, mises à part les évaluations nationales à l'entrée en 6$^{\text{ème}}$, celles que nous avons listées en Annexe 1 sont également des évaluations bilans, mais leurs objectifs diffèrent ainsi que le cadre de leur conception.

La mise en œuvre et la construction des évaluations CEDRE et « compétences de base » sont organisées par un chargé d'étude de la DEPP. Il est accompagné d'un groupe de « pilotage » composé d'IA-IPR[22], d'IG[23], de formateurs et depuis 2013 de chercheurs en didactique qui donnent les grandes orientations du cadre et d'un groupe de « concepteurs » (composé principalement d'enseignants, de formateurs, de conseillers pédagogiques) qui conçoivent les items et participent à l'analyse des résultats. Les codages se font, selon la nature des items, soit de manière automatisée, soit par des codeurs (enseignants qui appartiennent ou non au groupe de concepteurs).

III.1.1.i Cadre du bilan CEDRE

Le bilan CEDRE est un cycle d'évaluations, qui se reproduit tous les 6 ans et qui vise à dresser un bilan des acquis des élèves, c'est-à-dire à « évaluer les connaissances et les compétences d'un large échantillon d'élèves en fin d'école primaire (grade 5) et en fin de collège (grade 9), au regard des objectifs fixés par les programmes. » (Lescure & Pastor 2012, p. 9). Si ces évaluations concernent différentes disciplines selon les années, les évaluations CEDRE en mathématiques ont eu lieu, pour la première en 2008 et ont été reconduites en 2014 ; cette périodicité permet une comparaison, dans le temps, de l'évolution des acquis des élèves.

Les objectifs et les fonctions de cette évaluation sont clairement affichés, pour éviter toute ambigüité dans son utilisation, comme nous pouvions l'évoquer dans le paragraphe I.1.1 :

> « il ne s'agit pas de mettre en perspective l'apprentissage d'un groupe d'élèves dans le cadre spécifique de leur classe ou de leur établissement, ni d'établir un diagnostic précis des difficultés rencontrées par les élèves, mais de faire le bilan des acquis des élèves en fin de CM2. » Lescure & Pastor (2012, p. 9)

Pour l'évaluation menée en fin d'école, les items proposés en mathématiques doivent permettre de mesurer des connaissances relevant de six domaines (connaissances des nombres entiers naturels, fractions et décimaux, calcul, exploitation de données numériques, espace et géométrie, grandeurs et mesures) et de cinq compétences : identifier des notions, exécuter un calcul, traiter des données, produire en autonomie, contrôler - valider (Annexe 3). Ces compétences, qui constituent un élément du cadre de l'évaluation ne sont pas exploitées dans l'évaluation CEDRE collège et ne reposent pas sur une typologie habituelle des compétences (on pourrait éventuellement penser à des éléments de la taxonomie de Bloom (adaptée par Gras 1979 pour les mathématiques), mais ce n'est pas le cas) ;

[22] Les inspecteurs d'académie - inspecteurs pédagogiques régionaux (IA-IPR) sont des cadres supérieurs de l'Éducation Nationale ; une de leur mission est de veiller à la mise en œuvre de la politique éducative dans les classes et les établissements scolaires. *Source : www.education.gouv.fr*

[23] Les inspecteurs généraux (IG) de l'Éducation Nationale ont pour mission d'assurer le suivi des méthodes pédagogiques et des politiques éducatives, et d'évaluer également leurs résultats pour l'enseignement primaire et secondaire. *Source : www.education.gouv.fr*

on peut alors s'interroger sur la pertinence d'un tel choix, d'autant que ces cinq « compétences » sont aussi qualifiées de types de tâches dans Lescure & Pastor (2012, p. 59).

L'évaluation mène à la réalisation d'une échelle de performance permettant de catégoriser six groupes d'élèves, hiérarchisés selon les connaissances mathématiques qu'ils maîtrisent (Annexe 3) ; nous explicitons la construction de cette échelle dans un paragraphe prochain (III.1.4).

III.1.1.ii Cadre de l'évaluation « compétences de base »

Les objectifs de cette évaluation sont tout autres : il s'agit, dans le cadre des indicateurs de la LOLF de déterminer la proportion d'élèves maitrisant « les compétences de base » en mathématiques (et en français) en fin d'école (et en fin de collège) et d'étudier leur évolution dans le temps ; ces proportions devant être précisées selon le secteur public, le secteur de l'éducation prioritaire, le réseau « ambition réussite » et le secteur privé. (Rocher & al. 2008).

Le cadre de cette évaluation doit permettre de déterminer ce que sont des « compétences de base » et la façon dont on les évalue. La méthodologie employée par la DEPP est décrite succinctement ci-dessous et de façon plus précise en Annexe 4.

> « Un nombre important de questions a été mis au point et a fait l'objet d'une expérimentation en 2006. Les données issues de cette expérimentation ont été mises en regard avec les jugements (attentes, niveaux d'exigence) des groupes de concepteurs, selon une méthodologie spécifique. Cette confrontation a conduit à la détermination du seuil à partir duquel un élève peut être considéré comme maîtrisant les compétences de base. » Rocher & al. (2008)

Si la notion de « compétences de base » est reliée aux compétences figurant dans le socle commun de connaissances et de compétences, aucune définition spécifique n'en est donnée, et finalement aucune liste de ces compétences n'est fournie ; seule la méthodologie pour calculer le seuil de maitrise est explicitée à partir d'indicateurs statistiques. Les savoirs référents (ou de façon plus générale, la référence) est de ce fait très floue, la notion de « compétence de base » n'étant pas clairement définie[24] ; elle renvoie à des savoirs minimaux, en lien avec le socle commun, et sans lesquels il serait difficile pour un élève de poursuivre dans de bonnes conditions sa scolarité. Comment la didactique peut-elle alors définir ces savoirs minimaux ? Si l'on se réfère à notre domaine d'étude, quelles sont les connaissances qu'un élève de fin d'école devrait posséder sur les nombres entiers et sur le calcul avec ces nombres ?

III.1.1.iii Cadre de l'évaluation TIMSS

L'évaluation TIMSS est une évaluation internationale, commencée en 1995 et reconduite tous les 4 ans, pour des élèves de Grade 4 et 8 (CM1 et 4ème), dans une soixantaine de pays. La France avait participé à la première évaluation en 1995, mais n'avait pas continué jusque là. Cependant, afin de pouvoir comparer les résultats des écoliers français par rapport à ceux des autres pays, la France a participé à nouveau à cette évaluation en 2015 (pré-expérimentation en 2014).

Alors que PISA vise à évaluer la culture mathématique des élèves de 15 ans (en mathématiques) en la définissant à partir de ce qu'un élève doit connaître en mathématique pour être un citoyen, TIMSS vise plutôt à évaluer les élèves, mais aussi à donner des éléments de comparaisons entre les

[24] La notion de « compétences de base » se rapproche de celle de « compétences minimales » existant en édumétrie et est définie dans ce cadre, mais pas uniquement pour des apprentissages scolaires (De Landsheere 1988, p. 24 - 46).

différents systèmes éducatifs pour que chaque pays puisse profiter de l’expérience des autres (Mullis & al., 2013). C’est pourquoi le cadre de cette évaluation donne une place importante à des questionnaires de contexte pour les enseignants et les chefs d’établissements portant en particulier sur les ressources, ce qu’ils enseignent et sur les programmes en vigueur dans chacun des pays participants.

Ainsi, les programmes d’enseignement des différents pays sont pris en compte, à la fois pour la conception de l’évaluation, mais aussi comme éléments d’analyse des résultats (réussite des élèves et réponses aux questionnaires de contexte) ; les données de TIMSS peuvent alors influencer sur les réformes et le développement de l’enseignement des mathématiques dans les pays participants. TIMSS développe ainsi une approche systémique (Kuzniak 2006) en discernant différents types de curricula :

Curriculum intentionnel (***intented** curriculum) :* défini à partir des programmes	Curriculum mis en œuvre (***implemented** curriculum)* défini à partir des questionnaires enseignants	Curriculum atteint (***attained** curriculum)* défini à partir des résultats des élèves

Figure 1 - Les différents types de curricula pris en compte dans TIMSS

En nous situant dans une approche anthropologique, ces différents *curricula* peuvent alors être mis en perspective avec les organisations mathématiques (OM) définies en fonction des différentes étapes de la transposition didactique (Chevallard 1991) : OM à enseigner (en lien avec le curriculum intentionnel), OM enseignée (curriculum mis en œuvre) et OM apprise (pour le curriculum atteint).

Il s’agit alors, pour les différents pays, mais aussi à l’intérieur de chaque pays participant, de mettre en regard le *programme atteint par les élèves* (à partir de leurs scores à l’évaluation) aux *programmes mis en œuvre par les enseignants* (données récoltées à partir des questionnaires enseignants) et aux *programmes intentionnels* (tels qu’ils sont prévus par l’institution). Au delà de cette approche systémique qui répond aux objectifs généraux de l’évaluation, le cadre de TIMSS (Mullis & al. 2013), pour le grade 4, décrit la répartition des items selon 3 domaines mathématiques (les nombres, la géométrie et la mesure, la gestion de données) et selon 3 domaines cognitifs : savoir, appliquer, raisonner (Annexe 5). On peut rapprocher la définition de ces domaines cognitifs de la taxonomie de Gras (1979) adaptée de celle de Bloom pour les mathématiques ; nous y ferons référence davantage dans le chapitre 6 de la thèse. Notons aussi qu’à la différence des évaluations françaises décrites précédemment, les savoirs évalués sur les nombres entiers sont définis *a minima* dans le cadre de cette évaluation (Annexe 5).

III.1.1.iv Éléments de comparaison et questionnements didactiques

Si nous soulignions l’ambigüité qui avait pu exister sur l’usage des évaluations nationales (à la fois outil d’évaluation pour l’enseignant et de pilotage), il est établi que les trois évaluations précédentes auxquelles nous nous sommes intéressée dans cette partie ont un objectif commun, celui de renseigner le système et non de fournir directement des résultats aux enseignants.

La définition du cadre de l’évaluation et de ses enjeux repose sur la définition d’un référent afin de pouvoir comparer ce qui est produit par l’élève avec ce qui est attendu par l’évaluateur. Comme les trois évaluations que nous avons présentées s’appuient sur des programmes scolaires, le référent est défini à partir de ces derniers de façon plus ou moins explicite. Les évaluations CEDRE y font référence implicitement puisqu’elles visent à évaluer les connaissances des élèves au regard des programmes et TIMSS définit de façon plus précise les savoirs évalués en lien avec les programmes en vigueur dans les différents pays passant l'évaluation, et en tenant compte des différentes étapes de la transposition didactique ; par contre, le référent est plus flou en ce qui concerne l'évaluation des compétences de base. Les référents de ces évaluations sont par ailleurs amenés à évoluer puisqu'elles sont reconduites dans le temps, et donc soumises à des changements de programmes.

La définition du référent permet d'assurer la cohérence entre le contenu de l'évaluation et ses enjeux ; la validité de contenu de l'évaluation se fait donc au regard de ce référent. Si nous observons uniquement la façon dont est défini notre domaine d'étude (nombres entiers et calculs) dans les différentes évaluations (Annexe 2), nous constatons des différences. Plus largement, nous nous interrogeons alors sur la façon d'étudier d'un point de vue didactique et épistémologique ce référent ? Quels outils didactiques utiliser pour comparer les référents définis dans chacune des évaluations ? Comment prendre en compte les étapes de la transposition didactique dans l'étude de ces évaluations ?

Un second axe de questionnement apparaît sur l'articulation entre des éléments de savoirs mathématiques (qui sont pris en compte par les différents domaines) et des éléments cognitifs, comme dans TIMSS, ou relevant de compétences transversales comme dans CEDRE : comment cette articulation est-elle prise en compte ? Si les taxonomies d'objectifs cognitifs, telles qu'elles peuvent exister dans TIMSS, permettent d'analyser les tâches, elles ne permettent pas d'analyser les productions des élèves : comment croiser alors une approche didactique et une approche cognitive permettant à la fois d'analyser les tâches, mais aussi les productions des élèves ?

III.1.2 Étape 3 : la conception des items

La répartition des items par domaine (et éventuellement par compétences dans CEDRE ou par domaines cognitifs dans TIMSS) est fixée par le cadre de l'évaluation ; les concepteurs des évaluations françaises n'ont à leur disposition que les programmes (et le socle commun de connaissances et de compétences) pour élaborer les items, qu'ils estiment représentatifs du domaine évalué, à partir de leur propre expérience (d'enseignant, de formateur, etc.). Par exemple, pour l'évaluation CEDRE qui repose sur les programmes en vigueur, tous les items doivent correspondre à un savoir mathématique ou à un savoir-faire figurant dans ces derniers, mais aucun outil d'analyse spécifique n'est mis à la disposition des concepteurs. Les items retenus correspondent donc à des exercices représentatifs de pratiques singulières mais non partagées, sans véritable ancrage didactique.

Par ailleurs, une contrainte forte pèse sur la conception des items : le format de question. Pour des raisons de coût, mais aussi parce qu'il permet un codage économique et fiable, le format QCM (ou Vrai-Faux), est largement majoritaire dans ces évaluations (Tableau 2). S'il enlève toute divergence évaluative entre les correcteurs, il n'est pas sans conséquence sur les processus mis en jeu par l'élève pour répondre à la question ; ce qui conduit à la recherche de types de preuves de validité basées sur les processus de réponse.

	Proportion des items sous forme de QCM
Compétences de base	100 %
Évaluation CEDRE 2008	67 %
Évaluation TIMSS 2011 - grade 4	Plus de la moitié des questions

Tableau 2 - Proportion d'items sous forme de QCM dans différentes évaluations

Nous avons listé en Annexe 6 les différents formats de questions possibles ; dans les trois évaluations précédentes, ne figurent que des QCM à une seule réponse correcte parmi quatre (le plus souvent), des vrai-faux et des questions à réponse ouverte courte ou à réponse contrainte. Aucune question n'est sous la forme de QCM avec plusieurs choix de réponses possibles, et aucune question à réponse longue n'est proposée.

La question du format de l'item amène la question de son codage : si la question est sous forme de QCM, comment sont choisis les distracteurs [25] ? Comment sont codées les réponses aux items posés sous une forme ouverte et qui, par conséquent, demandent un codage réalisé par des enseignants ? Par exemple, dans Pisa, il est possible, pour une réponse donnée, d'attribuer des crédits partiels correspondants à des éléments corrects dans la démarche ; cette possibilité n'est pas présente dans les évaluations CEDRE où le codage ne s'effectue qu'en termes de réussite (code 1) ou erreur (code 9) (avec un code 0 pour la non réponse). Nous comprenons ici que c'est uniquement la réponse qui est évaluée et non la démarche et le raisonnement mis en jeu pour la produire ; ce qui interroge aussi la validité du test.

La recherche d'un échantillon d'items pertinent, valide et fidèle conduit à différentes questions permettant de sélectionner les items : quel échantillon d'items permet d'évaluer les savoirs visés ? Si le dispositif d'évaluation a déjà été mis en œuvre, est-il valide ? Quels critères retenir pour s'en assurer ? Avec quels types de preuves de validité ? Les items retenus ont-ils représentatifs du domaine évalué et comment s'en assure-t-on ? Quels formats de question retenir ? Comment la spécificité du format QCM est-elle prise en compte (sélection des distracteurs et impact sur les processus de réponse) ?

III.1.3 Étape 4 : l'évaluation des items

Laveault &Grégoire (2014) décrivent deux démarches complémentaires pour que les items soient évalués avant la passation définitive du test :
1- une évaluation des items par des juges : pour CEDRE, les membres du groupe de pilotage étudient les items proposés par les concepteurs et s'assurent de leur conformité aux exigences du cadre, mais sans outil explicite d'analyse de chacune des tâches ;
2- la réalisation d'une mise à l'essai des items : toutes les évaluations externes auxquelles nous nous intéressons font l'objet d'une *expérimentation* (Rocher & al. 2008 ou Mullis & al. 2013) l'année précédant la passation définitive. Ce pré-test permet de remédier à des problèmes de formulation, de passation (temps, matériel, etc.) ou de codage des réponses, mais aussi, cette expérimentation est le support de premières analyses statistiques, visant à déterminer principalement la difficulté des items et leur pouvoir de discrimination (Laveault & Grégoire 2014, p. 13).

A la suite de la passation définitive du test, sont écartés les items n'étant pas suffisamment discriminants ($R_{bis} < 0,2$) ou présentant un fonctionnement différentiel (dans le cas de comparaisons temporelles). Écarter des items d'une évaluation n'est pas sans conséquence sur le contenu et sur sa validité : comment s'assurer que l'échantillon des items retenus définitivement est toujours représentatif du domaine étudié ? Comme les items ayant un score de réussite élevé (et donc un faible indice de difficulté) sont de fait peu discriminants, quel est l'impact de leur mise à l'écart de l'évaluation finale sur la caractérisation des savoirs maitrisés par les élèves les plus faibles ?

[25] Terme utilisé pour qualifier les possibilités de réponse dans un QCM qui ne correspondent pas à la bonne réponse.

Le fait d'écarter des items « défaillants » fait ainsi écrire à Goldstein (2008) :

> « ces items peuvent être informatifs et montrer des différences intéressantes dans les réponses faites dans les différents pays. Le fait d'exclure de tels items illustre bien l'accent mis sur des comparaisons simples entre pays au lieu d'entrer dans toute la complexité des différences. » Goldstein (2008)

Les items écartés de l'évaluation, et ceux présentant des indices de difficulté très élevés ou très bas méritent en effet d'être étudiés, notamment dans le cadre de la didactique :

> « Les savoirs que produisent les didacticiens sur l'apprentissage de contenus mathématiques précis pourraient permettre de comprendre, ce qui, d'un point de vue des savoirs en jeu et de leur enseignement, explique la difficulté ou le caractère discriminant d'une question d'évaluation. » Roditi & Chesné (2012).

Nous montrerons à partir de l'étude d'items spécifiques (écartés de l'évaluation finale ou présentant des caractéristiques statistiques particulières), la façon dont certains résultats obtenus par les études psychométriques peuvent être interprétés par la didactique : plus généralement, c'est en termes de complémentarité entre la didactique et la psychométrie que nous situons notre travail sur l'analyse des évaluations et l'interprétation de leurs résultats. Nous le préciserons par la suite.

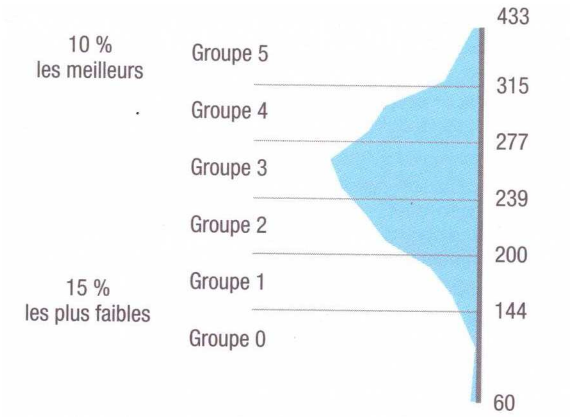
III.1.4 Étape 5 : la détermination des propriétés métriques du test définitif

Après la sélection des items retenus définitivement, les résultats sont déterminés selon les enjeux du test. Ainsi, pour l'évaluation « compétences de base », il s'agit de déterminer le pourcentage d'élèves qui maîtrisent ces dites compétences (Annexe 4). L'application du modèle de réponse à l'item dans l'évaluation CEDRE va permettre de déterminer le score des élèves et l'indice de difficulté des items ; le calcul des scores permet de hiérarchiser les élèves, puis de définir 6 groupes à partir d'un découpage réalisé de la façon suivante :

> « Les scores estimés sont alors standardisés de sorte que les élèves de 2007 [pour les sciences physiques] aient une moyenne de 250 et un écart-type de 50. Puis, la distribution des scores est « découpée » en six groupes de la manière suivante : nous déterminons le score-seuil en deçà duquel se situent 15 % des élèves (groupes 0 et 1), nous déterminons le score seuil au-delà duquel se situent 10 % des élèves (groupe 5). Entre ces deux niveaux, l'échelle a été scindée en trois parties d'amplitudes de scores égales correspondant à trois groupes intermédiaires. » Rocher (2015)

Ce qui est représenté sur le Graphique 1 (page suivante), réalisé à partir des scores de l'évaluation CEDRE 2008 [26] en mathématiques.

[26] Pour CEDRE en mathématiques, le score moyen est aussi fixé à 250 et l'écart type à 50 ; la méthodologie de construction des groupes est identique à celle décrite en sciences physiques. Les scores figurant sur l'axe de droite déterminent les scores minimaux et maximaux de chacun des groupes et apparaissent lors de la description des connaissances caractérisant les différents groupes à partir de l'échelle des scores (Annexe 7A).



Graphique 1 - Détermination des groupes pour l'évaluation CEDRE mathématiques 2008 fin d'école (Lescure & Pastor 2012)

A chacun des groupes sont associés des items permettant de caractériser les savoirs maitrisés par les élèves de ces groupes. Un item attribué à un groupe signifie que la probabilité de l'élève qui a le score le plus faible du groupe a une probabilité de 0,5 de réussir l'item ; les autres élèves du groupe ont donc une probabilité supérieure à 0,5. A partir des items caractérisant chacun des groupes, peut être décrit ce que les élèves maitrisent (exemple de l'échelle de compétences de CEDRE, fin d'école, 2008 en Annexe 7A et 2014 en Annexe 7B). Nous précisons que certains items sont classés « hors échelle », c'est-à-dire qu'ils ont une probabilité de réussite inférieure à 0,5, même par les élèves du groupe 5.

La réalisation de telles échelles doit permettre des comparaisons (temporelles ou entre pays) ; Bodin (1997) souligne vivement leurs limites et leur difficile interprétation :

> « Ces échelles auraient un quelconque intérêt si elles concernaient un *champ conceptuel* (ou une classe de questions ayant une cohérence suffisante) dans lequel on aurait préalablement repéré des hiérarchies. Malheureusement le souci principal concerne la fidélité, ce qui finit par être obtenu grâce à une certaine insignifiance. La chose s'aggrave lorsque l'échelle utilisée s'applique au domaine mathématique dans son ensemble. On objectera sans doute qu'il ne s'agit plus là de mesures mais d'indicateurs et que tout le monde en est conscient ! L'ennui est que ces indicateurs sont utilisés comme des mesures.» Bodin (1997, p. 67)

Cette remarque renvoie finalement à deux questions en lien avec la validité de contenu du test : comment sélectionner les items pour qu'il y en ait un nombre suffisant pour un « champ conceptuel donné » ? Est-il possible de déterminer *a priori* la complexité des items afin de la comparer avec la difficulté calculée statistiquement, après passation ? Quelles informations tirer alors d'éventuels décalages entre complexité et difficulté ?

III.1.5 Exploitation secondaire des données récoltées

Il ne s'agit pas d'une étape de conception des évaluations, mais d'un prolongement éventuel où les données récoltées permettent de préciser les résultats produits et d'aborder éventuellement d'autres axes d'analyse. En France, la DEPP produit des notes d'informations (par exemple : Andreu & al. 2014, Rocher 2008, Brun & Pastor 2009, Dalibard & Pastor 2015) qui présentent les résultats globaux à ces évaluations, puis complète par des dossiers plus approfondis (Monnier 2007 par exemple) où figurent, en particulier, des analyses de productions d'élèves et des résultats complémentaires.

Cette étape n'est pas nécessairement gérée par l'organisme qui pilote la mise en œuvre de l'évaluation ; bien souvent la masse de données récoltées dans ces différentes enquêtes peut être exploitée par des chercheurs pour des analyses complémentaires dans différents champs de recherche en éducation.

Différents travaux en didactique des mathématiques ont été menés sur les évaluations PISA à partir des productions d'élèves et du recodage de leurs réponses et à partir d'une analyse *a priori* de la tâche ; nous citons à titre d'exemple les travaux de Deblois & al. (2007) au Canada et ceux de Vlassis & al. (2015) au Luxembourg visant à décrire plus précisément les procédures mises en jeu pour la résolution et qui conduisent aussi à des comparaisons selon le sexe (pour les deux études) et selon les provinces d'où sont originaires les élèves.

À travers une entrée sur l'évaluation d'un point de vue général, puis sur la conception des évaluations externes et leur méthodologie, nous avons pu voir, au fil de cette présentation, se dégager des questionnements didactiques, que ce soit sur la conception même des évaluations et l'interprétation de leurs résultats, ou sur les questions qu'elles posent de façon globale, sur les élèves, les enseignants et l'enseignement des savoirs mathématiques ; ce sont ces questions que nous allons désormais préciser en guise de synthèse et d'introduction à notre problématique.

IV Synthèse - Évaluation & didactique : les questions retenues

Si Bodin (1997) ou plus récemment Roditi & Chesné (2012) et Sayac & Grapin (2013) soulignent le peu de travaux spécifiques sur l'évaluation en didactique des mathématiques, l'intérêt de la question n'est pas remis en cause, bien au contraire :

> « La présence didactique sur le terrain de l'évaluation, que nous ne sommes encore qu'à explorer, nous semble ainsi relever de la responsabilité sociale de notre discipline. » Caron & René de Cotret (2007)

En France, Chevallard & Feldmann (1986) ont été parmi les premiers à travailler autour de l'évaluation en didactique des mathématiques. Parallèlement Bodin s'est intéressé à l'évaluation externe des acquis des élèves, en coordonnant d'abord la mise en place d'évaluations externes à partir de l'observatoire EVAPM (Bodin 1985)[27] et, par la suite, en analysant le contenu des évaluations externes avec un regard didactique (Bodin 1997, 2006a, 2006b).

D'autres évaluations externes à usage interne ont été construites dans un cadre didactique, comme le test Pépite (Grugeon 1997) que nous avons évoqué dans l'introduction et que nous présentons de façon plus détaillée dans le chapitre 6.

Des travaux de recherche autour du contenu des évaluations externes ont été repris plus récemment dans une approche globale des évaluations nationales et internationales, autour de l'impact politique, curriculaire et de la place dans les pays francophones de ces évaluations

[27] Créé en 1987, l'observatoire EVAPM n'a pas pour but l'évaluation directe des élèves ; il s'intéresse essentiellement aux programmes, aux conditions de leur application, et aux effets observés et à l'évolution des acquis des élèves à l'aide de comparaisons temporelles ; ce projet à également le souci de contribuer à l'opérationnalisation du socle. http://www.apmep.fr/-Observatoire-EVAPM-

(Artigue & al. 2009)[28]. Roditi & Salles (2015) ont aussi interrogé le contenu de l'évaluation PISA avec des outils didactiques, ou encore Artigue & Winslow (2010) qui ont montré l'intérêt de l'approche anthropologique pour comparer les résultats d'évaluations internationales. Sayac & Grapin (2015) ont aussi construit un outil d'analyse d'items, exploité pour l'évaluation CEDRE 2008 (nous y reviendrons par la suite).

Nous reprenons la remarque de Bodin (1997, p. 75) pour introduire la synthèse de nos questionnements : « avant d'évaluer les élèves, la moindre des choses n'est-elle pas d'évaluer les questions qui serviront à leur évaluation ? ». Comment prendre en compte l'évaluation des questions du test dans un cadre didactique ? Plus largement, quelle analyse didactique d'une évaluation mener pour à la fois étudier sa validité et préciser ses résultats ?

Pour introduire notre problématique, nous reprenons les différentes questions que nous avons pu lister au fil de la description des étapes de conception d'une évaluation externe, la nécessaire définition d'un référent, la sélection des items en lien avec l'apport de preuves de validité, l'interprétation des résultats au test, puis nous les mettons en perspective de la construction d'une évaluation diagnostique.

IV.1 Définir un référent

Pour une évaluation, qu'elle soit interne, externe ou externe à usage interne, la définition d'un référent est incontournable pour pouvoir comparer ce qui est produit par l'évalué (l'élève) avec ce qui est attendu par l'évaluateur (l'enseignant ou un évaluateur externe). Intrinsèquement à l'évaluation, le contenu de cette dernière doit donc être en cohérence avec ce référent ; c'est une des premières preuves de validité.

La définition du référent pour une évaluation externe n'est pas sans conséquence sur les résultats produits ; Matheron (2012) transpose ainsi la fonction de négociation des évaluations internes développée par Chevallard & Feldmann (1986) aux évaluations externes :

> « Ce qui est toujours évalué est le degré de conformité des connaissances acquises par des personnes (les évalués) à ce qui est attendu par une institution donnée (celle représentée par les évaluateurs). Et cette dernière ne s'autorise pas d'elle-même. Quelle est la définition de ce rapport ? Quelles sont les instances qui l'établissent et… à l'issue de quelle négociation ? La fonction centrale de négociation portée par les évaluations est très souvent ignorée. Portant toujours sur les enjeux de savoir, la négociation propre aux évaluations externes s'établit à un autre niveau que celui impliquant le professeur et les élèves dans une classe : elle se joue entre les instances en charge de l'évaluation et… « la société » ou une partie de celle-ci, et se révèle lors de dysfonctionnements. » Matheron (2012)

Un référent défini extérieurement à l'évaluation, dans un cadre didactique et épistémologique, peut-il alors permettre de déterminer le rapport évoqué par Matheron précédemment ? Plus globalement : en quoi un référent didactique et épistémologique permet-il d'étudier les référents des différentes évaluations pour pouvoir ensuite les comparer ? Permet-il d'observer les différentes transpositions du savoir qui sont en jeu dans la conception de l'évaluation (comme le fait le cadre de TIMSS ou pour garantir certaines validités) ?

[28] Travail réalisé au colloque EMF (Espace mathématique francophone) en 2009 dans le cadre du projet spécial 2 dont le thème était : « Évaluations internationales : impacts politiques, curriculaires et place des pays francophones ».

Nous élargissons nos questions jusqu'alors posées dans le cadre des évaluations externes, aux évaluations en général (les évaluations internes et celles externes à usage interne) puisqu'elles mettent nécessairement en jeu, elles aussi, un référent. Par conséquent, la définition d'un référent didactique et épistémologique extérieur aux évaluations apparaît comme incontournable et conduit à d'autres questions : comment le définir sur un domaine de savoir donné ? Quels éléments épistémologiques prendre en compte ? Pour quelles exploitations ? Comment prendre en compte les étapes de la transposition didactique dans l'étude de ces évaluations en lien avec le référent ?

IV.2 Apporter des preuves de validité

Pouvoir s'assurer de la validité d'une évaluation est la préoccupation première de tout évaluateur. Nous avons abordé précédemment la validité de l'évaluation à travers la qualité du référent ; nous revenons désormais sur les différents types de preuves de validité que nous avons retenus et les questionnements qu'ils suscitent :

- sur le savoir mathématique, en lien avec la définition du référent et les validités curriculaire et pédagogique : en quoi les tâches sont-elles représentatives des types de tâches du domaine ? Quelle est la couverture du domaine par ces dernières? Comment les tâches proposées dans l'évaluation reflètent-elles ce qui est prescrit dans les programmes ou ce qui est enseigné ? Le codage de la réponse des évalués permet-il effectivement de refléter les connaissances des élèves ? Si l'évaluation en comporte, comment les QCM sont-ils construits ?

- sur l'activité de l'élève : comment face à la tâche proposée dans l'évaluation, l'élève produit-il une réponse ? Comment prendre en compte, non seulement la réponse produite, mais aussi le raisonnement mis en œuvre ? Quelle interprétation en donner pour évaluer l'adéquation entre ce que produit l'élève et ce qui est attendu ?

- sur des caractéristiques psychométriques : la didactique peut-elle permettre d'interpréter certaines caractéristiques psychométriques d'items, comme des FDI ou des indices de discrimination faibles ? Est-il possible de concevoir une complémentarité entre les approches didactique psychométrique pour garantir la validité d'une évaluation externe ?

IV.3 Interroger les résultats produits

Les résultats produits servent majoritairement à donner des résultats quantitatifs sur les savoirs des élèves à un niveau de la scolarité donné : comment les reprendre d'un point de vue qualitatif et les éclairer par un point de vue didactique pour revenir sur l'enseignement prescrit ? Sur celui réalisé ? Mais aussi sur les besoins éventuels des élèves pour le domaine étudié ?

Une exploitation secondaire des données de l'évaluation à partir d'un recodage des productions d'élèves peut permettre de préciser des résultats et de répondre à ces questions ; comment définir un modèle d'analyse des réponses permettant de décrire des cohérences de fonctionnement, relativement à un domaine de savoir donné ?

IV.4 Construire un outil diagnostique

Si le premier axe de notre travail porte sur l'analyse d'évaluations externes, le second vise à concevoir une évaluation diagnostique, externe à usage interne, pour le domaine de la numération et de l'arithmétique des entiers. En quoi le cadre théorique construit et les outils développés pour l'analyse de la validité des évaluations externes permettent-il de concevoir une évaluation diagnostique à visée formative ? Comment les résultats aux évaluations externes peuvent-ils intervenir pour orienter la sélection des items et la conception d'une telle évaluation diagnostique ?

Si les questions liées à la psychométrie ne se posent pas lors de la conception de cette évaluation diagnostique d'autres apparaissent, liées principalement à la prise en compte d'une approche cognitive pour pouvoir définir les profils des élèves ; comment alors concevoir un cadre théorique qui permette à la fois l'analyse des tâches d'évaluation et celle des productions des élèves ? En particulier, comment intégrer une approche cognitive pour repérer des cohérences de fonctionnement et *in fine* définir des profils ?

En conclusion, les questions posées à l'issue de cette présentation des évaluations externes situent la définition d'un référent épistémologique et didactique pour le domaine des nombres entiers et de l'arithmétique comme un préalable à l'analyse de la validité d'une évaluation et à la conception d'une évaluation diagnostique. Nous explicitons dans la partie suivante les éléments théoriques sur lesquels nous nous appuyons pour mener notre travail et justifions leur choix pour formuler notre problématique.

V PROBLÉMATIQUE

Le début de ce chapitre a permis de présenter les enjeux des différentes évaluations, en particulier celles externes menées en France et nous avons pu constater que la recherche de preuves de validité est une préoccupation commune lors de leur conception. Pour pouvoir analyser la validité du contenu de l'évaluation et interpréter les résultats finaux, il est nécessaire, pour le chercheur, de définir un référent didactique et épistémologique pour un domaine donné.

Ce référent doit alors permettre de décrire les savoirs à acquérir à un niveau scolaire donné en prenant en compte les différentes étapes de la transposition didactique, que ce soit pour l'analyse des évaluations externes bilan ou pour la conception d'une évaluation externe à visée diagnostique. Que nous nous situions à une échelle nationale (ou sur un échantillon représentatif) avec les évaluations externes ou à l'échelle d'un groupe classe, c'est en mettant en perspective les acquis des élèves avec les programmes à enseigner et avec ceux enseignés qu'il est dès lors possible de repérer d'éventuels décalages et d'interpréter les résultats obtenus.

Le traitement des réponses des élèves diffère ainsi complètement entre chacun des deux types d'évaluation (diagnostique et bilan) en raison de l'objectif qui leur est assigné : pour les évaluations externes considérées, l'objectif n'est pas de faire un bilan des connaissances par élève (leur méthodologie ne le permettant guère), mais plutôt de dresser un bilan global sur une cohorte d'élèves, en reconsidérant éventuellement les productions. Pour une évaluation diagnostique, la démarche est tout autre, puisqu'il s'agit justement de prendre en compte les réponses de l'élève, de rechercher des cohérences de fonctionnement et de concevoir des profils d'élèves pour repérer des technologies dominantes. L'exploitation des résultats est ensuite différente selon le type d'évaluation : en ce qui concerne les évaluations externes, les résultats sont plutôt descriptifs et destinés aux décideurs, alors qu'en ce qui concerne une évaluation diagnostique, il s'agit de repérer les besoins des élèves pour ensuite réguler l'enseignement. Ces deux types d'évaluation devraient néanmoins avoir la même finalité : l'ajustement de l'enseignement au service des apprentissages des élèves.

Ainsi, pour notre domaine d'étude, nous nous plaçons dans une approche prenant à la fois en compte le côté enseignement et le côté élève, telle qu'elle a été développée par Grugeon (1995) dans sa thèse pour le domaine algébrique. Le choix des cadres théoriques sur lequel repose notre travail est donc dépendant de ce double point de vue et rejoint celui fait par Grugeon (ibid), mais en considérant de façon plus ciblée la question de l'évaluation. Nous proposons de construire un cadre théorique et méthodologique permettant d'une part d'analyser des évaluations externes en prenant en compte les contraintes et objectifs institutionnels et d'autre part, de concevoir une évaluation externe à portée diagnostique permettant de repérer les besoins d'apprentissage des élèves.

V.1 Choix théoriques

Comme le souligne Artigue (2009), pour comprendre les choix que nous faisons et les éléments des cadres théoriques que nous retenons et que nous articulons, il est nécessaire de préciser les besoins auxquels ils permettent de répondre et leurs limites respectives. Nous commençons ainsi par montrer pourquoi il nous est nécessaire d'articuler deux approches, anthropologique et cognitive, puis ensuite nous précisons les différents outils théoriques que nous empruntons aux différents cadres de la didactique.

V.1.1 L'approche anthropologique

Nous avons montré la nécessité, pour interpréter les résultats des élèves (ou leurs réponses, si nous nous situons dans une perspective plus locale), de prendre en compte les phénomènes de transposition didactique qui apparaissent dans l'enseignement ; ils peuvent alors être décrits dans le cadre de l'approche anthropologique (Chevallard 1999), dans laquelle :

> « toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T, au moyen d'une technique τ, justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser voire de la produire, et qui est à son tour justifiée par une théorie Θ. En bref, toute activité humaine met en œuvre une organisation qu'on peut noter [T, τ, θ, Θ] et qu'on nomme praxéologie ou organisation mathématique. » Chevallard (1999).

Ainsi, en termes d'évaluation, il s'agit, relativement à un savoir mathématique donné, de pouvoir déterminer les praxéologies apprises, relativement aux praxéologies à enseigner et celles enseignées ; quelle que soit l'évaluation considérée, sa validité repose sur le fait de pouvoir caractériser au mieux les praxéologies apprises. Dans le cas de l'évaluation CEDRE, les praxéologies apprises sont à considérer relativement à celles à enseigner puisque l'objectif de l'évaluation est de déterminer les acquis des élèves au regard des programmes ; l'évaluation diagnostique se situant dans le cadre d'un enseignement en classe, il est tout autant nécessaire pour la construire et pour qu'elle réponde à ses objectifs de diagnostic, de caractériser les praxéologies apprises en fonction de celles à enseigner. Nous n'étudions pas dans la thèse, de façon directe, les praxéologies enseignées ; néanmoins, et c'est aussi l'intérêt du choix de l'approche anthropologique, en déterminant les praxéologies apprises au regard de celles à enseigner, apparaissent alors certains décalages qui conduisent à formuler des hypothèses relatives aux praxéologies enseignées et éventuellement à repérer des savoirs « transparents » (Margolinas & Laparra, 2011) qui sont définis de la façon suivante :

> « - ces savoirs vivent dans des institutions de production, qui peuvent être plus ou moins éloignées de l'École ;
>
> - les connaissances en situation correspondant à ces savoirs sont identifiables, pour un observateur proche des institutions de production, dans des situations d'enseignement très courantes, dans lesquelles elles mettent fréquemment des élèves en difficulté ;
>
> - les observations du système d'enseignement (enseignement effectif en classe, discours du professeur sur son activité, programmes d'enseignement, etc.) révèlent une absence ou une très faible prise en compte de ces connaissances comme objets possibles d'enseignement ou d'intervention éducative. » Margolinas (2012)

Repérer de tels savoirs sur un domaine donné permet, non seulement d'expliquer certains résultats et certaines réponses d'élèves, mais aussi de penser un enseignement adapté permettant de rendre visibles ces savoirs.

Nous observons que la TAD se révèle particulièrement adaptée pour l'analyse de l'évaluation CEDRE puisqu'elle permet de décrire les praxéologies apprises en perspective de celles à enseigner. En termes de validité de contenu, les questions relatives au choix des items, en particulier, la représentativité du domaine par les items choisis et la cohérence de l'item par rapport à l'objectif d'évaluation qui lui est assigné, se formulent donc à partir des praxéologies de la façon suivante : est-ce que les tâches présentes dans l'évaluation représentent les types de tâches du domaine ? Les techniques et technologies nécessaires attendues par l'évaluateur pour résoudre la tâche sont-elles effectivement celles mobilisées par l'élève ?

Si nous nous limitions à une étude du contenu de l'évaluation pour en garantir une bonne validité, une telle approche pourrait suffire : en décrivant les différentes organisations mathématiques du domaine, nous pourrions alors étudier les tâches proposées dans l'évaluation et mettre en perspective les techniques et les technologies apprises au regard de celles à enseigner et questionner éventuellement celles enseignées en repérant d'éventuels savoirs transparents. Des décalages peuvent ainsi être rendus visibles à partir de techniques ou d'éléments technologiques appris qui sont révélés par les productions d'élèves ; par exemple, des techniques et des technologies de division relevant du cycle 2, telles que le groupement ou le partage, qui seraient toujours présentes (et donc n'auraient pas évolué) en fin d'école.

A travers l'étude des phénomènes de transposition, il est aussi possible de montrer comment les différentes praxéologies s'emboîtent et s'agrègent : des difficultés liées à des techniques mal maitrisées ou utilisées en dehors de leur domaine de validité pouvant être expliquées au regard de technologies sur lesquelles elles reposent. Mais, comme l'explique Artigue (2009) au sujet des phénomènes de transition étudiés par Grugeon (1997) :

> « La TAD est porteuse de la problématique au niveau macro-didactique et, en ce sens, elle oriente profondément la recherche. Les difficultés de la transition y sont en effet approchées en termes de rapports institutionnels, non en termes de difficultés cognitives des élèves, et ce sont ces discontinuités que l'on cherche à identifier en priorité.» Artigue (2009).

Il s'agit alors pour nous de prendre en compte à la fois les phénomènes de transposition pour comprendre et expliquer les acquis des élèves sous un filtre institutionnel, mais aussi les difficultés cognitives des élèves. Il nous semble important, quelque soit l'évaluation que l'on considère (interne, externe, bilan, diagnostique...) de ne pas se limiter à une explication des résultats des élèves reposant sur de seules difficultés d'ordre cognitif, mais de les situer aussi dans une perspective anthropologique. Nous partageons et reprenons alors les propos de Grugeon (à paraitre), formulés pour l'étude des phénomènes de transition en algèbre et liés aux difficultés relatives à ce savoir :

> « Les explications bien souvent entendues pour justifier cet échec sont d'ordre cognitif : les difficultés des élèves résultent de leur niveau mathématique. Une approche cognitive sert ce type de raisonnement et les conclusions associées. L'adoption d'une approche anthropologique permet de dépasser cette vision négative, de regarder le cognitif à travers le filtre institutionnel et de projeter la problématique étudiée dans l'ensemble des phénomènes de transition ». Grugeon (à paraître)

Si les phénomènes de transition évoqués par Grugeon concernaient des élèves de BEP, ils restent d'actualité pour tous les niveaux scolaires ; dans notre recherche, la transition se situant plutôt à l'articulation école-collège, nous l'étudions plus spécifiquement sur le domaine de la numération et de l'arithmétique des entiers.

Nous comprenons alors comment un « métissage » (Assude, citée par Artigue 2009) entre une approche anthropologique et une approche cognitive nous permet d'interpréter les résultats des évaluations qu'elles soient externes bilan ou externe à usage interne, diagnostique. Nous montrons que la nécessité et l'intérêt de ce métissage ne se limitent pas à cela.

V.1.2 La prise en compte du cognitif

L'évaluation permet de décrire les praxéologies apprises à une étape de l'apprentissage, mais ces dernières sont destinées à évoluer ; leur évolution peut correspondre à des attendus institutionnels (certaines techniques et technologies évoluent du cycle 2 au cycle 3, comme pour la division par exemple), mais elle peut aussi être liée au développement conceptuel de l'élève qui se réalise aussi à l'extérieur de l'institution scolaire. Ce sont donc des éléments d'ordre anthropologique, mais aussi conceptuels qui permettent de repérer l'évolution des praxéologies apprises et de les caractériser. Il est nécessaire de prendre en compte ces deux approches pour concevoir et analyser des évaluations externes bilan ou diagnostiques à visée formative.

En effet, l'objectif premier d'une évaluation bilan est de faire un état des praxéologies apprises à une étape de l'apprentissage ; il ne s'agit pas, au contraire du diagnostic, de déterminer comment faire évoluer les praxéologies apprises en repérant les besoins des élèves en fonction des réponses qu'ils produisent. La conception du diagnostic implique de décrire des profils des élèves qui peuvent se réaliser à partir d'un codage de leurs réponses ; pour que le traitement des réponses soit possible, il est alors nécessaire d'anticiper des classes de réponses. Dans cette perspective, ce n'est plus « l'élève dans la classe » que nous considérons mais l'élève en tant que sujet individuel (Chaachoua 2010, p.11).

L'intérêt de considérer conjointement une approche anthropologique avec une approche cognitive est souligné par Maury & Caillot (2003) :

> « Toutes importantes qu'elles soient, les études portant sur les conceptions, ne prennent pas réellement en compte, de manière directe en tous cas, les effets du contexte institutionnel dans lequel se déroulent les apprentissages. Elles apportent certes un éclairage très intéressant sur la relation élève/savoir, mais cet éclairage est insuffisant pour rendre compte de ce qui se noue réellement entre l'élève et le savoir dans la relation didactique. » Maury & Caillot (2003, p. 20)

Nous comprenons alors l'intérêt de définir un rapport institutionnel au savoir dans le cadre de la théorie anthropologique (Chevallard 1999) et le rapport personnel des élèves à ces objets de savoir ; ce dernier permettant d'identifier la multiplicité des rapports que les élèves, au sein d'une même institution, peuvent avoir développés.

V.1.2.i La théorie des champs conceptuels

Nous exploitons la théorie des champs conceptuels (Vergnaud 1990) pour déterminer les problèmes nécessaires au développement des concepts étudiés. Un concept étant défini comme :

> « un triplet de trois ensembles (S, I, L), l'ensemble S des situations qui donnent du sens au concept, l'ensemble I des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié) ; l'ensemble L des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant). » Vergnaud (1990, p. 61)

La prise en compte d'une approche épistémologique en lien avec les champs conceptuels permet ainsi de déterminer si les tâches proposées dans une évaluation sont représentatives du domaine, mais aussi d'analyser les réponses des élèves en tenant compte de leur développement conceptuel. Utiliser la théorie des champs conceptuels permet ainsi d'éclairer le rapport personnel des élèves au savoir, relativement à leur développement conceptuel alors que la TAD définit les rapports de l'élève, en tant que sujet d'une institution, au savoir mathématique[29].

Comme nous l'avons vu précédemment dans la définition qu'il donne d'un concept et dans l'articulation entre didactique et cognitif, Vergnaud accorde aussi une place importante aux formes qui représentent le concept ; c'est pourquoi nous complétons notre étude par une approche sémiotique.

V.1.2.ii Une approche sémiotique complémentaire

Repartons du constat de Nikolantonakis & Vivier (2009) :

> « en TAD, un type de tâches n'est pas toujours énoncé en faisant référence au(x) registre(s) de représentation utilisé(s). Or, une tâche que doit traiter un élève est toujours exprimée à l'aide de registres sémiotiques.» Nikolantonakis & Vivier (2009).

Ainsi, en prenant en compte les différents types de représentation sémiotique, il est alors possible de décrire plus finement les tâches et par conséquent, de pouvoir analyser de façon plus précise les techniques et technologies mises en jeu dans la résolution.

Par exemple, si on considère « la somme de deux-mille et de cinquante-sept » dans le registre de la numération parlée, on peut donner le résultat en accolant les noms des nombres « deux-mille-cinquante-sept » ; même si cette technique est limitée à des types de nombres particuliers, elle est spécifique à la numération parlée. En effet, dans le registre des écritures chiffrées, le calcul de la somme (2000 + 57) s'effectuerait en utilisant les propriétés de la numération écrite chiffrée, ou éventuellement à partir de l'algorithme de l'addition posée (effectif ou mentalement), mais pas en accolant les deux écritures 2000 et 57, pour former le nombre 200057 ; on comprend alors que le registre de représentation dans lequel la tâche est énoncée peut faire varier la technique de résolution.

Au-delà de cet exemple, c'est plus globalement un point de vue cognitif prenant en compte l'articulation entre les registres de représentation sémiotique que nous souhaitons intégrer à notre travail ; il s'agit donc, dans une évaluation, de pouvoir identifier les types de transformations que l'élève est capable de mener et les types de registres de représentation dans lesquelles elles se réalisent pour déceler d'éventuels besoins. Duval (2006) distingue deux types de transformations qui nous semblent intéressantes à considérer dans notre travail (les traitements, s'effectuant à l'intérieur même d'un même registre et les conversions, correspondant à des changements de registres) et il précise l'importance de les prendre en compte pour l'analyse *a priori* des tâches et l'analyse des réponses des élèves :

> « Il faut commencer par **SÉPARER COMPLÈTEMENT**[30] ces deux types de transformation que sont les conversions et les traitements. Cela aussi bien pour faire une analyse *a priori* des tâches, y compris de celles impliquées par la résolution d'un problème, que pour faire une analyse des

[29] Dans sa thèse, Croset (2009, p. 177) définit la notion de praxéologie en acte que Chaachoua (2010) reprendra sous le terme de praxéologie personnelle comme modélisation des pratiques d'un élève, en tant que sujet d'une institution.

[30] Mis en valeur par l'auteur.

> productions d'élèves. Car, répétons le, d'un point de vue cognitif ces deux types de transformations de représentation sémiotique dépendent de processus qui n'ont rien de commun. Ce sont deux sources indépendantes de difficultés dans l'apprentissage. Et la toute première source de difficulté est d'abord dans les changements de registre de représentation. » Duval (2006, p. 83).

Distinguer les différents types de registres de représentation sémiotique, que ce soit dans les tâches d'écriture des nombres et de calcul que lors de la résolution de problèmes, nous permettra aussi d'étudier la complexité de certaines tâches de conversion, notamment lorsqu'il n'y a pas congruence entre les deux registres de représentation. Nous veillerons aussi à prendre en compte le sens de la conversion :

> « La conversion est orientée et non réversible. Ce qui veut dire que la conversion directe et la conversion inverse sont souvent de nature différente et soulèvent des difficultés et des obstacles qui n'ont rien de commun. » (Ibid, p. 79)

Si pour Duval (1996), « il ne suffit pas qu'il y ait développement de chaque registre. Il faut également que les différents registres dont le sujet dispose [..] se coordonnent », cela signifie que pour évaluer la compréhension de différentes notions mathématiques, il faut proposer des tâches de traitement et de conversion mettant en jeu différents registres et différents types de conversion.

Comme Artigue (2009) l'avait souligné pour Grugeon (1997), et puisque nous nous situons dans la lignée de ses travaux, nous dépassons les usages habituels de la TAD, ce qui pourra expliquer que « le découpage de la réalité » que nous ferons sera peut-être plus fin que celui fait usuellement (nous l'observerons lors de la définition des différentes praxéologies). D'une part, la spécificité de ce travail mené à l'école primaire exige une finesse plus grande pour comprendre ce qui se joue dans chacune des tâches et ce qui peut expliquer les résultats des élèves ; d'autre part, le couplage avec la théorie des champs conceptuels et l'approche sémiotique de Duval qui nous semblent complémentaires et nécessaires pour notre travail, imposent de prendre en compte la résolution de problèmes (au sens de Vergnaud (1990)) et les différents types de représentation mobilisés dans la résolution d'une tâche.

V.1.2.iii Les approches psycho-didactiques en évaluation

Nous n'avons pas encore abordé, ou très peu, la façon dont nous allons pouvoir apporter des preuves de validité liées aux processus de réponse apportés par l'élève. Il s'agit ici de nous intéresser à l'activité de l'élève en situation de résolution de la tâche et d'étudier si les connaissances (ou plus généralement les stratégies) qu'il mobilise sont bien celles pensées par l'évaluateur à travers la tâche qu'il a prescrit. Si le cadre de la théorie de l'activité se prête bien pour étudier le décalage entre une tâche prescrite et l'activité de l'élève (Rogalski 2003), Vantourout & Goasdoué (2014) ont développé plus largement la notion de validité psycho-didactique d'une évaluation.

Développée, dans le cadre des approches psycho-didactiques en évaluation, cette validité correspond à celle que nous considérons ici (liée aux processus de réponse), puisqu'ils la définissent ainsi :

> « cela signifie que l'évalué va effectivement mobiliser la (ou les) connaissance(s) attendue(s). La notion de validité, dans cette approche, tient donc compte du processus de réponse de l'évalué, avec le souci de comprendre avant tout son fonctionnement cognitif afin d'obtenir un diagnostic de qualité. C'est ce type de validité que nous nommons « validité psycho-didactique » (VPD). » Vantourout & Goasdoué (2014)

L'étude de cette validité repose sur deux axes : une analyse *a priori* de la tâche dans un cadre didactique (notons que le cadre sous jacent à la validité psycho-didactique (VPD) est celui des champs conceptuels), puis une prise en compte des caractéristiques de la tâche telles que le contexte de la situation (en résolution de problèmes), le format de la question, l'environnement (papier crayon ou support informatique...). Pour l'étude de cette validité, il est alors possible de se baser sur des travaux existants décrivant l'influence de ces dimensions, mais aussi d'étudier l'activité effective des élèves.

Nous décrirons plus précisément les dimensions que nous prendrons en compte dans notre travail pour l'analyse de cette validité ; nous concluons néanmoins sur le caractère principal que revêt l'analyse *a priori* à la fois pour l'étude de la VPD, mais aussi pour l'étude du contenu comme nous l'avons déjà évoqué précédemment.

V.2 Éléments théoriques empruntés à la TAD

V.2.1 La structure du domaine d'étude

Afin de modéliser les différents savoirs relevant de notre domaine (nombres entiers : numération, arithmétique et résolution de problèmes arithmétiques), nous reprenons le découpage proposé par Chevallard (2001) en organisations ponctuelle, locale, régionale et globale :

> « L'organisation mathématique que le professeur vise à mettre en place dans la classe n'a plus alors la structure atomique qu'exhibe la formule $[T/\tau/\theta/\Theta]$: c'est un amalgame de telles organisations ponctuelles, que l'on notera $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{i\in I}$ et qu'on appelle organisation (mathématique) locale. Et c'est d'une telle organisation locale que l'élève devra alors extraire, en les reconstruisant avec ses camarades d'étude sous la direction du professeur (ou, faute de mieux, pour son propre compte), les organisations ponctuelles sur lesquelles sa maîtrise sera préférentiellement évaluée. Le professeur, quant à lui, doit gérer un phénomène analogue, mais à un niveau supérieur : l'organisation locale $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{i\in I}$ correspondant au thème d'études doit être extraite d'une organisation plus vaste, qu'on dira régionale, et qu'on peut regarder formellement comme le fruit de l'amalgamation d'organisations locales admettant la même théorie Θ, $[T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\Theta]_{i\in I_j,\ j\in J}$. Ce niveau, celui du secteur d'études, n'est au reste nullement terminal. On constate en effet, en général, l'existence de niveaux supérieurs de détermination (d'une organisation) mathématique : l'amalgamation de plusieurs organisations régionales $[T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\Theta_k]_{i\in I_j,\ j\in J_k}$ conduit ainsi à une organisation globale, identifiable à un domaine d'études ; et l'ensemble de ces domaines est amalgamé en une commune discipline – pour nous, « les mathématiques » ». Chevallard (2001)

Si l'évaluation porte principalement sur les organisations ponctuelles, c'est néanmoins en étudiant un amalgame d'organisations ponctuelles (organisation locale puis régionale), que l'on peut analyser le contenu d'évaluations. C'est d'ailleurs le cadre théorique choisi par Artigue & Winslow (2010) et Artigue & al. (2009) pour développer un outil d'analyse permettant de mener des recherches comparatives à partir des évaluations internationales, en définissant différents niveaux de co-détermination ; travail exploité par la suite par Ruminot-Vergara (2014). Pour notre travail, il permet à la fois de juger de la validité du contenu d'une évaluation, mais aussi de rechercher des cohérences de fonctionnement sur les techniques et technologies mises en jeu par un même élève, relativement à un même type de tâches, ou au domaine mathématique.

V.2.2 Le modèle de Bosch et Gascon comme point de départ

Dans le cas de l'évaluation, il s'agit principalement de nous situer au niveau des savoirs appris des élèves, c'est-à-dire, si on reprend le schéma de la transposition didactique, à la dernière étape de la transposition didactique. Or :

> « la TAD postule qu'il n'est pas possible d'expliquer les caractéristiques du savoir appris (ni les phénomènes qui émergent dans I4), sans prendre en considération toutes les étapes de la transposition ». (Bosch & Gascon 2005)

Par conséquent, c'est en prenant en compte les praxéologies à enseigner et enseignées qu'il sera possible d'interpréter les résultats des élèves dans les évaluations externes, et plus localement les réponses produites dans les évaluations diagnostiques.

Nous avons évoqué, à différentes reprises, la nécessité de pouvoir définir, sur le domaine étudié et de façon extrinsèque aux évaluations considérées, un référent nous permettant de caractériser les savoirs à acquérir à un niveau scolaire donné et de mettre en perspective les savoirs appris. L'OM de référence, telle qu'elle est définie par Bosch et Gascon (2005), fournit un point de vue épistémologique permettant d'étudier l'influence de l'organisation didactique sur l'OM à enseigner (Figure 2) :

> « L'OM de référence est celle que le chercheur considère pour son analyse. Elle ne coïncide pas nécessairement avec les OM savantes d'où elle provient, parce qu'elle les inclut dans son analyse), mais elle les formule en des termes très proches).» (Ibid)

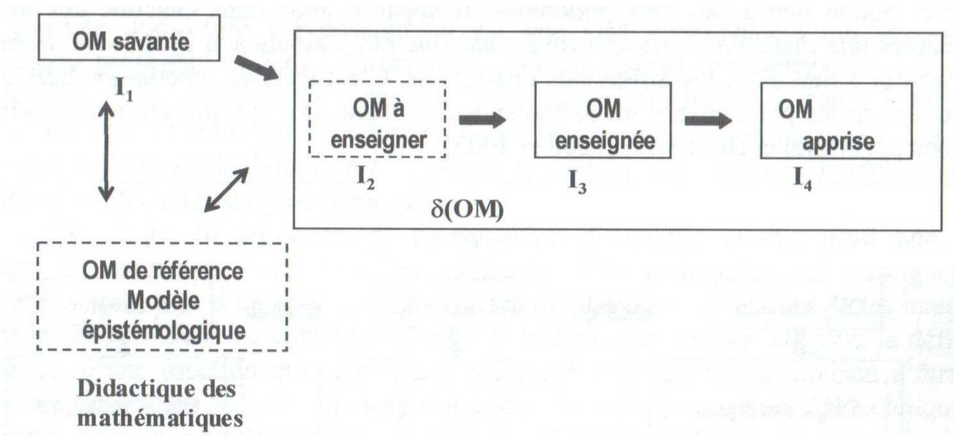


Figure 2 - Unité d'analyse des processus didactiques - Extrait de Bosch et Gascon (2005)

Nous faisons l'hypothèse que la prise en compte de la praxéologie de référence permet la conception d'un test valide. En effet, l'OM de référence apporte davantage qu'un référent de notre point de vue de chercheur (au sens où nous l'avons défini en évaluation) par rapport auquel il est possible d'étudier le contenu d'une évaluation (et par conséquent de juger de la négociation effectuée par l'évaluateur sur le savoir), puisqu'elle permet de mettre en perspective les différentes étapes de la transposition du savoir. Ainsi, elle nous permet l'analyse des validités curriculaire et pédagogique définies précédemment. Elle nous permet aussi d'étudier les réponses des élèves, aussi bien dans les évaluations bilans externes que dans les évaluations diagnostiques, en mettant en perspective les techniques et les technologies apprises avec celles définies dans l'OM de référence ; les limites de validité d'une technique dans un domaine donné sont ainsi précisées en fonction des technologies sous-jacentes.

V.3 Formulation de la problématique

En nous situant dans une approche anthropologique et en définissant une praxéologie de référence sur le domaine des nombres entiers et de l'arithmétique en fin d'école (ou début de collège), il est possible de caractériser les praxéologies apprises au regard de celles à enseigner et enseignées. La définition d'une praxéologie de référence, basée sur un modèle épistémologique, apparaît alors comme un élément permettant d'analyser non seulement le contenu d'une évaluation, mais aussi les productions d'élèves : il est alors possible d'interpréter les résultats des élèves par rapport aux attentes des différentes institutions et de formuler des hypothèses sur les raisons possibles de leurs erreurs en inférant des technologies absentes dans l'enseignement.

En croisant une approche anthropologique, basée sur la définition d'une praxéologie de référence, avec une approche cognitive, il est dès lors possible, à partir des praxéologies apprises, de rechercher des cohérences de fonctionnement et d'interroger le développement conceptuel des élèves en prenant en compte les phénomènes de transposition ; la complémentarité de ces deux approches intervient particulièrement lors de la conception d'évaluations diagnostiques à visée formative menant à la définition de profils d'élèves.

Par ailleurs, si l'approche anthropologique permet de réaliser une analyse *a priori* des tâches d'une évaluation et d'étudier sa validité de contenu (validités curriculaire et pédagogique), l'approche psycho-didactique interroge la validité d'une façon complémentaire, en prenant en compte les processus de réponses mis en jeu par les élèves. Par conséquent, la complémentarité d'une étude épistémologique et didactique avec une approche psycho-didactique permet d'analyser la validité d'une évaluation, quelle que soit sa fonction (diagnostique ou bilan) ou son caractère externe ou interne.

Nous comprenons alors l'intérêt de croiser ces différentes approches pour étudier le contenu des évaluations et analyser les productions des élèves, dans le cadre d'évaluations bilans ou diagnostiques : les résultats produits seront d'autant plus robustes que la validité de contenu sera garantie par des preuves complémentaires, basées sur l'analyse du contenu, sur les processus de réponse et sur la recherche de cohérences de fonctionnement.

Nous formulons désormais notre problématique en la situant un domaine d'étude, situé en fin d'école et englobant les nombres entiers, à savoir : la numération décimale, le calcul et la résolution de problèmes arithmétiques. Deux dimensions orientent notre travail autour de l'évaluation des connaissances des élèves :

- l'étude de la validité des évaluations externes définit le premier axe de notre problématique : il s'agit de concevoir une méthodologie d'analyse permettant d'étudier le contenu d'une évaluation, en recherchant des preuves de validité liées au contenu de l'évaluation et aux processus de réponse et en s'appuyant sur des approches épistémologique, didactique et psycho-didactique : **comment la définition d'une praxéologie de référence, s'appuyant sur une étude épistémologique et didactique, permet-elle d'analyser le contenu d'une évaluation et de rendre compte des résultats des élèves ? En quoi des approches épistémologique, didactique et psycho-didactique permettent-elles, pour une évaluation externe, d'apporter des preuves de validité complémentaires à celles apportées par une approche psychométrique ?**

- la conception d'une évaluation externe diagnostique à visée formative des connaissances d'élèves en fin de cycle 3 (entrée en 6ème), dans la lignée de celle réalisée en algèbre par Grugeon (1997) : **en quoi la définition d'une praxéologie de référence permet-elle de décrire les praxéologies apprises,**

de mettre en exergue des cohérences de fonctionnement et de les mettre en perspective des différentes étapes de la transposition didactique ?

Nous avons montré dans ce premier chapitre, la nécessité, pour le concepteur d'une évaluation de définir un référent lui permettant d'évaluer les connaissances des élèves au regard de ce référent. Sur un même domaine mathématique, les référents construits par les concepteurs d'évaluation peuvent différer (les évaluations CEDRE et TIMSS par exemple n'ont pas le même référent pour évaluer les savoirs mathématiques des élèves). La praxéologie de référence que nous définissons à partir d'une étude épistémologique, sur le domaine mathématique étudié permet ensuite d'analyser le contenu d'évaluations quel que soit le référent de ces dernières et de comparer à la fois leur contenu, mais aussi les résultats produits. Nous nous limitons dans la thèse, pour répondre au premier axe de la problématique, à développer une méthodologie d'analyse des évaluations (**chapitre 4**) en prenant en compte la spécificité liée à la psychométrie pour les évaluations externes et l'exploitons par la suite pour étudier la validité de contenu des évaluations CEDRE 2008 et 2014 en fin d'école sur le domaine étudié (**chapitre 5**).

Nous nous appuyons à nouveau sur la praxéologie de référence pour concevoir un modèle multidimensionnel d'analyse permettant de décrire des profils d'élèves à partir de cohérences de fonctionnement définies selon des technologies dominantes (**chapitre 6**). Le dispositif d'évaluation diagnostic que nous développons (**chapitre 7**) nécessite la mise en œuvre d'un test valide au regard des critères définis dans la méthodologie d'analyse des évaluations (**chapitre 4**) et permet d'éprouver la robustesse du modèle développé dans le **chapitre 6.**

La définition d'une praxéologie de référence sur le domaine permettant par la suite de caractériser les praxéologies apprises au regard de celles à enseigner et enseignées est par conséquent le point de départ du travail autour des deux axes de la problématique ; il fait l'objet des deux chapitres suivants.

CHAPITRE 2

DÉFINITION D'UNE PRAXÉOLOGIE DE RÉFÉRENCE SUR LE DOMAINE DES NOMBRES ENTIERS

Pour pouvoir caractériser les praxéologies apprises, inférées dans notre cas à partir des productions d'élèves lors d'évaluations bilan ou diagnostique, Bosch & Gascon (2005) ont montré qu'il « était nécessaire de prendre en compte les praxéologies à enseigner et enseignées ». La définition d'une OM de référence sur le domaine mathématique étudié, avec un point de vue épistémologique revêt une double fonction :

- définir un référent permettant d'analyser le contenu des évaluations pour en étudier la validité ;
- caractériser des techniques et des technologies permettant par la suite l'analyse des productions des élèves.

Nous reviendrons sur ces deux points dans le chapitre 3 lorsque nous décrirons les praxéologies ; l'objectif de ce deuxième chapitre est de pouvoir structurer l'OM de référence de notre domaine d'étude en OM régionales et locales pour pouvoir étudier, par la suite, les types de tâches relevant du domaine des nombres entiers c'est-à-dire, la numération, le calcul et la résolution de problèmes arithmétiques avec des nombres entiers, en prenant en compte les différentes étapes de la transposition.

Nous commençons ce chapitre en situant ce domaine par rapport aux programmes actuellement en vigueur à l'école élémentaire et au début du collège ($6^{ème}$) : si les évaluations externes que nous considérons se placent principalement en fin d'école, le test diagnostique que nous proposons est destiné à des élèves de fin d'école, entrant en $6^{ème}$ (grade 6), ce qui justifie le fait que nous prenions en compte les programmes de l'école et du collège. Ce premier paragraphe permet uniquement de délimiter le domaine d'étude au regard des programmes ; nous le compléterons à la fin du chapitre 3 en explicitant, après l'étude des praxéologies, l'évolution des techniques et des technologies de l'école maternelle au début du collège.

Puisque la description de l'OM de référence prend en compte les savoirs savants, nous abordons dans une deuxième partie la définition mathématique des nombres entiers, des quatre opérations (addition, soustraction, multiplication et division euclidienne) et de leurs propriétés : les définitions des nombres entiers et des opérations sont formalisées rigoureusement de manière tardive, dans la deuxième moitié du XIX^{ème} siècle, à partir des axiomes de Peano (1889). Ces définitions théoriques permettent de caractériser des savoirs du premier ordre, utiles à la sphère de production de savoirs, mais non adaptés pour l'enseignement : si elles nous permettent de définir, pour les praxéologies de calcul, des premiers éléments technologiques que nous exploiterons par la suite pour justifier des techniques, les définitions du nombre entier ne permettent pas de dégager des éléments technologiques exploitables pour notre travail, ces savoirs n'étant pas adaptés à ceux de l'enseignement primaire. Ce qui nous amène à considérer des savoirs du deuxième ordre, mathématiquement corrects, et utiles à l'enseignement mais non adaptés aux mathématiciens. (Chambris 2008, p. 19 ; Tempier 2013, p.20).

Nous abordons ces savoirs du deuxième ordre dans une troisième partie à travers une étude théorique de différents systèmes de numération (écrite chiffrée, parlée et en unités de numération) : nous pouvons alors pointer des premiers éléments technologiques relatifs à l'écriture des nombres dans ces différents systèmes de numération, ainsi que différentes façons de représenter les nombres.

Pour apporter un premier point de vue épistémologique sur le nombre et les opérations, nous étudions dans cette partie, le « Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie » écrit par Bezout et complété par les notes de Reynaud (1821). Nous choisissons ce traité pour deux raisons : d'une part, il semble avoir eu une grande importance dans l'enseignement de l'arithmétique en primaire à cette époque, les manuels d'enseignement reprenant le plan d'étude du traité de Bezout et d'autre part, l'étude que nous menons, incluant les opérations, prolonge celles menées par Chambris (2008) et Mounier (2010) sur la numération à partir de ce même traité. Des premières techniques de calcul sont alors mises en lien avec les technologies qui les sous-tendent.

L'étude des deux traités ne permet pas d'aborder tous les éléments relevant du domaine d'étude, relativement aux programmes de l'école (présentés dans la première partie) : en particulier, nous observerons que, ni les nombres, ni les opérations ne sont mis en lien avec les problèmes qu'ils permettent de résoudre et que les opérations ne sont considérées que sous la forme d'un calcul posé, sans qu'aucune référence au calcul mental réfléchi ne soit faite. Pour répondre à ces manques, nous nous référons, dans une quatrième partie, à différents travaux didactiques et épistémologiques portant sur le calcul réfléchi, la dénotation des expressions arithmétiques et la résolution de problèmes ; nous illustrons leurs résultats à l'aide d'extraits de manuels anciens d'arithmétique, dont la structure s'appuie sur celle des traités étudiés dans la troisième partie.

Ce travail, balisé par les programmes actuels, autour des savoirs du premier ordre, puis du second ordre, nous conduit à décrire des techniques et des éléments technologiques en lien avec un premier processus de transposition didactique ; nous concluons ce chapitre en présentant la structure de l'OM de référence que nous adoptons pour l'étude de ce domaine. Les éléments théoriques et technologiques que nous exposons dans ce chapitre sont exploités plus largement dans le chapitre suivant pour décrire chacune des praxéologies à travers différents types de tâches ; ils nous permettent néanmoins d'interroger la façon dont les techniques et les technologies ont évolué entre le XIX^{ème} siècle et le début de XXI^{ème} siècle. Nous nous limitons dans ce chapitre, à décrire l'existant au XIX^{ème} siècle ; nous nous y réfèrerons, lorsque nous décrirons, dans le chapitre 3, les praxéologies à enseigner et enseignées de nos jours pour mesurer l'évolution des techniques et des technologies ; nous illustrerons alors notre propos par des extraits de manuels actuellement en vigueur.

I NOMBRES ENTIERS : NUMÉRATION, ARITHMÉTIQUE ET RÉSOLUTION DE PROBLÈMES - UN APERÇU DES PROGRAMMES

Jusqu'à présent nous avons décrit le domaine étudié comme portant sur les nombres entiers, avec la numération, le calcul et la résolution de problèmes arithmétiques. Avant de structurer, puis de décrire la praxéologie de référence, nous précisons d'abord comment ce domaine est traité dans les programmes actuels de l'école élémentaire.

I.1 Programmes de l'école maternelle (2008)

Les premiers apprentissages numériques commencent dès l'école maternelle ; les élèves découvrent le nombre à travers des problèmes de dénombrement, de comparaison, de réunion, de partage, etc. Le concept de nombre se construit progressivement à travers les situations qui lui donnent du sens (pour représenter une quantité ou pour situer une position dans une suite ordonnée d'éléments) et à travers différentes façons de le représenter : l'acquisition de la comptine jusqu'à 30 est un des objectifs de la maternelle, les écritures chiffrées étant construites en correspondance avec le nom du nombre (sa désignation orale). Les problèmes introduits en maternelle appellent, pour être résolus, des procédures de comptage, de groupements ou de partage à partir de collections de tailles variées. Ainsi, « les problèmes constituent une première entrée dans l'univers du calcul mais c'est le cours préparatoire qui installera le symbolisme (signes des opérations, signe "égal") et les techniques. » (Programmes de l'école maternelle 2008)

I.2 Programmes du cycle 2 (2008)

Le domaine que nous étudions appartient au domaine des programmes de l'école élémentaire identifié par « nombres et calculs ». Au cycle 2 (CP et CE1 - grades 1 et 2), la connaissance des nombres et le calcul constituent des objectifs prioritaires ; le programme du cycle 2 insiste aussi sur la nécessité d'une pratique régulière du calcul mental, afin d'installer de premiers automatismes et précise que « la résolution de problèmes fait l'objet d'un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des opérations. »

Les objectifs des programmes de 2008 sur le domaine « nombres et calculs » sont alors les suivants :

> « Les élèves apprennent la numération décimale inférieure à 1 000.
>
> Ils dénombrent des collections, connaissent la suite des nombres, comparent et rangent.
>
> Ils mémorisent et utilisent les tables d'addition et de multiplication (par 2, 3, 4 et 5), ils apprennent les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction, celle de la multiplication et apprennent à résoudre des problèmes faisant intervenir ces opérations. Les problèmes de groupements et de partage permettent une première approche de la division pour des nombres inférieurs à 100.
>
> L'entraînement quotidien au calcul mental permet une connaissance plus approfondie des nombres et une familiarisation avec leurs propriétés. » Programmes du cycle 2 (2008)

L'apprentissage des principes de la numération décimale pour des nombres inférieurs à 1000 et de la numération parlée est un des objectifs du cycle 2. L'addition, la soustraction et la multiplication sont abordées à la fois comme outil pour résoudre des problèmes, mais aussi comme objet à travers l'apprentissage des techniques de calcul posé, la division ne faisant l'objet que d'une introduction à travers des situations de groupement et de partage.

I.3 Programmes du cycle 3 (2008)

La construction du nombre et des opérations se poursuit au cycle 3 avec notamment la construction de la division en tant qu'opération et l'introduction des fractions et des nombres décimaux. Comme nous centrons notre travail sur les nombres entiers, nous écartons de l'extrait des programmes de mathématiques du cycle 3, ce qui correspond aux fractions et aux décimaux ; les objectifs du cycle 3 sont alors les suivants :

> « L'étude organisée des nombres est poursuivie jusqu'au milliard, mais des nombres plus grands peuvent être rencontrés.
>
> Les nombres entiers naturels :
>
> - principes de la numération décimale de position : valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture des nombres ;
> - désignation orale et écriture en chiffres et en lettres ;
> - comparaison et rangement de nombres, repérage sur une droite graduée, utilisation des signes > et < ;
> - relations arithmétiques entre les nombres d'usage courant : double, moitié, quadruple, quart, triple, tiers..., la notion de multiple.
>
> Le calcul :
>
> - mental : tables d'addition et de multiplication. L'entraînement quotidien au calcul mental portant sur les quatre opérations favorise une appropriation des nombres et de leurs propriétés.
> - posé : la maîtrise d'une technique opératoire pour chacune des quatre opérations est indispensable.
> - à la calculatrice : la calculatrice fait l'objet d'une utilisation raisonnée en fonction de la complexité des calculs auxquels sont confrontés les élèves. » Programmes du cycle 3 (2008).

Des repères pour les progressions accompagnent les programmes du cycle 2 et du cycle 3 (Annexe 1) et sont donnés à titre indicatif pour que l'enseignant puisse organiser son enseignement ; le socle commun de connaissances et de compétences fixe des attendus qui peuvent différer des programmes, en particulier en fin de cycle 3, les attentes sur les décimaux sont moindres que celles fixées par les programmes ; pour les entiers, les attentes sont identiques (Annexe 2).

I.4 Programmes du collège (2008)

Au début du collège, les objectifs figurant au programme de la classe de 6ème sont définis comme étant dans la continuité de ceux de l'école élémentaire, même si le travail mené sur les nombres au début du collège s'oriente davantage sur les fractions et les nombres décimaux. La connaissance du système de numération décimale reste un des objectifs premiers (« connaître et utiliser la valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un entier ou d'un décimal. »).

Pour le calcul, les objectifs sont similaires à ceux de l'école primaire et renvoie aux trois mêmes types de calculs : mental, posé et instrumenté avec les commentaires suivants :

> « La maîtrise des tables est consolidée par une pratique régulière du calcul mental sur des entiers et des décimaux simples. [...]
>
> La notion de multiple, introduite à l'école primaire, est rappelée sur des exemples numériques, en même temps qu'est introduite celle de diviseur. Les différentes significations de ce dernier terme doivent être explicitées [...]
>
> La capacité à calculer mentalement est une priorité et fait l'objet d'activités régulières.

> La maîtrise des différents moyens de calcul doit devenir suffisante pour ne pas faire obstacle à la résolution de problèmes [...]
>
> Concernant le calcul posé, les nombres doivent rester de taille raisonnable et aucune virtuosité technique n'est recherchée [...]. » Programme du collège (2008)

Si les ordres de grandeur figurent déjà dans les programmes de l'école élémentaire, quelques précisions sont apportées en 6ème : ils sont travaillés pour contrôler ou anticiper le résultat d'une somme, **d'une différence*[1], ou d'un produit. Enfin, en ce qui concerne le « sens des opérations », il s'agit d'apprendre à « choisir les opérations qui conviennent au traitement de la situation étudiée ». De premières exigences sur les expressions à produire apparaissent : « Pour les problèmes à étapes, la solution peut être donnée à l'aide d'une suite de calculs, **ou à l'aide de calculs avec parenthèses*. » Le travail autour d'expressions arithmétiques mettant en jeu des parenthèses, en lien avec les priorités opératoires relève de la classe de 5ème, mais débute, par la production d'expressions dès la 6ème.

I.5 Description du domaine d'étude

Au regard des programmes, notre domaine d'étude rejoint la description du domaine « nombres et calculs » du cycle 3 et regroupe, pour les nombres entiers : les numérations (décimale et parlée), la comparaison, les relations arithmétiques entre les nombres, le calcul mental et posé sur les quatre opérations (+ , - , × et :), ainsi que la résolution de problèmes. Nous désignons ce domaine par l'expression « numération et arithmétique des entiers » ; le terme d'arithmétique renvoyant à la fois aux opérations et aux relations arithmétiques entre les nombres.

Nous incluons dans ce domaine ce qui relève de « la résolution de problèmes », en particulier ceux arithmétiques en lien avec les quatre opérations ; les repères pour les progressions de l'école élémentaire (Annexe 1) incluent d'ailleurs dans le domaine « nombres et calculs » un axe « problèmes ». Résoudre des problèmes permet de concevoir le sens des opérations parallèlement à l'apprentissage du calcul ; en effet, si à l'école maternelle, les problèmes peuvent être résolus par des procédés de comptage, en cycle 3, ils demandent la mise en œuvre de calcul et parallèlement, le sens d'une opération ne peut pas se construire si elle n'est pas mobilisée pour résoudre des problèmes.

En considérant à la fois les nombres et les opérations en lien avec la résolution de problèmes, il est dès lors possible de considérer les concepts de nombres et d'opérations sous un aspect *outil* et un aspect *objet* (Douady 1986) ; notre problématique portant sur des évaluations bilan ou diagnostique, il ne s'agit pas de considérer des situations d'apprentissage permettant de donner des raisons d'être aux nombres ou aux opérations, mais plutôt de pouvoir étudier la capacité des élèves à convoquer des praxéologies à différents niveaux et de reconnaître des modèles (additifs et/ou multiplicatifs) pour résoudre des problèmes. Inclure cette dernière dans notre domaine permet donc de prendre en compte les aspects *outil* et *objet* des concepts étudiés pour évaluer et caractériser les connaissances des élèves de fin d'école.

[1] L'écriture des programmes du collège de 2008 prend en compte les exigibles du socle commun (2006) : les points du programme (connaissances, capacités et exemples) qui ne sont pas exigibles pour le socle sont écrits en italiques. Si la phrase en italiques est précédée d'un astérisque l'item sera exigible pour le socle dans une année ultérieure. Ainsi, la détermination d'un ordre de grandeur d'une différence n'est pas exigible pour le socle en 6ème, mais le sera en 5ème ; ce qui n'empêche pas de le travailler en 6ème.

En ce qui concerne le calcul instrumenté, figurant comme un des objectifs des programmes de 2008 de l'école et du collège, nous choisissons de ne pas l'intégrer dans notre travail pour pouvoir nous concentrer sur les deux autres types de calcul que sont le calcul réfléchi et le calcul posé. Par ailleurs, nous mettons davantage l'accent sur le calcul réfléchi, qui favorise la mobilisation des propriétés des opérations et les décompositions des nombres, que sur le calcul mental automatisé (connaissances des tables), même si le calcul mental reste présent ; nous décrirons plus spécifiquement par la suite le choix que nous effectuons pour l'étude du calcul mental.

Enfin, nous prenons en compte la production d'expressions arithmétiques évoquées dans le programme de 6ème et les relions non seulement à la résolution de problèmes, mais aussi à la réécriture d'expressions dans le cadre du calcul réfléchi.

Cette première description du domaine à partir des programmes nous permet ainsi de baliser la suite de notre travail sur l'étude des théories mathématiques sous-tendant les définitions du nombre et des opérations ; nous reviendrons sur les programmes actuels à la fin de ce chapitre pour terminer le travail de structuration de l'OM de référence, mais nous analyserons les praxéologies à enseigner de façon plus approfondie dans le chapitre 3 en nous référant non seulement aux programmes, mais aussi aux documents ressources qui les accompagnent.

II THÉORIE MATHÉMATIQUE POUR DÉCRIRE LE NOMBRE ET LES OPÉRATIONS

Nous commençons dans cette première partie, par donner la définition de l'ensemble des entiers naturels ℕ par Peano à partir de la fonction successeur ; nous étudions ensuite comment sont définies la relation d'ordre entre deux entiers et les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication et division) et dégageons les propriétés de ces opérations, pour définir les premières technologies associées au calcul et découlant de la théorie.

II.1 Axiomatisation de l'ensemble des entiers naturels

Historiquement, une première définition ensembliste des nombres entiers naturels a été donnée par Dedekind en 1888 ; définition reprise ensuite par Frege et Cantor, qui mena à la formulation d'une axiomatique des nombres entiers naturels par Peano (Mainzer 1999).

Dedekind, s'appuyant sur les travaux de Peano, définit l'ensemble des entiers naturels ℕ de la façon suivante :
« On appelle ensemble des nombres naturels (ou des entiers naturels) un triplet constitué d'un ensemble ℕ, dont les éléments sont appelés entiers naturels, d'un élément particulier de ℕ, noté 0, et d'une application S de ℕ dans lui-même satisfaisant aux propriétés suivantes :
- S est injective ;
- 0 n'appartient pas à S(N) ;
- Si un sous-ensemble M de ℕcontient 0 et vérifie S(M) C M, alors M = ℕ.
Si n ∈ ℕ, on dit que S(n) est le successeur de n et on le note n+1. » Mérindol (2006)

La fonction successeur S ainsi définie peut être mise en relation avec le processus de comptage sur les nombres entiers naturels. La première propriété signifie qu'en comptant, on ne retrouve jamais deux fois le même nombre, la deuxième que 0 n'est le successeur d'aucun nombre (c'est donc le point de départ du comptage) et la troisième propriété est considérée comme la vision ensembliste du principe de récurrence à savoir : si 0 possède une propriété P et si l'implication « si l'entier n possède la propriété P, alors son successeur S(n) la possède aussi » est vraie alors tous les entiers naturels possèdent cette propriété (Mainzer 1999). Le principe de récurrence permettra par la suite de définir l'addition et la multiplication.

II.2 Opérations dans l'ensemble des entiers naturels

II.2.1 Addition, différence, multiplication et relation d'ordre

L'addition, la multiplication et la relation d'ordre peuvent être définies récursivement et démontrées, comme leurs propriétés, à partir du principe de récurrence défini précédemment. Nous ne précisons ici que leur définition et ne démontrons pas les propriétés (nous renvoyons pour cela à Mainzer (1999), qui se réfère lui-même à Landau (1963)).

II.2.1.i Définition de l'addition sur les entiers naturels

$\forall$ (n ; m) $\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, m+n est définie par la formule de récurrence suivante : m + S(n) = S (m + n) avec pour initialisation, m + 0 = m. Nous retenons comme éléments technologiques les propriétés d'associativité ($\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{ass\_+}}$), de commutativité ($\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{comm\_+}}$) et le fait que 0 soit un élément neutre ; ces propriétés se démontrent à l'aide du principe de récurrence.

II.2.1.ii Définition de la relation d'ordre sur les entiers naturels

La relation d'ordre sur les entiers naturels est définie de la façon suivante :

$$\forall (n ; m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, n \leq m \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{N}, \text{ tel que } m = n + t.$$

Il s'agit d'une relation d'ordre parce qu'elle est :
- réflexive : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, n $\leq$ n
- antisymétrique : $\forall$ (n ; m) $\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, n $\leq$ m et m $\leq$ n $\Longrightarrow$ n = m
- transitive : $\forall$ (n ; m) $\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, n $\leq$ m et m $\leq$ p $\Longrightarrow$ n $\leq$ p

La définition de la relation d'ordre apporte un premier élément technologique $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{Def\_RO}}$ relatif à la comparaison de deux nombres ; cette technologie inclut en particulier la propriété de transitivité de la relation d'ordre qui intervient dans les types de tâches de rangement.

II.2.1.iii Définition de la différence entre deux entiers naturels

$\forall$ (a ; b) $\in \mathbb{N}\times \mathbb{N}$, a $\leq$b : $\exists$! d $\in \mathbb{N}$ tel que b = a+ d.
d est défini comme la différence entre a et b ; on le note b - a. Nous étudions uniquement la définition de la différence entre deux entiers naturels (a étant inférieur ou égal à b), la soustraction ne pouvant être conçue comme interne à $\mathbb{N}$[2]. A la différence de l'addition, elle n'est ni associative, ni commutative. Dans la suite de notre travail, nous utilisons le terme de « soustraction » pour désigner l'opération définie sur $\mathbb{N}\times \mathbb{N}$ et qui associe à un couple d'entiers naturels (a ; b) avec a $\leq$ b, sa différence.

Si on étend la construction de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$ à partir de classes d'équivalence (Mainzer 1999, p. 13), la soustraction présente des propriétés liées à l'addition que nous listons ci-dessous comme autant d'éléments technologiques que nous ré-exploiterons par la suite dans l'étude des praxéologies de calcul posé et réfléchi ; ces propriétés sont établies pour tout nombre réel, et *a fortiori* pour les nombres entiers, mais nous les formulons pour une différence d'entiers naturels, ce qui impose des

[2] Pour la définir, l'ensemble des nombres entiers doit être étendu ; Dedekind en 1913 eu l'idée de la construction de $\mathbb{Z}$ à partir de couple de $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$. Ainsi, tout entier peut être considéré comme la différence de deux entiers naturels a et b. Ainsi, on peut associer au couple (a ; b) l'entier a - b, mais il n'y a pas dans ce cas unicité de l'écriture puisque a - b est égal à c - d si et seulement si a + d = c + b.

conditions sur les nombres en jeu pour que la différence soit définie (c'est-à-dire qu'aucun nombre négatif ne soit en jeu).

- Propriété de l'écart constant $\mathbf{\Theta_{écart}}$ (ou de l'ajout simultané) :
$\forall (a ; b ; c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, b \leq a ; a - b = (a + c) - (b + c)$.
Une différence ne change pas si on ajoute le même nombre à chacun des deux termes.

- Propriété permettant de soustraire une somme $\mathbf{\Theta_{sous\text{-}somme}}$:
$\forall (a ; b ; c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, b \leq a$ et $(b + c) \leq a ; a - (b + c) = a - b - c$.
Soustraire une somme revient à soustraire successivement chacun des termes de la somme.

- Propriété permettant de soustraire une différence $\mathbf{\Theta_{sous\text{-}diff}}$:
$\forall (a ; b ; c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, c \leq b \leq a$ et $b - c \leq a ; a - (b - c) = (a - b) + c$
Soustraire une différence revient à soustraire le premier terme de la différence, puis à ajouter le second.

Les propriétés précédentes portent sur la soustraction d'une somme ou d'une différence ; deux autres peuvent être formulées selon que l'on soustrait un terme d'une somme ou d'une différence :
- Propriété permettant de soustraire un nombre d'une somme $\mathbf{\Theta_{sous\text{-}terme\text{-}somme}}$:
$\forall (a ; b ; c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, c \leq a$ et $c \leq b; (a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$.
Soustraire un nombre d'une somme revient à le soustraire d'un des termes de la somme.

- Propriété permettant de soustraire un nombre d'une différence $\mathbf{\Theta_{sous\text{-}terme\text{-}diff}}$:
$\forall (a ; b ; c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, b \leq a$ et $c \leq a; (a - b) - c = (a - c) - b$.
Soustraire un nombre d'une différence revient à le soustraire du premier terme de la différence.

II.2.1.iv Définition de la multiplication sur les entiers naturels

$\forall (m ; n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, m.n est défini grâce à la fonction successeur S par la formule de récurrence suivante : $m . S(n) = m.n + m$ avec pour initialisation, $m . 0 = 0$.

La définition que nous choisissons ici s'appuie sur celle de la fonction successeur ; il est aussi possible de considérer un nombre entier comme le cardinal de tous les ensembles équipotents entre eux. Par conséquent le produit de deux cardinaux (donc de deux entiers) est égal au cardinal de l'ensemble produit, c'est à dire au produit cartésien des deux ensembles. (Noirfalise & Matheron 2009)

Les propriétés d'associativité, de commutativité et de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition se démontrent par le principe de récurrence. Comme pour l'addition, ces propriétés interviennent dans des praxéologies de calcul et nous les nommons respectivement $\mathbf{\Theta_{ass\_\times}}$, $\mathbf{\Theta_{comm\_\times}}$, et $\mathbf{\Theta_{dist}}$.

La définition de la multiplication conduit aussi aux définitions de multiple et de diviseur :
- $\forall (m ; n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, n est multiple de m $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$, tel que $n = m.k$; 0 est multiple de tout nombre entier.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}^*$, m est un diviseur de n $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$, tel que $n = m.k$.

II.2.2 Division

II.2.2.i Division euclidienne

En ce qui concerne la division : définie comme inverse de la multiplication, elle ne peut pas être définie dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (ni même dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$). Même si le traitement de la proportion des nombres entiers naturels apparaît dans *les Eléments* d'Euclide, considérer une proportion comme une fraction et étendre ainsi la notion de nombre mathématiquement date seulement du XIX^{ème} siècle avec les travaux de Bolzano et Ohm (Mainzer 1999). C'est en 1895 que Weber introduit les fractions comme classes d'équivalence de nombres entiers ; ce qui conduira à la définition du corps des rationnels. Nous avons choisi, dans notre travail, de ne pas considérer ce qui relève du corps des rationnels, tant par les nombres qui sont en jeu que par les opérations qui y sont définies, en particulier, nous nous limitons à la division euclidienne de deux entiers.

A la différence des trois autres opérations, la division euclidienne n'est pas une opération interne à $\mathbb{N}$; en effet, à un couple d'entiers naturels a (le dividende) et b (le diviseur, b non nul), elle n'associe pas un seul entier naturel, mais un couple d'entiers naturels, le quotient q et le reste r de la façon suivante :

$\forall (a ; b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $\exists ! (q ; r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que : $a = b.q + r$ avec $0 \leq r < b$. Cette égalité est caractéristique de la division euclidienne de deux entiers naturels et cette définition est équivalente à la suivante :

$\forall (a ; b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $\exists ! (q ; r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que : $b.q \leq a < b.(q+1)$.
r est alors défini par $r = a - b.q$ et $0 \leq r < b$

Nous prenons en compte ces deux formulations de la définition de la division euclidienne (à partir de l'égalité caractéristique ou de l'encadrement du dividende) sous la forme d'un même élément technologique que nous nommons $\mathbf{\Theta_{div\text{-}euc}}$ et qui interviendra particulièrement dans la justification de la technique opératoire de la division euclidienne. La condition sur le reste ($0 \leq r < b$) assure l'unicité du quotient et du reste ; elle permet aussi de trouver dans b.q le plus grand multiple du diviseur (b non nul) inférieur au dividende (a). Lorsque que le reste est nul, on dira que la division est exacte.

II.2.2.ii Propriétés de la division

Comme pour les trois autres opérations, nous nous intéressons maintenant aux propriétés de la division notamment en lien avec les autres opérations. Ces propriétés sont établies pour la division en tant qu'opération sur les nombres réels, et sont *a fortiori* vraies pour les divisions exactes sur les nombres entiers ; nous les formulons dans le cas général et ne spécifions pas dans l'énoncé de chacune des propriétés de condition sur les nombres en jeu pour que les quotients soient entiers. Nous rappelons que ces propriétés sont autant d'éléments technologiques qui sous-tendent les techniques dans les types de tâches relevant de la division.

- Division d'une somme ou d'une différence $\mathbf{\Theta_{div\text{-}somme\text{-}diff}}$:
$\forall (a ; b ; c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $(a + b) : c = (a : c) + (b : c)$ et $(a - b) : c = (a : c) - (b : c)$
Diviser une somme ou une différence par un nombre donné non nul revient à diviser chacun des termes par ce nombre.

- Division d'un produit $\mathbf{\Theta_{div\text{-}prod}}$:
$\forall (a ; b ; c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $(a \times b) : c = (a : c) \times b = a \times (b : c)$.
Diviser un produit par un nombre donné non nul revient à diviser un des facteurs du produit par ce nombre, et à multiplier le résultat par l'autre facteur.

- Division par un produit $\mathbf{\Theta_{div\text{-}par\text{-}prod}}$:
$\forall (a ; b ; c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $a : (c \times b) = (a : c) : b = (a : b) : c$.
Diviser un nombre donné par un produit revient à diviser ce nombre successivement par chacun des facteurs du produit. Cette propriété correspond aussi à la division d'un quotient : diviser un quotient par un nombre donné revient à diviser le dividende par le produit du diviseur par ce nombre.

- Division par un quotient **$\Theta_{div\text{-}par\text{-}quot}$** :
$\forall$ (a ; b ; c) $\in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, a : (b : c) = (a : b) × c.
Diviser un nombre donné par un quotient revient à diviser ce nombre par le dividende et à multiplier par le diviseur.

Enfin, nous regroupons au sein d'une même technologie **Θ_{inv}** la définition d'une opération en lien avec son opération inverse : la soustraction peut être conçue dans $\mathbb{N}$ comme l'inverse d'une addition. Dans le cas de la multiplication et de la division, la multiplication peut être conçue comme l'inverse d'une division exacte (avec un reste nul) et réciproquement.

La définition mathématique des opérations nous a permis de dégager des éléments théoriques sur lesquels reposent les technologies qui interviennent dans les types de tâches de calcul.

En revanche, les définitions du nombre n'ont apporté, pour notre travail, que des éléments théoriques peu exploitables ; en effet, au-delà des aspects ordinal et cardinal du nombre qui interviennent dans les problèmes, et comme nous nous situons en fin d'école, ce n'est pas tant à la définition du nombre entier que nous sommes confrontée, mais plutôt à ses différentes représentations, en particulier son écriture chiffrée, sa désignation orale et son écriture en unités de numération. Le travail de Mounier (2010) sur l'étude théorique des deux premiers systèmes de numération et celui de Chambris (2008) sur les unités de numération nous permettent ainsi de compléter ce travail théorique sur les notions mathématiques.

Nous précisons enfin que nous regroupons l'ensemble des sigles désignant les éléments technologiques, les techniques et les types de tâches à la fin de la thèse, avant les Annexes.

II.3 Étude théorique de la numération écrite chiffrée et de la numération parlée

Nous qualifions de numération un ensemble de signes[3] à condition qu'il soit non ambigu, non redondant et exhaustif (Mounier 2010). Nous retenons dans cette partie trois types de représentations des nombres : l'écriture chiffrée, la désignation parlée (qui peut amener ensuite à une écriture en lettres du nombre) et les écritures en unités de numération (qui ne constituent pas en soi une numération puisqu'il y a redondance : 10 dizaines et 1 centaine représentant le même nombre). Nous reviendrons dans la partie II.3.4 sur d'autres types de représentation du nombre.

II.3.1 Numération écrite chiffrée

Tout nombre entier *n* peut être décomposé dans une base *d* de la façon suivante : n = $\sum_{k=0}^{p} a_k d^k$, *avec p un entier naturel et a_k compris entre 0 et d - 1.* La décomposition sous cette forme est unique, non ambiguë et permet par ailleurs une mise en signe possible de ce nombre sous la forme conventionnelle $a_p\, a_{p-1} \ldots\, a_1\, a_0$, correspondant à l'ordre des coefficients a_k d'ordre k. Dans le système décimal (base 10), ce théorème assure la décomposition d'un nombre *n* sous la forme : *n* = $\sum_{k=0}^{p} a_k 10^k$.

[3] Nous reprenons ici le terme de « signe » dans le même sens que celui employé par Mounier (2010), à savoir celui définit par Pierce : un signe étant une triade composée d'un objet, d'un *representamen* et d'un interprétant.

L'écriture chiffrée d'un nombre en base 10 correspond alors à la mise en signe du nombre *n* sous la forme conventionnelle $a_p\ a_{p-1}...a_1\ a_0$: cette écriture correspond à la juxtaposition horizontale de gauche à droite des coefficients des différents ordres dans l'ordre croissant. Ce système de numération revêt ainsi trois aspects (Chambris 2008, Mounier 2010, Tempier 2013, Perrin-Glorian 2012) :
- la décimalité : les différentes unités sont dans un rapport de 10,
- la maximalité : le nombre d'unités de chaque ordre devant être strictement inférieur à 10, il faut, pour chaque unité de compte, faire le nombre maximal de groupements par 10,
- la position : une fois l'aspect « maximalité » vérifié, le nombre d'unités de chacun des ordres s'écrit de façon conventionnelle de droite à gauche en commençant par les unités, les dizaines, etc.

Nous retrouvons alors les deux éléments technologiques qui sous-tendent la numération écrite chiffrée, tels que les a définis Tempier (2013, p. 45 - 46) :
- le principe de position (**Θ_P**) : les unités du premier ordre s'écrivent au premier rang à droite, les unités du deuxième ordre s'écrivent au deuxième rang à partir de la droite, etc.
- le principe décimal (**Θ_D**) : dix unités d'un certain ordre sont égales à une unité de l'ordre immédiatement supérieur.
Nous ajoutons à ces deux éléments le principe de maximalité (**Θ_{max}**) : le nombre d'unités de chaque ordre étant au plus égal à 9.

II.3.2 Numération parlée

Pour l'analyse de cette numération, nous nous appuyons sur les travaux de Mounier (2010), qui analyse cette numération sans l'aide de la numération écrite chiffrée.

L'écriture en lettres d'un nombre correspond aux mots prononcés pour le dire dans le système de la numération parlée. La numération parlée est construite à partir de mots de base (« un », « deux »,…, « dix », « cent », etc.) qui désignent des nombres de « base » ; les autres noms de nombres sont constitués par concaténation de ces mots de base dans un certain ordre. Par exemple, il faut introduire le mot « cent » avant de pouvoir le concaténer à « trente » pour constituer « cent-trente ». A la différence des écritures chiffrées, la concaténation de mots de base ne désigne pas forcément un nombre (par exemple, le mot « neuf » - « vingt » - « cent » ne désigne pas de nombre) et le principe de désignation des nombres n'est pas régulier (irrégularités jusqu'à « seize », puis une régularité jusqu'à « cinquante neuf », puis une nouvelle irrégularité jusqu'à « cent », etc.). Si la numération écrite chiffrée relève d'une base décimale (10), il en est autrement dans la numération parlée : pour les nombres au-delà de 1 000, c'est une base mille (dix-mille, cent-mille) qui intervient (le million correspondant à mille milliers).

Par ailleurs, dans la compréhension de la numération parlée, prendre en compte l'ordre d'énonciation est important (cent-deux *vs* deux-cents) et repérer les différents niveaux de segmentation est indispensable. Par exemple, deux-cent-trois-millions-cinq-cent-mille-sept-cent-quatre-vingt-neuf peut se décomposer de la façon suivante : [(deux × **cent**) + trois] × <u>**million**</u> + [(cinq × **cent**) × <u>**mille**</u>] + [sept × <u>**cent**</u> + (quatre × **vingt**) + neuf]. Cet exemple illustre la présence de deux niveaux de segmentation[4] : un principal (segment des « cents », « mille », « millions » et éventuellement « milliards ») et un secondaire (ici, avec « vingt » et « cent »). De plus, ces différents niveaux de segmentation induisent une décomposition arithmétique du nombre avec des appuis multiplicatifs et additifs (Mounier 2010, p. 61 - 63), et la reconnaissance de ces différents niveaux de

[4] Nous soulignons et mettons en gras les mots segments principaux et mettons en gras uniquement, les mots segments secondaires.

segmentation est nécessaire pour accéder au nombre à partir de sa désignation : par exemple pour « deux-mille-trois », il faut comprendre (deux × **mille**) + trois et non deux × (mille + trois)[5].

Mounier (2010) décrit alors un algorithme de construction structurant la numération parlée et dégage deux règles d'opération :
« - deux désignations accolées signifie faire la somme des nombres quand le nombre désigné en premier est plus grand que le second ;
- deux désignations accolées signifie faire le produit des nombres quand le nombre désigné en premier est plus petit que le second. » (Mounier 2010, p. 63)

Nous considérons ces deux règles, sur lesquelles repose le principe de la numération parlée, comme un élément technologique $\mathbf{\Theta_{np}}$ qui assure le lien entre le nombre et sa désignation parlée.

II.3.3 Écritures en unités de numération

Le terme d'« unité de numération » (Chambris 2008) désigne les «unités de compte »[6], correspondant aux différents ordres, telles que les dizaines, les centaines. Le principe de décomposition énoncé pour la numération écrite chiffrée peut aussi être formulé avec ces unités de numération, un nombre entier n pouvant s'écrire sous la forme : n = a_0 unités + a_1 dizaines + a_2 centaines, etc. Nous qualifions d'écriture réduite une écriture dans laquelle les unités de chaque ordre sont inférieures strictement à 10 et d'écriture canonique l'écriture réduite dans laquelle les unités de numération sont mentionnées dans l'ordre croissant. (Perrin-Glorian 2012)

A la différence du système de numération écrite chiffrée, ce système d'écriture n'impose pas la maximalité ni un ordre d'écriture des coefficients (par exemple : 25 centaines 14 dizaines 7 unités = 14 dizaines 25 centaines 7 unités = 2 647). Chambris (2012a) a montré l'intérêt de cet ostensif pour :

- éviter que les savoirs de la numération ne soient associés à des règles de calcul, en particulier dans les écritures avec des puissances de dix : 5 x 1 000 + 4 x 10 = 5 040 pourrait être considéré comme l'écriture d'un calcul dans lequel 5 040 serait le résultat, alors qu'il pourrait être interprété avec les unités de numération de la façon suivante : 5 milliers et 4 dizaines. L'écriture canonique conduirait alors à l'écriture chiffrée 5 040 selon le principe de position. Nous y reviendrons dans l'étude des praxéologies ;
- faciliter le lien entre l'écriture chiffrée et la numération parlée ;
- travailler les unités du système métrique (puisqu'il y a congruence entre les unités de numération et celles du système métrique).

Ce qui est synthétisé sous la forme du Schéma 1, établissant la correspondance entre la numération en unités et celles parlée, écrite chiffrée (positionnelle) et métrique, extrait de Chambris (2012a, p. 59).

[5] Nous ne précisons pas ici les différentes interprétations possibles de la numération parlée ; nous renvoyons à Mounier (2010).

[6] Le terme « unité » est polysémique puisqu'il désigne à la fois la quantité servant de référence pour le dénombrement, mais aussi « les différents ordres d'unités » dont on a besoin dans le système de numération (Chambris 2012).

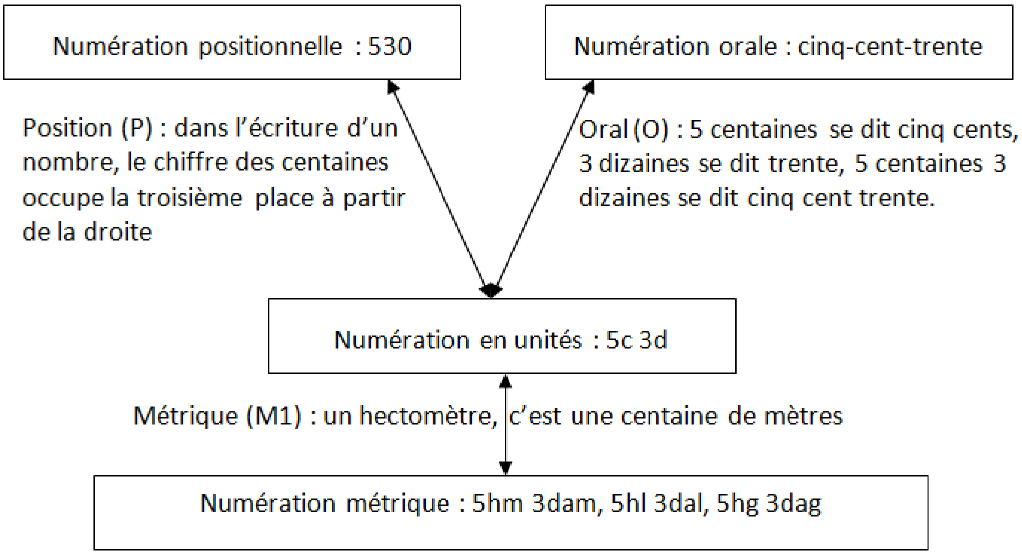


Schéma 1 : Extrait de Chambris (2012a, p. 59)

Notons cependant que si l'écriture en unités de numération est congruente avec les écritures chiffrées et celles dans le système métrique, ce n'est pas le cas avec la numération parlée (qui peut être étudiée de façon indépendante comme le montre Mounier (2010)). Néanmoins, comme le souligne Perrin-Glorian (2012), la numération en unités de numération :

> « constitue un intermédiaire entre la numération orale et la numération en chiffres dans la mesure où sa forme canonique donne une numération en mots sans les irrégularités de la numération orale en français. » Perrin-Glorian (2012)

Ces trois numérations (écrite chiffrée, parlée et en unités) ne sont pas les seules permettant d'écrire le nombre. D'autres types de représentation sémiotique existent ; nous les considérons dans le paragraphe suivant afin d'étudier, par la suite, leur éventuelle congruence dans les tâches de conversion ou de traitement (Duval 2006).

II.3.4 Ostensifs de la numération

Nous reprenons ici de façon synthétique la liste construite par Tempier (2013), qui s'appuie sur celle de Chambris (2008). Nous partons d'un même nombre et montrons, à titre d'exemple, comment il se représente avec différents ostensifs en précisant, pour certaines écritures, les écritures canoniques correspondant (Tableau 1).

Ostensifs de la numération	Exemple - commentaires et écritures canoniques
Écriture chiffrée (EC)	*4526*
Nom du nombre (En)	On pourra distinguer l'écrit (écriture en lettres) *quatre-mille-cinq-cent-vingt-six* de l'oral.
Écriture en unités de numération (EUN)	EUN : *45 centaines 26 unités* EUNC : écriture canonique en unités de numération : *4 milliers 5 centaines 2 dizaines 6 unités.*
Écriture additive selon les puissances de 10 (EAPD)	EAPD *: 4500 + 20 + 6* EAC : écriture additive canonique selon les puissances de 10 : *4000 + 500 + 20 + 6*
Écriture selon les puissances de 10 (EPD)	EPD : *45* x *100 + 2* x *10 + 6* EPDC : écriture canonique selon les puissances de 10 : *4* x *1000 + 5* x *100 + 2* x *10 + 6*
Écriture en matériel de numération (EMN)	EMNC : écriture canonique en matériel de numération

Tableau 1 - Les différents ostensifs de la numération

Tempier (2013, p.17) cite ensuite différents supports qui entrent en jeu dans l'étude de la numération, tels que le matériel de numération, le tableau de numération et le compteur. Différents types de matériel de numération peuvent être employés, tels que des matériels proportionnels groupables (type bûchettes) ou pré-groupés (Schéma 2 ci-dessous) ou des matériels non proportionnels (type les billets de banques).

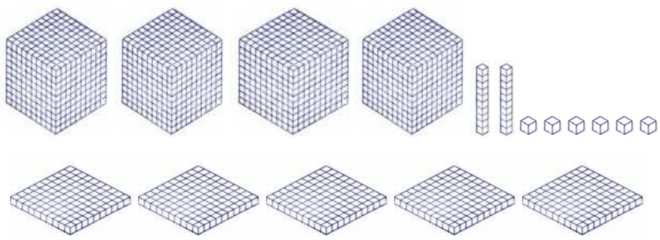


Schéma 2 : Représentation canonique en matériel de numération de 4 526

Nous ajoutons à la liste établie, la droite numérique ; associée à l'aspect ordinal du nombre, elle peut être utilisée pour comparer des nombres, les encadrer ou donner un ordre de grandeur. La droite peut être vide de toute graduation ou graduée ; les relations entre les unités étant, dans ce dernier cas matérialisées par des graduations dont la taille et la précision peuvent varier selon les nombres en jeu, comme le montrent les deux schémas suivants (Schéma 3 : droite graduée de 10 en 10 et Schéma 4 : droite graduée de 5 en 5).

Schéma 3 - Droite graduée de 10 en 10

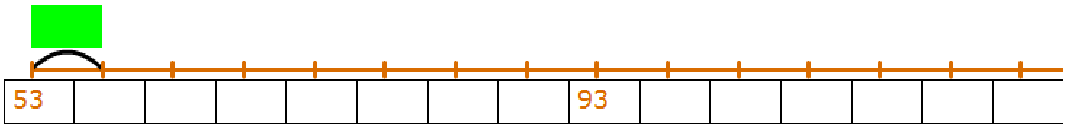


Schéma 4 - Droite graduée de 5 en 5

L'étude mathématique du nombre ainsi que celle des opérations, nous ont conduite à identifier différents ostensifs, mais aussi des premiers éléments technologiques que nous exploitons dans l'étude des praxéologies. L'étude des traités de Bezout et de Reynaud (1821) permet alors d'apporter un point de vue épistémologique sur ces différentes notions et d'étudier les technologies mises en avant dans l'enseignement à cette époque (XIXème siècle) et la façon dont elles s'articulent avec les techniques.

III ÉTUDE DES TRAITÉS DE BEZOUT ET DE REYNAUD

L'étude de ces deux traités permet de considérer des savoirs du second ordre, issus d'une première transposition didactique des savoirs savants (de cette époque) ; nous comparons d'abord dans ces deux traités ce que les auteurs entendent sous le terme d'arithmétique pour préciser la dénomination de notre domaine d'étude puis, nous revenons succinctement sur la façon dont les nombres et leurs écritures sont exposés en nous appuyant sur les travaux déjà produits par Chambris (2008) et Mounier (2010) ; nous étudions ensuite, de façon plus précise, les quatre opérations en les reliant aux éléments technologiques précédemment définis. Nous concluons par une synthèse comparative entre les deux traités.

III.1 Quelle définition de l'arithmétique ?

Nous nous intéressons uniquement au contenu du premier chapitre des deux traités, portant en partie sur les nombres entiers ; d'autres types de nombres sont abordés dans les chapitres suivants.

Si Bezout entend sous le terme « arithmétique » à la fois la façon de représenter les nombres et les calculs, Reynaud (p. 1) distingue la numération dont l'objet est « la manière de former les nombres, de les énoncer et de les écrire » de l'arithmétique, qu'il considère comme « la science qui a pour but d'enseigner à effectuer diverses opérations sur les nombres ». Une autre différence apparaît aussi dans le but alloué à l'arithmétique : Bezout y voit un moyen de faciliter les calculs alors que Reynaud le comprend comme un moyen d'effectuer des opérations sur les nombres, sans faire référence à une quelconque simplification.

Par ailleurs, Bezout englobe la numération, ou plus généralement les façons de représenter les nombres dans l'arithmétique, alors que ce n'est pas le cas chez Reynaud. La définition que nous retenons de l'expression «arithmétique des entiers[7] » peut s'apparenter, sur ce point, à celle de Reynaud et nous discernons ce qui relève de la numération de l'arithmétique. Ce choix se justifie d'autant plus que, comme nous l'avons vu dans le paragraphe I, il est possible de définir les nombres entiers et les opérations indépendamment du système de représentation du nombre.

III.2 Le nombre et ses désignations

Nous reprenons dans un premier paragraphe les conclusions apportées par Mounier (2010) dans l'analyse comparative des parties des deux traités relatives à la numération, en retenant principalement celles qui seront réinvesties par la suite, dans l'étude des quatre opérations.

[7] Nous précisons qu'elle ne relève que des nombres entiers, puisque nous nous limitons dans notre étude à ce domaine alors que dans les traités sont abordés : les nombres décimaux (dont la place dans la progression des chapitres est différente d'un ouvrage à l'autre, Bezout les traitant en même temps que les entiers que ce soit pour la numération, mais aussi pour les opérations, alors que Reynaud les aborde dans un chapitre spécifique), les nombres rationnels et les irrationnels.

Pour Bezout, la notion de nombre est directement liée à celle de mesure, et par conséquent à celle d'unité : « le nombre exprime de combien d'unités ou de parties d'unités une quantité est composée ». Il distingue les nombres concrets des nombres abstraits (selon qu'il se réfère ou non à la nature de ses unités) (p.2) ; distinction que l'on retrouvera dans la partie relative aux opérations, en particulier pour la multiplication. Reynaud quant à lui, précise que le premier chapitre (« numération, addition, soustraction, multiplication et division ») de ses notes porte sur les nombres entiers « abstraits » (un autre chapitre est dédié aux mesures de grandeurs et aux nombres concrets ») parce qu'en arithmétique, la nature des unités du résultat est connue, et que par conséquent, il est possible de n'opérer que sur des nombres abstraits. Comme Bezout, il ne donne pas de définition précise de ce qu'est un nombre entier et le réfère lui aussi à une unité de mesure sous-jacente : « l'assemblage de plusieurs unités de même grandeur compose un nombre ».

Bezout présente la numération écrite chiffrée, de proche en proche (jusqu'à 9, jusqu'à 99, etc.) en lien avec la numération orale, mais aussi à partir de la numération en unités :

> « en continuant ainsi de renfermer dix unités d'un certain ordre, dans une seule unité, et de placer ces nouvelles unités dans des rangs de plus en plus avancés sur la gauche, on parvient à exprimer d'une manière uniforme, et avec dix caractères seulement tous les nombres entiers imaginables ».

Alors que Reynaud explique :

> « pour mettre en chiffres un nombre énoncé, écrivez successivement à côté les uns des autres et en commençant par la gauche, les centaines, les dizaines et les unités de chaque ordre ternaire, et remplacez par des zéros les unités, dizaines et centaines qui pourraient manquer. Parvenu aux unités simples, le nombre énoncé sera écrit.»

Si Bezout décrit à la fois la position des chiffres selon l'ordre auquel ils correspondent (aspect positionnel $\mathbf{\Theta_P}$ de la numération écrite chiffrée) et le rapport de 10 entre chaque ordre (aspect décimal $\mathbf{\Theta_D}$ de la numération écrite chiffrée), Reynaud de son côté mobilise les unités de numération et surtout utilise une autre base sous-jacente pour l'écriture chiffrée (Mounier 2010, p.20) : chez Bezout, elle est de dix, alors que chez Reynaud, qui se réfère à des ordres ternaires, elle est de mille (à partir de 9 999) avec une « sous-base » dix pour l'écriture des nombres compris entre 1 et 999.

Par ailleurs, le zéro a un statut particulier ; pour les deux auteurs, il correspond, dans l'écriture chiffrée, à l'absence d'unités d'un ordre donné, selon la position qu'il occupe dans l'écriture chiffrée. Si Bezout attribue au zéro un statut de nombre, le présentant comme les neuf autres chiffres, Reynaud, quant à lui, le considère comme « chiffre auxiliaire, n'ayant aucune valeur par lui même ». La spécificité du zéro par rapport aux autres chiffres amène alors les auteurs à prendre des exemples de nombres s'écrivant avec des zéros pour illustrer la description des techniques des quatre opérations.

III.3 Les quatre opérations élémentaires

Pour chacune des opérations, nous étudions la définition donnée par les deux auteurs puis les techniques de calcul posé qu'ils présentent ; comme nous l'avons déjà souligné, aucune technique de calcul réfléchi n'est proposée dans le traité. Nous décrivons chacune des techniques de calcul posé à partir de ce qu'expliquent les auteurs et les relions à des éléments technologiques que nous avons définis dans la partie I ; nous reprendrons la description de ces techniques en les mettant en perspective des programmes et de leur enseignement actuels dans le chapitre suivant.

III.3.1 Addition

Pour Bezout : « exprimer la valeur totale de plusieurs nombres, par un seul nombre, est ce que l'on appelle *faire une addition* » (Bezout, p. 9).

Pour Reynaud : « le but de l'addition est de calculer un nombre nommé SOMME, qui contienne à lui seul toutes les unités de plusieurs autres nombres » ; il précise ensuite, que pour réaliser ce calcul, on passera par des « additions partielles » justifiant ainsi le fait de sommer les unités de même ordre ensemble alors que Bezout décrit directement un algorithme de calcul de la somme de deux nombres.

Pour les deux auteurs, c'est l'aspect cardinal du nombre (avec l'emploi du terme « total » qui est ici mis en avant dans chacune de ces définitions) ; il n'y a pas d'autre définition de la somme qui est donnée.

<u>Description de la technique :</u>

La technique de calcul posé de l'addition $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_+}}$ est similaire chez les deux auteurs : on écrit l'un sous l'autre les nombres à sommer en alignant les chiffres des unités de même ordre et on ajoute, en commençant par la droite (colonne des unités), les nombres d'une même colonne. Si la somme excède neuf, ils font tous deux référence à une retenue, ce que Bezout explicite de la façon suivante pour les unités :

> « si la somme surpasse neuf, elle renfermera des dixaines ; n'écrivez au dessous que l'excédant du nombre de dixaines : comptez ces dixaines pour autant d'unités et ajoutez-les avec les nombres de la colonne suivante ». Bezout (p. 10)

Le rapport de dix clairement évoqué entre les différents ordres chez Bezout dans la numération écrite chiffrée se retrouve mis en avant dans le discours qui accompagne le procédé décrit à partir des exemples donnés ; Reynaud justifie la technique $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_+}}$ en étant plus général (sans se référer à un exemple spécifique), et en insistant davantage sur les unités de même ordre pour lesquelles il réalise des sommes partielles.

Même si Reynaud fait référence à des sommes partielles, il s'agit de sommes partielles d'unités de même ordre et non de nombres quelconques ; nous considérons par conséquent que ce n'est pas l'associativité de l'addition qui justifie le calcul des sommes partielles, mais les trois éléments technologiques correspondant aux aspects de la numération décimale, à savoir : $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{P}}$,$\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{max}}$. Le premier justifiant l'alignement des chiffres, le second légitimant la recherche de dix unités d'un ordre donné et le dernier le fait que l'on recherche uniquement l'excédant du nombre d'unités de l'ordre donné par rapport aux dizaines d'unités de cet ordre.

III.3.2 Soustraction

Pour Bezout : la soustraction est définie comme « l'opération par laquelle on retranche un nombre d'un autre nombre ».

Pour Reynaud :

> « La soustraction a pour but, connaissant la somme de deux nombres et l'un de ses nombres, de déterminer l'autre nombre, nommé RESTE ou DIFFERENCE. La différence entre deux nombres, ajoutée au plus petit de ces nombres, doit donc donner le plus grand.»

La définition de Reynaud se rapproche davantage de la définition mathématique de la soustraction, construite à partir de celle de l'addition. Elle lui permet aussi de considérer deux façons de calculer la différence : soit en retranchant toutes les unités du nombre le plus petit au nombre le plus grand, soit en cherchant le nombre d'unités à ajouter au nombre le plus petit pour trouver le plus grand. Cette deuxième considération, qui correspond à « l'addition à trous » n'est pas évoquée par Bezout, la définition qu'il donne de la soustraction ne le permettant pas. La description d'une technique de calcul de la soustraction à partir d'une addition à trou ($\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_-\_add\_trou}}$) n'est pas évoquée dans les deux traités.

Comme pour l'addition, Reynaud évoque des soustractions partielles selon l'ordre des unités considérées : il est d'ailleurs intéressant de remarquer que dans les cas « simples » (sans retenue), il commence par traiter les unités des ordres supérieurs en premier (par exemple pour soustraire 45 de 87, il explique soustraire d'abord 4 dizaines de 8 dizaines, puis ensuite 5 unités de 7 unités). L'auteur précise à la fin du paragraphe relatif à la soustraction que le domaine de validité d'une telle technique, chiffre à chiffre, est très limité ; ce qui implique que nous ne retenions pas cette technique dans la liste de celles permettant de calculer une différence.

<u>Description de la technique :</u>

Pour Bezout comme pour Reynaud, la technique qu'ils proposent pour effectuer une soustraction est celle par « emprunt », terme employé par les deux auteurs et définie par Bezout de la façon suivante :

> « lorsque le chiffre inférieur se trouvera plus grand que le chiffre supérieur correspondant , on ajoutera à celui-ci dix unités qu'on aura pris en empruntant, par la pensée, une unité sur son voisin de gauche, lequel doit, par cette raison être regardé comme moindre d'une unité dans l'opération suivante. » Bezout (p.12).

Comme pour l'addition, la technique décrite ici ne s'appuie que sur des éléments technologiques issus de la numération, en particulier par la possibilité de convertir une unité donnée en 10 unités de l'ordre immédiatement inférieur ; nous la nommons $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_-\_emprunt}}$[8]. C'est l'aspect décimal $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$ qui assure la validité de ce procédé. Par ailleurs, l'aspect $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{P}}$ justifie, comme pour l'addition, le fait d'aligner les chiffres à partir de la droite.

<u>Les cas « embarrassants »[9] :</u> ce sont les cas des nombres où l'emprunt doit se faire sur un zéro. Dans ces cas, les explications s'appuient d'abord sur des exemples et se justifient en faisant référence aux unités de numération : Reynaud réécrit le premier terme en le décomposant avec les unités de numération (Figure 1) et justifie cette décomposition par des conversions d'unités d'ordres successifs : un mille vaut 10 centaines.

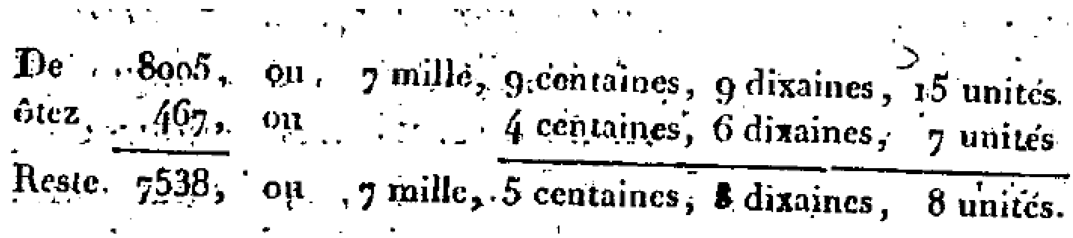

De 8005, ou 7 mille, 9 centaines, 9 dixaines, 15 unités.
ôtez 467, ou 4 centaines, 6 dixaines, 7 unités
Reste. 7538, ou 7 mille, 5 centaines, 3 dixaines, 8 unités.

Figure 1 - Extrait de Reynaud (p. 8) : cas embarrassant pour la soustraction

[8] Nous retenons le terme d' « emprunt » pour qualifier cette technique, « qui consiste, quand le chiffre supérieur est plus petit que le chiffre inférieur, à « prendre » une unité d'ordre supérieur pour pouvoir ainsi effectuer la soustraction ». (Argaud & Colenson 1997)

[9] Le terme est issu de Reynaud (p.8) qui aborde un exemple où l'emprunt doit se faire sur un zéro en écrivant : « il est un cas qui pourrait encore embarrasser, c'est celui où le chiffre sur lequel on devrait emprunter serait un zéro ».

Le traitement de tels cas chez Bezout met en jeu d'autres ostensifs que chez Reynaud puisque l'emprunt est symbolisé en barrant des chiffres (Figure 2). A la différence de Reynaud, il ne procède pas à des conversions ordre par ordre, mais retranche directement 10 unités au millier emprunté.

	99	
Si de................	20064	
on veut retrancher.......	17489	
	2575	reste.

On dira d'abord : 9 ôté de 4, ou plutôt de 14 (en empruntant sur le chiffre suivant), il reste 5. Puis, pour ôter 8 de 5, comme cela ne se peut, et qu'il n'est pas possible non plus d'emprunter sur le chiffre suivant qui est un zéro, on empruntera sur le 2 une unité, laquelle vaut mille à l'égard du chiffre sur lequel on opère. De ce mille, on ne prendra que dix unités qu'on ajoutera à 5, et on dira : 8 ôté de 15, il reste 7.

Comme on n'a employé que dix unités sur mille qu'on a empruntées, on emploiera les 990 restantes, pour en retrancher les nombres qui répondent au-dessous des zéros; ce qui revient au même que de compter chaque zéro comme s'il valait 9. Ainsi l'on dira : 4 ôtez de 9, reste 5; puis 7 ôté de 9, reste 2; et enfin 1 ôté de 1, il ne reste rien.

Figure 2 - Extrait de Bezout : cas « embarrassant » pour la soustraction

Le discours employé par Bezout (Figure 2) montre bien la volonté d'asseoir la technique sur des éléments technologiques relevant de la numération (Θ_P et Θ_D) ; si la technique employée est identique chez les deux auteurs ($\tau_{CP\_-\_emprunt}$), ils n'emploient pas les mêmes ostensifs pour représenter les nombres (utilisation des unités de numération chez Reynaud) ou pour symboliser les étapes de la technique (chiffres barrés chez Bezout). Si les deux auteurs veillent à ce que le discours sur la technique permette de la justifier, le niveau de justification diminue progressivement, au fur et à mesure de la description des étapes, comme en témoigne la fin de l'explication de Bezout (Figure 2) : « ce qui revient de même que de compter chaque zéro comme s'il valait 9 ».

Bezout et Reynaud ne décrivent que la technique $\tau_{CP\_-\_emprunt}$ pour calculer une soustraction, et la justifient en se référant aux propriétés de la numération ; nous reviendrons dans le chapitre 3 sur cette technique pour la comparer avec celles existantes actuellement en France.

III.3.3 Multiplication

Pour Bezout :

> « Multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le premier de ces deux nombres autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre. Multiplier 4 par 3, c'est prendre trois fois le nombre 4. » Bezout (p.16)

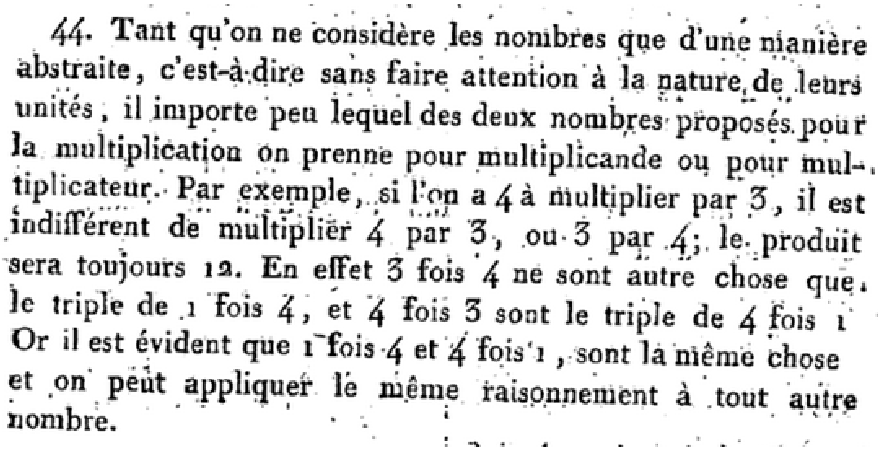
Pour Reynaud :

> « Le but de la MULTIPLICATION est de calculer un nombre nommé PRODUIT, qui soit composé avec un nombre connu, nommé MULTIPLICANDE, de la même manière qu'un nombre donné, nommé MULTIPLICATEUR, est composé avec l'unité ». Reynaud (p.10)

Ainsi, pour chacun des deux auteurs, dans la multiplication de 4 par 3, le multiplicateur 3 étant composé de 3 unités, le produit est composé de trois fois le multiplicande 4, c'est à dire 4 + 4 + 4. On ajoute alors le multiplicande autant de fois que le multiplicateur a d'unités. Bezout donne ensuite une raison d'être de la multiplication sur l'ensemble des entiers naturels après avoir montré le caractère fastidieux de l'addition réitérée :

> « ce que nous appelons multiplication est la méthode de parvenir à un même résultat par une voie plus courte ». Bezout (p. 17)

La définition de la multiplication comme addition itérée demande la justification de la commutativité de l'opération : multiplier a par b, revient à calculer a + a + a ...+ a (b fois) alors que multiplier b par revient à calculer b + b + b ...+ b (a fois). Bezout justifie la commutativité à partir d'un exemple générique (Figure 3) :



44. Tant qu'on ne considère les nombres que d'une manière abstraite, c'est-à-dire sans faire attention à la nature de leurs unités, il importe peu lequel des deux nombres proposés pour la multiplication on prenne pour multiplicande ou pour multiplicateur. Par exemple, si l'on a 4 à multiplier par 3, il est indifférent de multiplier 4 par 3, ou 3 par 4; le produit sera toujours 12. En effet 3 fois 4 ne sont autre chose que le triple de 1 fois 4, et 4 fois 3 sont le triple de 4 fois 1 Or il est évident que 1 fois 4 et 4 fois 1, sont la même chose et on peut appliquer le même raisonnement à tout autre nombre.

Figure 3 - Extrait de Bezout (p. 17) : commutativité de la multiplication

Reynaud quant à lui part de la table de Pythagore pour constater que le produit de deux nombres à un chiffre est identique quelque soit l'ordre dans lequel on considère les facteurs ; il généralise ensuite ce constat de la façon suivante :

> « pour former le produit d'un nombre par un autre, il suffit de multiplier successivement chaque unité du premier nombre par le second, ce qui donne le second nombre répété autant de fois qu'il y a d'unités dans le premier c'est-à-dire, le second nombre multiplié par le premier » (Reynaud, p. 11).

Reynaud explicite alors l'élément technologique $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{comm\_x}}$ sans parler de commutativité, à partir d'un exemple généralisé ; en revanche, aucune référence n'est faite aux propriétés d'associativité ($\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{ass\_x}}$) ou de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ($\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{dist}}$) chez les deux auteurs.

<u>Description de la technique :</u>

<u>- Multiplication d'un nombre par un nombre à un chiffre :</u>

Bezout décrit la technique opératoire de la multiplication $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_x}}$ en se plaçant dans un problème de conversion d'unités de mesure de grandeurs (des toises en pieds) et explique que le produit de 2864 par 6 « renfermera » 6 fois 4 unités, 6 fois 6 dizaines, 6 fois 8 centaines et 6 fois 2 milliers. Le calcul du produit et son écriture au fur et à mesure en commençant par le chiffre des unités à droite, se justifie avec $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{P}}$ et avec $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{max}}$ pour la prise en compte et la gestion des produits partiels dépassant 10.

Reynaud décrit une technique identique, mais en expliquant (p.12) que pour calculer le produit de 567 par 4, on pourrait aussi faire une addition itérée qui consisterait à prendre 4 fois 7 unités, 4 fois 6 dizaines et 4 fois 5 centaines. Le retour à l'addition itérée permet de ne pas appeler la propriété de distributivité $\mathbf{\Theta_{dist}}$ de la multiplication par rapport à l'addition ; par la suite, comme 4 fois 7 unités font 28 unités, on « pose 8 et on retient 2 », puis on procède de même par la suite.

Par conséquent, même si cela est plus transparent chez Reynaud, nous considérons que pour les deux auteurs, la justification de $\boldsymbol{\tau_{CP\_\times}}$ pour un multiplicateur à un chiffre ne repose que sur les propriétés de la numération et non sur $\mathbf{\Theta_{dist}}$; en se référant à la multiplication comme addition itérée, l'élément $\mathbf{\Theta_{dist}}$ n'est pas nécessaire à la justification de la technique.

<u>- Multiplication d'un nombre par un nombre à plusieurs chiffres :</u>

Pour multiplier deux nombres de plusieurs chiffres, Bezout explique la position de l'écriture des différents produits partiels par un alignement selon les unités de même ordre (par exemple, le deuxième produit étant un nombre de dizaines, le premier chiffre de ce produit devra être écrit sous le chiffre des dizaines du premier produit). Il illustre son propos avec l'exemple de la Figure 4 et justifie cette technique en expliquant que pour calculer 6 958 fois 65 487, « on a pris 65 847, 8 fois par la première opération, 50 fois par la seconde, 900 fois par la troisième et 6000 fois par la quatrième ». La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ($\mathbf{\Theta_{dist}}$) semble donc être utilisée implicitement pour justifier la technique ; le raisonnement qu'il mène peut alors être décrit par les calculs suivants :

$65\,487 \times 6\,958 = 65\,487 \times (8 + 50 + 900 + 6000)$ en décomposant 6 958 sous une forme additive canonique ;

$= 65\,487 \times 8 + 65\,487 \times 50 + 65\,487 \times 900 + 65\,487 \times 6\,000$ justifié par $\mathbf{\Theta_{dist}}$

L'explication sur cet exemple se fait à partir de la décomposition additive canonique de 6 958, alors que la technique générale est explicitée avec des unités de numérations et semble plus en cohérence avec la disposition et les écritures de la Figure 4. Sur cette dernière, les produits partiels sont décalés vers la gauche, mais il ne figure ni point, ni zéro ; ils correspondent à des nombres d'unités de chacun des ordres successifs et non à des nombres d'unités simples, comme on peut les obtenir après une décomposition additive d'un des facteurs. Par exemple, l'écriture et la position de 327 435 signifient 327 435 dizaines (qui correspondent au produit de 65 487 par 5 dizaines) alors 3 274 350 (qui correspond au produit de 65 487 par 50) correspond à un nombre d'unités simples.

On propose de multiplier 65487
par........................ 6958

523896
327435
589383
392922
455658546 produit.

Figure 4 - Extrait de Bezout (p. 22) : multiplication posée

La technique et sa justification sont identiques chez Reynaud ; aucune référence explicite n'est faite à l'élément $\mathbf{\Theta_{dist}}$. L'écriture des produits partiels diffère néanmoins de celle de Bezout (Figure 5) et est cohérente avec l'explication donnée, qui repose sur des décompositions additives et conduit à des nombres d'unités simples : 170 010 est le produit partiel de 567 par 30.

			5	6	7	Multiplicande
			2	3	4	Multiplicateur
		2	2	6	8	1er produit partiel de 567 par 4
	1	7	0	1	0	2^{e} produit partiel de 567 par 30
1	1	3	4	0	0	3^{e} produit partiel de 567 par 200
1	3	2	6	7	8	Somme des produits partiels, ou produit total de 567 par 234

Figure 5 - Extrait de Reynaud (p.11) : multiplication posée

Bezout et Reynaud abordent aussi les cas particuliers du calcul du produit de nombres multiples d'une puissance dix ; ils expliquent qu'il faut procéder comme s'il n'y avait pas de zéros et les ajouter à la fin. Si cette technique ($\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{multPD}}$) n'est pas justifiée chez Bezout dans le cas général, Reynaud mène le raisonnement suivant (p. 13) pour la produire : quand on multiplie 2 500 par 30, le multiplicande est 25 centaines, donc si on multiplie 25, on sous-entend que le produit est en centaines. Comme on multiplie par 30, soit trois dizaines, le produit sera donc des dizaines de centaines, soit des milliers : on placera alors trois zéros à la fin de l'écriture chiffrée du nombre. Reynaud alterne donc, dans son discours, deux ostensifs de la numération : l'écriture en unités de numération est employée dans les justifications et l'écriture chiffrée intervient pour produire le résultat et permettre de dégager une règle plus générale. $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{multPD}}$ explicitée à partir d'un exemple générique ne repose alors que sur deux technologies de la numération : $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{P}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$.

Pour conclure, Bezout et Reynaud justifient $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_\times}}$ en s'appuyant sur les aspects de la numération et appellent implicitement les propriétés de la multiplication en particulier $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{dist}}$ (sans la nommer explicitement) pour justifier que le produit s'obtient à partir de la somme des produits partiels ; $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{P}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$ sont par conséquent mobilisés pour justifier en partie la technique et l'écriture des produits partiels.

Enfin, si Bezout n'aborde pas les multiples ou les diviseurs dans le premier chapitre de son traité, Reynaud conclut la section relative à la multiplication en définissant les multiples d'un nombre comme « les divers produits de ce nombre par 2, 3, 4, etc. » (p.14) ; il donne donc une définition qui permet plutôt de décrire les multiples d'un nombre que de les caractériser (à la différence de la définition mathématique que nous avons rappelée dans la partie II).

Différentes questions apparaissent alors en perspective de l'étude des praxéologies à enseigner et enseignées actuellement : la technique $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_\times}}$ est-elle encore celle actuellement enseignée ? Les deux auteurs ne se réfèrent pas à $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{dist}}$ de façon explicite ; est-ce toujours le cas actuellement ? Comment la technique $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{multPD}}$ est-elle enseignée ? Plus globalement, la variété des ostensifs de la numération utilisés (unités de numération - écriture chiffrée - décomposition additive canonique) pour justifier ces techniques est-elle encore actuellement présente ?

III.3.4 Division euclidienne

<u>Pour Bezout :</u> « Diviser un nombre par un autre, c'est en général, chercher combien de fois le premier de ces deux nombres contient le second ». (p. 28) Il précise ensuite que : « on n'a pas toujours pour but dans la division de savoir combien de fois un nombre en contient un autre ; mais, on fait l'opération, dans tous les cas, comme si elle tendait à ce but ». Cette remarque lui permet, lors des différentes étapes de calcul de la division, de chercher dans chacun des dividendes partiels, combien de fois il contient le diviseur.

Même si les fractions ne sont pas encore définies dans le traité, le quotient est donné sous la forme d'une partie entière et d'une fraction rationnelle inférieure à 1, comme le montre la Figure 6 ci-dessous.

dividende	8769	7 diviseur
	7	$1252\ \frac{5}{7}$ quotient
	17	
	14	
	36	
	35	
	19	
	14	
	5	

Figure 6 - Extrait de Bezout (p. 30) : exemple de division posée

<u>Pour Reynaud :</u> « la DIVISION a pour but, connaissant un produit de deux facteurs, nommé DIVIDENDE, et un de ses facteurs appelé DIVISEUR, de trouver l'autre facteur nommé QUOTIENT. » La définition de Reynaud de la division comme opération inverse de la multiplication est à rapprocher de celle qu'il donne de la soustraction, comme opération inverse de la somme et rejoint par conséquent **Θ_{inv}**. Cette définition a une conséquence importante, puisque cela signifie que les restes des divisions sont nuls : on cherche un quotient à partir d'un produit donné.

Multiplication ou formation d'un produit.	*Division ou décomposition d'un produit.*		
567 multiplicande.	Dividende	132 678	567 diviseur.
234 multiplicateur.		113 4	
2 268	1er reste..	19 278	2 centaines } quotiens partiels.
17 01		17 01	3 dixaines
113 4			4 unités
132 678 produit.	2e reste...	2 268	234 quotient total.
		2 268	
	3e reste...	0	

Figure 7 - Extrait de Reynaud (p. 14) : exemple illustrant la définition

C'est une différence notable avec la définition de Bezout et avec celle donnée mathématiquement ; par conséquent toutes les divisions présentes dans le premier chapitre du traité de Reynaud sont des divisions exactes. Le cas où le reste de la division n'est pas nul n'est abordé qu'au début du deuxième chapitre pour introduire les fractions :

> « quelquefois le reste n'est pas zéro ; dans ce cas, le reste exprime l'excès du dividende sur le produit du diviseur par le nombre entier obtenu au quotient ; le dividende n'est pas le produit exact du diviseur par un nombre entier, le quotient total se compose donc du nombre entier obtenu au quotient et d 'une quantité moindre que l'unité [...] La quantité qu'on ajoute aux unités du quotient étant toujours moindre que l'unité a reçu le nom de fraction.» Reynaud (p. 24 - 25).

Pour les deux auteurs, le quotient de la division est donc soit entier (dans le cas d'une division exacte), soit s'exprime sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction inférieure à l'unité. Par conséquent, la division euclidienne telle qu'elle est définie mathématiquement n'apparait dans aucun des premiers chapitres des traités consacrés, en partie, aux nombres entiers et aux quatre opérations sur ces nombres.

Si la multiplication a été mise en perspective avec l'addition réitérée dès la définition de l'opération, aucun lien n'est fait entre division et soustraction : or, pour trouver le nombre de fois qu'un nombre (le dividende) en contient un autre (le diviseur), on pourrait retrancher successivement le diviseur du dividende ; le quotient serait alors donné par le nombre de fois que l'on a soustrait le diviseur. Cette technique n'est pas évoquée. Nous soulignons cependant que, dans une édition ultérieure du traité datant de 1828, Reynaud évoque la possibilité d'utiliser cette technique pour calculer une division en faisant ainsi le lien division et soustraction ; la définition qu'il donne de la division reste inchangée.

Description de la technique de calcul posé de la division:

Si Bezout et Reynaud présentent leurs calculs avec un ostensif commun (un trait vertical séparant dividende et diviseur avec un trait horizontal sous le diviseur), les techniques opératoires qu'ils développent ne sont pas identiques. En reprenant les exemples développés par les deux auteurs (Figures 6 et 7) :

- Bezout considère le dividende comme 8 milliers 7 centaines 6 dizaines et 9 unités ; ce sont les nombres d'unités de chaque ordre qui sont successivement divisés par 7. Ainsi, l'écriture chiffrée du quotient se construit progressivement, chacun des chiffres étant déterminé de la même façon : pour déterminer le premier chiffre du quotient, il recherche « en 8 mille combien 7 » ; le reste partiel 1 « est la partie de 8 qui n'a pas été divisée et est une dixaine à l'égard du chiffre suivant ; c'est pourquoi j'abaisse ce même chiffre à côté ». (Bezout p.31) Une fois que le reste est de l'ordre des unités simples, et est inférieur au diviseur, il obtient la partie non entière du quotient en divisant ce reste par le diviseur. Bezout achève alors la description de la technique, en décrivant la façon d'écrire la partie non entière du quotient, à partir du dernier reste obtenu : « à côté du quotient [...] en écrivant le diviseur au-dessous et en séparant l'un de l'autre par un trait », les nombres rationnels n'ayant pas encore été définis.

Le discours sur la technique fait uniquement référence de façon explicite à $\boldsymbol{\Theta_D}$ pour justifier le fait d'abaisser successivement chacun des chiffres du dividende, l'élément technologique $\boldsymbol{\Theta_{div\text{-}euc}}$ (et la condition sur le reste inférieur au diviseur) apparait de façon implicite. Le chiffre placé au quotient détermine le nombre d'unités de l'ordre donné à condition que le reste soit inférieur au diviseur ; dans le contraire, à cet ordre donné, le nombre d'unités correspondant au quotient serait alors supérieur à 10, et la transformation en une écriture canonique serait alors nécessaire pour obtenir l'écriture chiffrée.

- Reynaud procède différemment ; il explique d'abord la technique en se référant à la multiplication (Figure 7) et cherche à retrouver dans la division les produits partiels de la multiplication. Il commence par déterminer l'ordre de l'unité supérieure du quotient en procédant par encadrement (132 678 étant compris entre 567 x 100 et 567 x 1 000, les unités d'ordre le plus haut seront des centaines) et effectue ensuite des produits partiels qu'il retranche successivement aux différents dividendes partiels.

A la différence de Bezout, il considère le dividende comme un nombre d'unités simples ; ainsi le premier reste partiel qu'il obtient correspond à la différence du dividende et du produit du quotient partiel (2 centaines) par le diviseur. Le reste partiel est alors 19 278 ; il n'abaisse par conséquent aucun chiffre pour poursuivre la technique « jusqu'à l'entier épuisement des chiffres du quotient [...] le reste correspondant sera zéro», en lien avec la définition qu'il donne de la division. L'écriture chiffrée du quotient est ensuite obtenue par recomposition de l'écriture canonique en unités de numération construite progressivement lors de la technique.

<u>Comparaison des deux techniques :</u>

Bezout considère le dividende comme un nombre composé d'unités d'ordre différents et effectue la division selon les différents ordres, en abaissant successivement chacun des chiffres du dividende ; Reynaud considère le dividende comme un nombre d'unités simples ; c'est pourquoi il cherche à encadrer le quotient par des multiples de 10 et détermine des restes partiels par rapport au dividende. Nous nommons ces deux techniques respectivement $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_:\_eun}}$ et $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_:\_u}}$ en référence à la structuration du dividende[10].

Si dans la technique de Bezout les restes partiels tels qu'ils apparaissent dans le calcul sont inférieurs au diviseur, il n'en est pas de même dans celle de Reynaud. Les égalités caractéristiques des divisions partielles (obtenues à partir de $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{div\_euc}}$) correspondant à chacune des techniques sont alors les suivantes:
- pour Bezout : 8 milliers = 7 × 1 millier + 1 millier
- pour Reynaud : 132 678 = 569 × 2 centaines + 19278

Dans les ostensifs utilisés dans chacune des techniques, chez Bezout, seuls les nombres des unités des différents ordres sont écrits (et il est dès lors possible de constater que le reste 1 est inférieur au diviseur 7), alors que pour Reynaud le reste 19 278 doit être comparé non pas à 569, mais à 569 × 100.

La condition sur le reste (inférieur au diviseur en lien avec $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{div\_euc}}$) reste implicite chez les deux auteurs, les technologies de la numération $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{P}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$ étant plus explicites dans le discours utilisé. Différents ostensifs de la numération apparaissent chez Reynaud (écritures en unités de numération, multiplication par des puissances de 10, écriture chiffrée), alors que le discours justifiant la technique chez Bezout comporte moins d'éléments technologiques.

Reynaud se réfère néanmoins à l'égalité caractéristique de la division euclidienne ($\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{div\text{-}euc}}$) de façon implicite lors des étapes intermédiaires du calcul et au moment de la preuve du résultat, mais sans condition sur le reste (strictement inférieur au diviseur) :

> « dans tout le cours d'une division, le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient plus le reste qui correspond à ce quotient partiel » Reynaud (p.17)

La condition sur le reste est aussi sous-jacente à travers la définition de la division de Bezout et ne se pose chez Reynaud que sur les quotients et restes partiels. Elle apparaît de façon plus explicite comme élément de contrôle : Bezout explique (p.38) que l'« on ne doit jamais mettre plus de 9 au quotient », sans quoi le quotient trouvé à l'étape précédente est faux et Reynaud précise (p.22), que si le reste est supérieur au diviseur, le chiffre placé au quotient est trop petit.

<u>Division de deux nombres multiples d'une puissance de dix</u> : Bezout (p.38) comme Reynaud (p.22) formulent une technique $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{divPD}}$:

> « lorsque le dividende et le diviseur sont terminés par des zéros sur la droite, on peut supprimer un même nombre de zéros sur la droite ; le quotient ne change pas de valeur. » Reynaud (p. 22)

Ils justifient cette technique en se référant à la définition qu'ils donnent de la division : le quotient de la division de 8 000 par 400 est le même que celui de 80 par 4 parce que 80 centaines contiennent

[10] La dénomination des techniques fait apparaitre **eun** et **u** parce que la technique demande une décomposition du dividende en unités de numérations ou en unités simples.

autant de fois 4 centaines que 80 contient de fois 4. La justification de cette technique passe donc encore une fois par des propriétés de la numération et non par des propriétés relatives à la division.

<u>Les méthodes « abrégées »</u> : les deux auteurs proposent tous deux d'abréger la technique telle qu'ils l'ont décrite initialement, notamment dans le cas de diviseurs à plusieurs chiffres : ils amènent le lecteur à ne pas passer par la liste des multiples du diviseur comme le faisait Reynaud initialement, mais plutôt à déterminer les quotients partiels à partir du nombre formé par le premier chiffre (ou les deux premiers chiffres) du dividende et du nombre formé par le premier chiffre du quotient (quitte ensuite à diminuer d'une unité le quotient partiel prévu). Les calculs des soustractions intermédiaires sont amenés aussi à disparaître. Pour ce faire, les deux auteurs vont proposer une technique qui permet de déterminer le reste des divisions partielles ; Bezout ne fait que décrire ce procédé, alors que Reynaud explique d'abord le principe sur lequel il repose avant de le présenter (Figure 8).

Pour *simplifier l'écriture des calculs*, on se dispense d'écrire les produits partiels du diviseur par les différens chiffres du quotient, et l'on effectue la soustraction à mesure qu'on multiplie chaque chiffre du diviseur par le chiffre du quotient. La méthode que nous allons indiquer est fondée sur cette propriété évidente que *diminuer le nombre dont on soustrait de plusieurs unités, revient à augmenter le nombre à soustraire de ce même nombre d'unités*. Par exemple, pour diviser 39285, par 873, on exécute ainsi le calcul :

39 285	873
4 365	45
000	

On sépare d'abord assez de chiffres sur la gauche du dividende, pour que le résultat contienne au moins une fois le diviseur, ce qui fournit le 1^er^ dividende partiel 3928 ; la division de 39 par le 1^er^ chiffre 8 du diviseur détermine le 1^er^ chiffre 4 du quotient. Pour soustraire 4 fois 873 de 3928, il suffit d'ôter successivement de 3928, les produits partiels 12, 28, 32, des chiffres 3, 7, 8, du diviseur, par le chiffre 4 obtenu au quotient, en ayant égard à l'ordre des unités de chacun de ces produits ; or, on ne peut ôter 4 fois 3, du 1^er^ chiffre 8 du dividende 3928 ; on rend la soustraction possible en *empruntant* une dixaine sur le second chiffre 2 du dividende 3928, et ajoutant cet *emprunt* aux 8 unités du dividende, on retranche 12 de 18, ce qui fournit un reste 6 qu'on écrit sous le 1^er^ chiffre 8 du dividende 3928 ; pour soustraire le second produit partiel 4 fois 7 ou 28, on pourrait observer que le chiffre 2 ayant été diminué d'une unité, dans la soustraction précédente, ne vaut plus que 1, on emprunterait 3 dixaines sur le chiffre suivant 9 du dividende, et retranchant 28 de 31, on obtiendrait le reste 3 ; mais il est plus simple d'augmenter 4 fois 7, de l'emprunt 1, et de conserver le chiffre 2 du dividende ; on emprunte 3 dixaines sur le chiffre 9, et retranchant 29 de 32, on trouve le même reste 3, qu'on écrit sous le chiffre 2 correspondant. Enfin, d'après ce dernier procédé, pour soustraire 4 fois 8, ou 32, on augmente ce produit des 3 unités empruntées sur le 9 dans la soustraction précédente, ce qui donne 35, et ôtant 35 de 39, on écrit le reste 4, sous le chiffre 9 correspondant. On est parvenu au même reste 436, que si l'on eût retranché 4 fois 873 de 3928, par la méthode ordinaire.

Figure 8 - Description de la méthode abrégée - Reynaud, p. 20 - 21

Nous observons, dans la description de cette technique, une façon d'abréger les écritures (les soustractions intermédiaires n'apparaissent plus comme des ostensifs de la technique), mais aussi les calculs ; elle mobilise explicitement la technologie $\mathbf{\Theta_{sous\text{-}diff}}$ et $\boldsymbol{\tau_{CP\_-\_emprunt}}$, qui intervient comme un autre élément technologique de cette technique.

A la différence des autres opérations, la division est traitée par deux techniques différentes selon chacun des deux auteurs et une technique abrégée est décrite ; nous pourrons alors mettre en perspective ces deux techniques avec celles enseignées actuellement lors de l'étude des praxéologies dans le chapitre 3. Nous reviendrons aussi sur la définition de la division qui est construite actuellement à l'école élémentaire ; nous avons pu constater que celle de Reynaud comme opération inverse de la division implique que le reste soit nul si le quotient est entier et celle de Bezout qui aboutit à la détermination d'un quotient sous la forme d'une partie entière et d'une fraction inférieure à l'unité, non seulement ne relève pas de notre domaine, ni du programme de l'école primaire. La différence de définition existant entre les deux auteurs et la nécessité pour Bezout d'introduire un nouveau nombre pour en calculer le résultat témoignent de difficultés inhérentes à la définition même de cette opération ; nous étudierons comment la notion de division se construit au cours de l'école élémentaire dans le chapitre suivant, à travers le calcul (posé et réfléchi) et la résolution de problèmes permettant de lui donner du sens.

Enfin, les notions de multiple et de diviseur ne sont pas du tout abordées par Bezout dans son cours sur l'arithmétique, même s'il aborde les critères de divisibilité par 2, par 5, etc. lorsqu'il étudie les fractions. Reynaud ne définit pas explicitement ce que sont les diviseurs d'un nombre, mais utilise par la suite la notion de PGCD (Reynaud, p.33) pour la réduction de fractions.

III.3.5 Preuve des opérations

Nous concluons l'étude des deux traités par les preuves des opérations ; elles nous permettent de montrer la façon dont les deux auteurs utilisent les définitions des opérations et celles qu'ils considèrent comme leur inverse ($\mathbf{\Theta_{inv}}$) pour pouvoir contrôler les résultats obtenus.

Les deux auteurs décrivent des techniques identiques de preuve pour les quatre opérations ; la preuve étant décrite par (Bezout, p.15) comme « une autre opération que l'on fait pour s'assurer de l'exactitude du résultat de la première », l'aborder en conclusion de ce paragraphe nous permet d'observer si les auteurs font apparaître d'autres liens entre les opérations que ceux évoqués jusqu'alors et d'étudier les éléments technologiques sur lesquelles les techniques de preuve reposent.

La preuve de l'addition consiste en un calcul en colonnes (comme pour l'addition posée), mais de la gauche vers la droite : en commençant par les unités supérieures, on prend en compte, unité par unité, l'écart trouvé entre cette somme partielle et celle trouvée dans le calcul initial (Figure 9). Les éléments technologiques sont les mêmes que ceux intervenant dans l'addition posée, à savoir $\mathbf{\Theta_P}$, $\mathbf{\Theta_D}$ et $\mathbf{\Theta_{max}}$.

$$\left.\begin{array}{r}989\\878\end{array}\right\}\ \textit{nombres à ajouter}$$
$$\begin{array}{rl}1867 & \textit{somme}\\110 & \textit{retenues.}\end{array}$$

Pour vérifier si 1867 est la *somme* des nombres 989, 878, on commence par la gauche, et l'on dit : la colonne des centaines en contient 9 plus 8, ou 17 ; mais la somme totale renferme 18 centaines ; la centaine de surplus provient donc d'une *retenue* de 10 dixaines, faite dans l'addition de la colonne des dixaines ; cette colonne devrait donc renfermer 16 dixaines ; mais elle n'en contient que 8 plus 7, ou 15 ; la dixaine de surplus résulte donc d'une *retenue* de 10 unités, faite dans l'addition de la colonne des unités qui doit conséquemment renfermer 17 unités, car n'étant précédée d'aucune colonne à droite, elle ne peut avoir été augmentée par aucune *retenue* ; cette colonne contient effectivement 17 unités ; de sorte que la *retenue* placée au rang des unités est zéro. La *somme* obtenue est donc exacte.

Figure 9 - Extrait de Reynaud (p. 23) - Preuve de l'addition

La preuve de la soustraction s'effectue en ajoutant la différence au nombre retranché pour retrouver le premier terme de la soustraction : ce qui rejoint la définition mathématique de la définition de la différence entre deux entiers.

Pour la multiplication et la division, Bezout (p. 44) considère qu'elles « peuvent se servir de preuve réciproquement » : dans une multiplication[11], en divisant le produit par un des facteurs, on doit obtenir comme quotient, l'autre facteur et dans une division, en multipliant le quotient par le diviseur et en ajoutant le reste, on doit trouver le dividende. Cette technique de preuve de la division, commune aux deux auteurs ne correspond pas complètement à la définition qu'ils donnent de la division et au calcul du quotient qu'ils réalisent : Bezout ne fait pas référence à la partie non entière du quotient et Reynaud évoque pour la première fois la possibilité de trouver un reste non nul. Ainsi, la référence à une division euclidienne (sans que l'expression ne soit utilisée) est sous-jacente dans les deux cas ; cependant, la condition sur le reste présente dans $\mathbf{\Theta_{div\text{-}euc}}$ n'apparaît pas ici.

III.3.6 Éléments de comparaison des techniques de calcul posé

Nous avons pu constater au fil de l'analyse que les techniques de calcul posé employées par Bezout et Reynaud étaient identiques pour l'addition, la soustraction et la multiplication, mais qu'elles différaient pour la division ; elles sont principalement justifiées par des technologies reposant sur les aspects de la numération décimale ($\mathbf{\Theta_P}$, $\mathbf{\Theta_D}$ et $\mathbf{\Theta_{max}}$) et de façon plus implicite sur celles des propriétés des opérations. Afin d'étudier plus globalement les transpositions des savoirs du premier ordre (pour la définition des opérations) et ceux du deuxième ordre (pour les écritures du nombre), nous revenons dans ce paragraphe sur les ostensifs mis en jeu à travers le discours technologique des deux auteurs, ainsi que sur les exemples choisis. Nous concluons ce paragraphe par un dernier élément de comparaison relatif à la dénotation des expressions arithmétiques.

[11] Seul Bezout décrit dans ce chapitre la « preuve par 9 » pour la multiplication.

Éléments du discours technologique

Comme nous l'avons observé dans les deux traités, les technologies associées aux techniques de calcul posé reposent explicitement sur les aspects de la numération décimale et de façon plus implicite sur les propriétés des opérations ; elles remplissent différentes fonctions (Castela & Romo-Vazquez 2011) :
- *décrire la technique* : Bezout comme Reynaud explicitent les différents gestes qui composent chacune des techniques avec des ostensifs variés : différentes écritures du nombre (unités de numération, écriture chiffrée, décomposition additive), des dispositions des opérations adaptées (traits pour indiquer le total, potence pour la division), etc. Le langage employé pour la description des techniques, comme pour l'ensemble du traité, se veut être « langage familier et simple » (Bezout, Préface, p. V), ce qui peut expliquer que certains ostensifs, présents au début de la description de la technique disparaissent progressivement pour laisser place à un langage plus simple.
- *expliquer la technique* : Reynaud montre plutôt une volonté d'asseoir le procédé décrit sur des considérations générales, alors que Bezout contextualise davantage l'explication des techniques à partir d'un exemple générique pour illustrer. Il n'est d'ailleurs pas anodin de constater que Bezout décrit d'abord le procédé de façon algorithmique, sans élément d'explication, puis justifie les étapes en faisant fonctionner les éléments technologiques sur un exemple, alors que Reynaud donne un premier exemple à partir duquel il commente les différentes étapes en se référant à des propriétés, plus ou moins explicitement, et enfin il établit une « règle générale » pour effectuer l'opération.
- *faciliter la mise en œuvre* : comme nous l'avons observé pour la division, une technique abrégée est présentée pouvant s'appuyer sur des éléments technologiques complémentaires à celles présentées initialement, pour les rendre plus efficaces. La description des techniques peut aussi faire apparaître d'autres ostensifs que ceux présents dans le discours : chiffres barrés dans la technique de soustraction par emprunt, par exemple.

L'étude de ces deux traités montre aussi la façon dont sont formulés les savoirs sur les quatre opérations : les définitions des opérations ne sont pas identiques selon les deux auteurs, en particulier pour la division. La transposition avec les savoirs du premier ordre est assez délicate à établir ici puisque les définitions mathématiques que nous avons établies sont formulées postérieurement à celles de Bezout et Reynaud. Les propriétés des opérations sont peu abordées de façon explicite : la commutativité de la multiplication est évoquée en lien avec la définition même de l'opération et les autres propriétés interviennent implicitement dans les techniques opératoires (comme $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{dist}}$, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).

La portée de la technique : question du zéro et exemples choisis

Nous faisons un constat similaire à celui effectué par Mounier (2010) pour la numération dans la présentation des techniques opératoires:

> « L'introduction de ce zéro semble chez les deux une nécessité qui gêne d'une certaine manière les deux exposés dans leur logique linéaire » Mounier (2010, p. 20)

Les nombres présentant des zéros dans leur écriture font régulièrement l'objet de précisions ou de commentaires spécifiques, renvoyant à des cas que les auteurs considèrent parfois comme embarrassants et qui pourraient être traités avec le procédé général si le zéro avait effectivement le statut de nombre à part entière. Comme ce n'est pas complètement le cas, en particulier chez Reynaud, et comme les techniques sont décrites avec des technologies de la numération, il est alors cohérent, que les opérations qui portent sur des nombres écrits avec des zéros fassent l'objet de précisions complémentaires ; nous l'avons particulièrement observé pour la soustraction, ou pour la multiplication.

Nous constatons aussi que le discours technologique évolue et ne repose plus sur les mêmes ostensifs, en particulier de la numération. La description de la technique devenant moins détaillée, les écritures des nombres ne sont plus décrites à partir des unités de numération, mais uniquement par la position des chiffres dans l'écriture. Bezout précise par exemple, que lorsque l'on multiplie par un multiplicateur dont l'écriture contient des zéros, « on avancera le produit d'autant de places sur la gauche plus une, qu'il y a de zéros qui se suivent dans le multiplicateur. » (p. 25) ; la description de la technique ne fait plus référence aux unités de numération ou aux principes décimal et de position ($\boldsymbol{\Theta_D}$ et $\boldsymbol{\Theta_p}$) qui permettent pourtant de la justifier.

Nous percevons alors, à travers une telle formulation, les dérives possibles dans l'utilisation de la technique, en particulier si ces discours ne sont plus étayés par des éléments technologiques ; cette remarque sera formulée à l'identique lorsque nous étudierons les praxéologies en vue d'analyser les productions des élèves et nous conduira à interpréter certaines erreurs par un manque d'étayage technologique des techniques.

Dénotation des expressions

Comme nous avons pu l'observer dans les extraits proposés dans le chapitre consacré à la numération et aux quatre opérations, les formulations sont, pour la plupart, formulées dans la langue naturelle. Bezout comme Reynaud n'utilisent aucun symbole opératoire (+, -, ×, :) ni le signe « égal », même quand ils définissent les opérations ou quand ils effectuent les calculs posés (on peut supposer que le trait précédent le résultat dans les additions, soustractions et multiplications posées joue le rôle d'annonciateur de résultat). Reynaud utilise tout de même le signe « × » (p. 15) à une occasion, en expliquant en note qu'il signifie « multiplié par », non pas dans la partie relative aux multiplications, mais dans celle relative aux divisions lorsqu'il cherche à encadrer le quotient (Figure 10).

> *miner*, car le dividende 132 678, étant compris entre 56700 et 567000, c'est-à-dire entre 567 × 100 et 567 × 1000 (*), le quotient est nécessairement compris entre 100 et 1000 ; les plus hautes unités du quotient sont donc des centaines.

Figure 10 - Extrait Reynaud p. 15 : Utilisation du signe ×

Ainsi aucune expression arithmétique utilisant les signes d'opération ou le signe « = » ne figure dans le premier chapitre de ces traités. Nous constatons aussi qu'aucun des deux auteurs n'évoque le calcul mental en tant que tel : si des tables sont données dans les traités, non seulement cette expression n'est pas employée mais aucune technique pour effectuer mentalement les opérations n'est donnée (mis à part pour les multiplications et les divisions par 10, 100, 1 000, etc.) qui sont liées à l'utilisation de la numération.

Pour conclure, l'analyse de ces traités donne un premier aperçu de la teneur de savoirs du second ordre relatifs aux nombres entiers et à leurs écritures ainsi qu'aux quatre opérations et aux techniques de calcul posé qui leur sont associées. Nous avons pu constater la place prépondérante occupée par les unités de numération à la fois pour expliciter l'écriture des nombres, mais aussi pour justifier et produire les techniques de calcul posé ; les principes décimal et de position de la numération écrite chiffrée ($\boldsymbol{\Theta_D}$ et $\boldsymbol{\Theta_p}$) apparaissant régulièrement de façon explicite. Les propriétés des opérations apparaissent quant à elles de façon plus implicite ; nous les décrirons spécifiquement dans la description des praxéologies dans le chapitre 3.

L'étude des deux traités a permis de montrer une première transposition des savoirs du premier ordre en savoirs du second ordre sur la numération et sur les techniques de calcul posé. La définition par les programmes du domaine que nous étudions fait état d'un autre type de calcul, le calcul réfléchi, mais aussi de ce qui relève de la résolution de problèmes et de l'écriture des expressions arithmétiques. Or, le calcul réfléchi n'est pas abordé dans les traités et les problèmes qui y sont décrits portent principalement sur l'utilisation de la règle de trois dans des situations de proportionnalité ; ce que nous n'abordons pas dans notre travail. Ainsi, pour pouvoir étudier avec un point de vue épistémologique la façon dont la transposition des savoirs de premier ordre est effectuée pour le calcul réfléchi, et prendre en compte la résolution de problèmes ainsi que la production d'expressions arithmétiques, nous menons dans la partie suivante, un travail s'appuyant conjointement sur des travaux en didactique qui apportent un point de vue épistémologique et sur une analyse de manuels d'arithmétique du XIX$^{\text{ème}}$ siècle.

IV TRAVAUX DIDACTIQUES ET ÉPISTÉMOLOGIQUES : CALCUL RÉFLÉCHI - DÉNOTATION D'EXPRESSIONS ET RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Nous nous appuyons conjointement sur des travaux en didactique des mathématiques (Butlen (2007) pour le calcul réfléchi, Drouhard (1992, 2014) et Vergnaud (1990) pour la résolution de problèmes), mais également sur l'étude de deux manuels d'arithmétique de la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle et correspondant à un niveau d'enseignement différent : celui de Bovier-Lapierre date de 1868 pour l'enseignement secondaire spécial et celui d'André & Haillecourt date de 1872 pour l'enseignement élémentaire.

Nous ne visons pas, à travers l'analyse de ces deux manuels, une étude détaillée de la prise en compte du calcul mental, de la dénotation des expressions et de la place de la résolution de problèmes à cette époque, mais uniquement un éclairage complémentaire à l'étude précédente qui permet de situer notre propos ; nous n'étudions pas à nouveau dans ces manuels l'enseignement de la numération ni les techniques de calcul posé.

IV.1 Calcul mental et calcul réfléchi

Le calcul mental a toujours figuré dans les programmes d'enseignement de l'école primaire depuis la création de l'école publique, en 1883. L'étude menée par Butlen (2007) à partir des programmes d'enseignement conduit à distinguer ce qui relève d'automatismes (les tables, des doubles, des compléments à la dizaine, etc.) de ce qu'il faut être capable de reconstruire et qui relève du calcul réfléchi. Le calcul automatisé correspond plutôt à la restitution de faits numériques (tables, compléments à la dizaine, doubles, etc.) qui ont été mémorisés alors que le calcul réfléchi insiste « davantage sur la méthode (stratégie, choix de procédures) de calcul que sur la rapidité associée au calcul rapide ». (Butlen 2007, p. 33).

Par ailleurs, à la différence des techniques de calcul posé qui s'appuient principalement sur les propriétés de la numération, celles de calcul réfléchi mobilisent non seulement ces mêmes propriétés, mais aussi celles liées aux décompositions arithmétiques des nombres et aux propriétés des opérations (associativité, commutativité, etc.). En revanche, de façon commune, la connaissance des répertoires (tables, compléments à la dizaine supérieure, etc.) apparaît comme un élément préalable à la mise en œuvre de ces différentes techniques (qu'elles soient de calcul posé ou réfléchi).

L'étude des deux manuels nous conduit à exposer les enjeux attribués au calcul mental par leurs auteurs à cette époque (avant 1883), puis à étudier les techniques proposées ainsi que le discours technologique qui les accompagne ; nous mettons alors en perspective nos observations, situées dans le contexte de l'étude de ces manuels, avec des éléments plus généraux apportés par Butlen (2007).

IV.1.1 Calculer mentalement : pour quoi faire ?

Bovier-Lapierre (1868) lorsqu'il présente l'intérêt de ce qu'il qualifie de « calcul mental » explique assez précisément la forme et les enjeux d'un tel calcul :

> « Pour expliquer l'addition et la soustraction, on a pris certains exemples où les nombres étaient assez faibles pour qu'il fût facile de connaître le résultat sans rien écrire : c'est là ce qu'on appelle *calcul mental*. Il est très important de s'y exercer ; car il serait peu convenable pour celui qui a étudié l'arithmétique, d'être sous ce rapport moins habile qu'un homme qui, sans savoir lire ni écrire, parvient cependant à connaître le prix d'une marchandise qu'il a achetée ou vendue. Il n'y a pas de règles particulières pour ce calcul ; on ne fait que suivre les règles ordinaires, en se guidant sur le bon sens pour combiner les nombres entre eux, de manière à fatiguer le moins la mémoire. » Bovier-Lapierre (1868)

Nous retrouvons dans cette description les deux fonctions, pédagogique et sociale, pouvant être attribuées au calcul mental (Butlen 2007). De leur côté, André & Haillecourt (1872) insistent davantage sur la fonction pédagogique, présentant le calcul mental comme « le calcul que l'on fait de tête, sans rien écrire » et qui peut être plus rapide que le calcul posé écrit. Dans les deux cas, c'est au sens de « calcul réfléchi » et non automatisé que les auteurs entendent le calcul mental : si les résultats des tables apparaissent dans André & Haillecourt avant la description de chacune des opérations, ils n'associent pas leur mémorisation à ce qu'ils qualifient de calcul mental.

En revanche, ils cherchent à institutionnaliser des procédures :

> « ce calcul ne se fait point comme le calcul écrit, mais il suffit de quelques exemples et d'un peu d'attention pour en comprendre le mécanisme. Nous donnerons d'ailleurs quelques règles qu'on pourra appliquer selon les cas. » André & Haillecourt (1872, p. 14)

IV.1.2 Calculer mentalement : comment ?

L'institutionnalisation des procédures de calcul mental est un enjeu crucial pour montrer le domaine d'efficacité des techniques, ces dernières dépendant fortement des nombres en jeu. C'est d'ailleurs à cause d'un manque de justification des techniques et d'un défaut d'adaptabilité des techniques que les décideurs, avant les programmes de 1970, ont souligné les dérives de l'enseignement du calcul réfléchi (Butlen 2007). L'étude des manuels nous permet alors d'étudier la façon dont les techniques de calcul réfléchi sont institutionnalisées et les technologies sur lesquelles elles reposent.

IV.1.2.i <u>Pour l'addition et la soustraction</u>

Bovier-Lapierre donne une liste d'exemples de calculs pour l'addition et la soustraction sans dégager de règle générale, comme par exemple :

> « Ajouter 58 avec 421. - On ajoute 60 à 421, ce qui donne 481, et on ôte 2. On a ainsi 479.

> Retrancher 24 de 59. - On ôte 24 de 60. Or 20 ôté de 60 donne 40 ; 4 ôté de 40 donne 36. On retranche encore 1 à 36, parce qu'on avait pris 60 au lieu de 59, et on trouve 35. » Bovier - Lapierre (1868, p.20)

Nous observons, sur ces premiers exemples, ce que pointe Butlen (2007) : les techniques ne sont pas justifiées et il n'y a pas d'alternative proposée à la technique qui est décrite, alors que l'on pourrait pour le premier calcul, de façon tout aussi efficace, ajouter 420 à 50, puis ajouter 1, puis 8 et pour le second calcul, procéder chiffre par chiffre ou retrancher 20, puis retrancher 4.

André & Haillecourt présentent différemment les techniques de calcul mental en donnant des règles, qu'ils illustrent avec des exemples. Pour l'addition, ils formulent trois règles :

> « 1°. On ajoute au premier nombre les plus hautes unités du second et ensuite les unités des ordres inférieurs. [...]
>
> 2°. On change, s'il y a avantage, l'ordre des nombres à ajouter [...]
>
> 3°. On ramène un ou plusieurs nombres donnés à exprimer des dizaines ou des centaines. » André & Haillecourt (1872, p.14)

Ils sont néanmoins conscients que ces règles ne sont pas les seules et concluent sur l'impossibilité d'en donner une liste exhaustive et sur la nécessité de les adapter selon les nombres en jeu : « la pratique et la réflexion font trouver une foule d'autres simplifications ingénieuses qui permettent d'additionner de tête très rapidement ».

Pour la soustraction, ils listent six règles de calcul mental différentes, qu'ils illustrent successivement avec des exemples adaptés :

> « 1°. La différence de deux nombres ne change pas lorsqu'on les augmente ou les diminue tous les deux d'un même nombre. [...]
>
> 2°. Lorsqu'on augmente le plus grand nombre d'une certaine quantité, la différence augmente d'autant. [...]
>
> 3°. Lorsqu'on diminue le plus grand nombre d'une certaine quantité, la différence diminue d'autant. [...]
>
> 4°. Lorsqu'on augmente le plus petit nombre d'une certaine quantité, la différence diminue d'autant. [...]
>
> 5°. Lorsqu'on diminue le plus petit nombre d'une certaine quantité, la différence augmente d'autant. [...]
>
> 6°. On décompose le plus petit nombre en plusieurs parties et on les retranche successivement. » André & Haillecourt (1872, p. 19)

Nous observons une différence de statut entre les cinq premières règles, s'apparentant davantage à un énoncé de propriétés relatives à la soustraction, et la sixième, portant sur la réécriture d'un nombre et mettant ensuite en jeu un procédé de calcul. Nous retrouvons ici les éléments technologiques que nous avions listés dans le paragraphe relatif aux propriétés mathématiques de la soustraction : la règle 1 correspond à $\boldsymbol{\Theta}_{\text{écart}}$, la règle 4, comme la 6, peuvent s'apparenter à $\boldsymbol{\Theta}_{\text{sous-somme}}$ et la 5 à $\boldsymbol{\Theta}_{\text{sous-diff}}$ et les règles 2 et 3 sont associées à $\boldsymbol{\Theta}_{\text{sous-terme-diff}}$ et à $\boldsymbol{\Theta}_{\text{sous-terme-somme}}$. Ces différents éléments technologiques s'apparentent alors à autant de techniques de calcul réfléchi.

André & Haillecourt spécifient des techniques de calcul réfléchi à travers l'énoncé de règles qu'ils ne justifient pas, même à travers les exemples qu'ils proposent ; la différence est d'autant plus marquée par rapport à ce que propose Bovier-Lapierre, qui se limite à la donnée d'exemples commentés.

IV.1.2.ii Pour la multiplication

À la différence de ce qu'il écrit pour les additions et les soustractions, Bovier-Lapierre énonce cette fois des règles plus générales pour calculer mentalement des produits, mais sans les exemplifier :

> « Multiplier un nombre par 20, 30, 40... - On multiplie ce nombre par 2, 3, 4... et on met un zéro à droite. [...]
> Multiplier un nombre par 12 - On le multiplie d'abord par 3, puis par 4. [...]
> Multiplier un nombre par 19 - On le multiplie par 10, et on ajoute au résultat 9 fois ce nombre. » Bovier-Lapierre (1868, p. 33).

André & Haillecourt, dans le paragraphe réservé au calcul mental pour la multiplication, commencent par lister certains résultats qu'il est bon d'avoir automatisés, en particulier les produits ayant pour facteurs 20 et 50, puis certains produits avec 75, 125, etc. Ils listent ensuite, comme pour la soustraction, des « remarques » (p. 29) qui s'apparentent tour à tour à des techniques de calcul ou à des propriétés des opérations :

> « 1. Pour multiplier une somme par un nombre, il suffit d'en multiplier les parties et d'ajouter les produits. [...]
> 2. Pour multiplier un nombre par une somme, il suffit de le multiplier par chaque partie de la somme et d'ajouter les produits obtenus. [...]
> 3. Pour multiplier la différence de deux nombres par un troisième, on les multiplie par ce troisième et on retranche les produits. [...]
> 4. On peut intervertir l'ordre des facteurs. [...]
> 5. On peut prendre le double de l'un des facteurs et la moitié de l'autre. [...]
> 6. Il arrive souvent qu'il faut trouver la somme de plusieurs produits ayant un même multiplicateur ; il suffit d'ajouter les multiplicandes. » André & Haillecourt (1872, p. 29)

Encore une fois, André & Haillecourt cherchent à dégager des règles générales alors que Bovier-Lapierre les contextualise dans des exemples ; nous retrouvons dans les deux manuels des références aux éléments technologiques correspondant aux propriétés de la multiplication à savoir $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{ass\_\times}}$, $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{comm\_\times}}$, et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{dist}}$. La référence à ces propriétés reste très implicite chez Bovier-Lapierre puisque seule la technique est énoncée, alors qu'André & Haillecourt font référence à la propriété avant de la mobiliser sur un exemple.

IV.1.2.iii Pour la division

Bovier-Lapierre (p. 43) commence par énoncer une propriété liée à la transformation du quotient quand on multiplie ou quand on divise le dividende et - ou le diviseur par un nombre donné ; ce qui rejoint $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{div\text{-}prod}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{div\text{-}par\text{-}quot}}$. Il évoque aussi la division d'un nombre par un produit de deux facteurs qui correspond à $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{div\text{-}par\text{-}prod}}$ et fait ensuite référence (p. 45) à ces propriétés pour justifier les techniques qu'il énonce pour diviser par 5 (diviser par 10, puis multiplier par 2), par 25 (diviser par 100, puis multiplier par 4), par 12 (diviser par 4, puis diviser par 3), etc. André & Haillecourt reprennent ces mêmes propriétés et ajoutent (p. 39) celle relative à la division d'une somme ($\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{div\text{-}somme\text{-}diff}}$).

IV.1.2.iv Conclusion

Pour l'addition et la soustraction, les éléments technologiques qui sous-tendent les techniques ne sont pas décrits, ce qui permet difficilement de pouvoir mesurer leur étendue et leur domaine d'efficacité. Pour les autres opérations, les technologies s'apparentent à la formulation de propriétés accompagnées d'exemples mis en œuvre à partir des propriétés correspondantes, mais sans que le choix d'une technique plutôt qu'une autre sur l'exemple donné ne soit explicité. Or, comme plusieurs techniques apparaissent comme possibles pour réaliser un calcul réfléchi, il est nécessaire de mettre à disposition de l'élève des éléments qui permettent d'orienter son choix vers une technique plutôt qu'une autre ; la fonction de la technologie pour évaluer une technique (Castela & Romo-Vazquez 2011) apparaissant ici comme essentielle.

Le constat que nous faisons sur la comparaison de ces extraits de manuels rejoint celui fait par Butlen (2007) sur la difficulté d'institutionnaliser en calcul réfléchi. Nous soulignons enfin que dans les deux manuels le calcul réfléchi est associé à du calcul exact et dans aucun cas à du calcul approché ; si on réfère à la synthèse menée par Butlen (Ibid) sur les programmes scolaires, le calcul approché n'apparaît que tardivement dans les instructions officielles, ce qui peut expliquer ce constat.

Nous avons fait apparaitre les éléments technologiques reposant sur les propriétés arithmétiques des opérations, en lien avec les exemples proposés dans les manuels et constatons que les techniques sont variées et reposent sur des technologies différentes. Nous les reprendrons et les classifierons au regard des différentes technologies (compléments à la dizaine, utilisation d'un nombre entier d'unités d'un ordre donné, etc.), en étudiant celles qui figurent dans les programmes de l'école, lorsque nous décrirons les praxéologies de calcul réfléchi dans le chapitre 3.

Nous l'avions déjà souligné chez Bezout et Reynaud, mais nous constatons aussi que les écritures arithmétiques (utilisant les symboles opératoires ou mobilisant le signe égal) sont peu présentes dans ces deux manuels. Les auteurs privilégient le langage naturel pour expliciter les raisonnements qu'ils mettent en jeu dans le calcul mental (on pourra se référer aux extraits précédents) ; ce qui peut se comprendre aisément, puisqu'ils définissent ce type de calcul comme oral - non écrit - et par conséquent, ils expliquent les techniques comme ils pourraient le faire oralement.

Or, nous avons pu constater lors de la définition du domaine relativement aux programmes (partie I) que dès le CP, les élèves étaient amenés à utiliser un certain formalisme (avec l'usage des signes opératoires et du signe égal), l'usage des parenthèses apparaissant au programme de 6ème. Si le calcul réfléchi est un support pertinent pour familiariser les élèves avec l'usage des parenthèses lors de la traduction des opérations mentales effectuées, comme le précisent les programmes de 1980 (Butlen 2007), il est plus généralement un support intéressant pour produire des expressions arithmétiques. Il nous semble alors complémentaire d'étudier la façon dont les ostensifs tels que les signes des opérations (+, -, ×, :) et le signe égal apparaissent dans ces deux manuels ; ce qui nous conduit à soulever, de façon plus globale, la question de la dénotation des expressions arithmétiques.

IV.2 Écritures des expressions et des relations arithmétiques

Nous qualifions d'*expression arithmétique* une écriture mettant en jeu les signes des opérations (+, -, ×, :) et de *relation arithmétique* une égalité entre deux expressions arithmétiques ; égalité obtenue à la suite de la réécriture d'une des deux expressions. Pour faire suite à l'étude menée sur les manuels en calcul réfléchi, nous commençons par montrer comment les auteurs des deux manuels présentent et utilisent les signes opératoires (+, -, ×, :), puis nous abordons la question du signe « égal », de ces différents statuts et de son usage, à travers la dénotation des expressions arithmétiques et enfin nous concluons sur les ostensifs apparaissant dans l'écriture d'expressions ou de relations arithmétiques.

IV.2.1 Les symboles opératoires

Dans les deux manuels d'arithmétique, chacun des symboles opératoires est présenté après la définition de l'opération donnée et apparaît comme un signe permettant la traduction de ce qui s'énonce en langage naturel dans un langage mathématique : le mot « plus » se traduisant par « + », « moins » par « - », et « divisé par » par « : » (Figures 11 et 12).

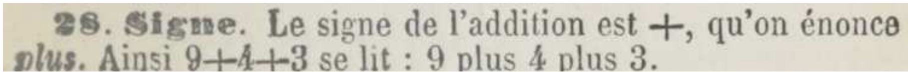
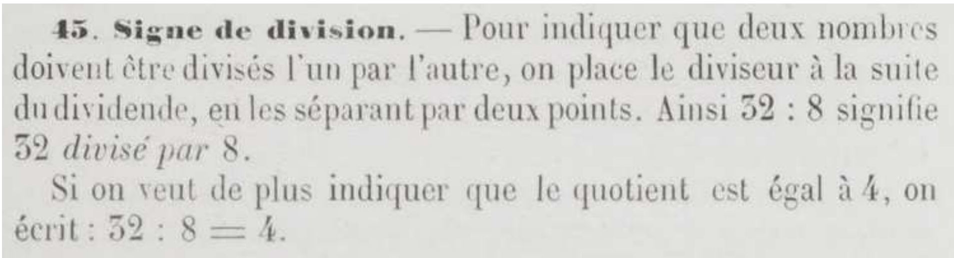

28. Signe. Le signe de l'addition est +, qu'on énonce *plus.* Ainsi 9+4+3 se lit : 9 plus 4 plus 3.

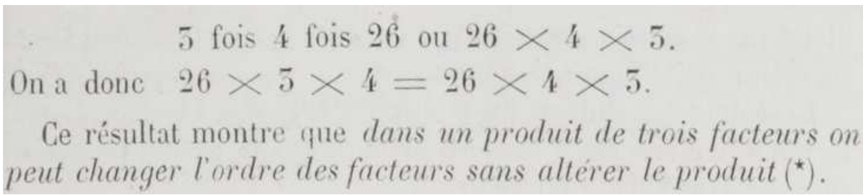
Figure 11 - Extrait de André & Haillecourt (1872, p. 9) pour présenter le signe de l'addition


45. Signe de division. — Pour indiquer que deux nombres doivent être divisés l'un par l'autre, on place le diviseur à la suite du dividende, en les séparant par deux points. Ainsi 32 : 8 signifie 32 *divisé par* 8.

Si on veut de plus indiquer que le quotient est égal à 4, on écrit : 32 : 8 = 4.

Figure 12 - Extrait de Bovier-Lapierre (1868, p. 37) pour présenter le signe de la division et l'utilisation du signe =

La présentation du symbole « × » est plus complexe : dans les deux ouvrages, il est expliqué que le signe de la multiplication est « × »[12] et qu'il se lit « multiplié par » (5 × 4 se lit 5 multiplié par 4). Mais, en plus de l'expression « multiplié par », le terme « fois » est aussi utilisé pour désigner une multiplication : « 4 fois 5 » correspond à 5 + 5 + 5 + 5, donc à 5 multiplié par 4, et s'écrit par conséquent 5 × 4 et de la même façon : « 5 fois 4 » correspond à 4 + 4 + 4 +4 + 4, donc à 4 multiplié par 5 soit 4 × 5 Le symbole « × » ne se lit donc pas « fois » (Figure 13).


5 fois 4 fois 26 ou 26 × 4 × 5.

On a donc 26 × 5 × 4 = 26 × 4 × 5.

Ce résultat montre que *dans un produit de trois facteurs on peut changer l'ordre des facteurs sans altérer le produit* (*).

Figure 13 - Extrait de Bovier-Lapierre (1868, p. 31) - signification du mot *fois* et utilisation du signe =

Les signes représentant les opérations semblent alors introduits comme des traductions des mots utilisés dans le langage naturel, avec un aspect algorithmique, comme en témoigne l'extrait précédent de Bovier-Lapierre (Figure 12). L'utilisation du signe égal que l'on aperçoit dans les deux extraits précédents (Figures 12 et 13) peut être considérée comme une traduction de « égal » et annoncer le résultat d'une opération, ici une division, (Figure 12), mais il traduit aussi une relation d'équivalence correspondant au fait que deux expressions arithmétiques donnent un même résultat (Figure 13 : réécriture d'une expression illustrant la commutativité de la multiplication). Ces deux constats nous conduisent à investiguer plus largement la dénotation des expressions arithmétiques en lien avec les différents statuts du signe égal.

[12] Bovier-Lapierre précise que le symbole x peut être parfois remplacé par . (p. 24)

IV.2.2 Dénotation d’expressions arithmétiques et statut du signe égal

Les différentes transformations apportées à une expression arithmétique relèvent du calcul et conduisent à l’écriture de relations arithmétiques. Pour mieux comprendre ce qu’impliquent les différents statuts du signe égal dans leur utilisation, nous revenons d’abord sur la distinction entre sens et dénotation et illustrons ces considérations théoriques par des extraits issus des deux manuels.

IV.2.2.i Sens et dénotation des expressions arithmétiques

Drouhard (1992), en s’appuyant sur les travaux de Frege, définit la dénotation (*Bedeutung*) d’une expression comme « son référent dans un univers donné » et le sens (*sinn*) comme « la manière dont le référent est présenté, le « point de vue » que l’on adopte pour le décrire » (Drouhard 1992, p.265). Il précise (2014, p.12/19) que la « dénotation des expressions arithmétiques est une fonction qui, à chaque écriture arithmétique telle que « 3 + 2 », associe un nombre réel (ici 5) ». Ainsi, les expressions arithmétiques « 4 + 4 » et « 10 - 2 » ont donc la même dénotation qui est 8. En revanche, ces deux expressions ne montrent pas les mêmes propriétés du nombre 8 : 4 + 4 reflète le fait que 8 est le double de 4, alors que 10 - 2 montre 8 comme le complément à 2 de 10. Ces deux expressions, qui ont le même dénoté, n’ont pas le même sens.

Cela conduit alors à des égalités arithmétiques de deux types, qui correspondent à deux statuts différents du signe égal : « 4 + 4 = 8 » et « 4 + 4 = 10 - 2 ». Dans la première égalité, le signe égal relie l’expression arithmétique avec le nombre réel qu’elle dénote et est donc considéré comme annonce de résultat, alors que dans la seconde, il relie deux expressions arithmétiques ayant le même dénoté. Le signe égal prend donc dans ce cas, le statut de relation d’équivalence ; l’égalité étant réflexive (tout élément est égal à lui même), symétrique (a = b est équivalent à b = a pour tous nombres a et b) et transitive (si a= b et b =c alors a = c pour tous nombres a, b et c), est ainsi une relation d’équivalence.

Revenons au calcul réfléchi à partir de deux exemples qui mettent tous deux en jeu le nombre 36 : le calcul du produit de 36 par 25 et celui de la somme de 94 et 36. Nous pouvons écrire les différentes égalités correspondant aux étapes de calcul de la façon suivante :

$36 \times 25 = (4 \times 9) \times 25 = (9 \times 4) \times 25 = 9 \times (4 \times 25) = 9 \times 100 = 900$ (en utilisant $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{ass\_\times}}$, $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{comm\_\times}}$)

$94 + 36 = 94 + (30 + 6) = 94 + (6 + 30) = (94 + 6) + 30 = 100 + 30 = 130$ (en utilisant $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{ass\_+}}$, $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{comm\_+}}$)

Nous observons dans ces écritures que le signe égal prend différents statuts, en étant d’abord utilisé en tant que relation d’équivalence, puis à la fin, en tant qu’annonciateur de résultat. Les propriétés arithmétiques des opérations en jeu, en particulier l’associativité et la commutativité, justifient la réécriture des expressions ; les expressions 9 × 4 et 30 + 6 dénotent le même nombre, mais lui confèrent un sens différent. Le jeu des parenthèses permet de mettre en valeur l’usage implicite de ces propriétés et la réécriture des expressions permet de faire apparaître des propriétés différentes du nombre. Reconnaitre et produire des expressions arithmétiques égales, ayant la même dénotation, mais un sens différent apparait alors comme un élément nécessaire pour pouvoir calculer efficacement de façon réfléchie ; la connaissance des répertoires étant sous-jacente et préalable.

Les transformations opérées sur ces écritures sont assurées par les propriétés mathématiques de commutativité et d’associativité des opérations, mais au-delà de la dénotation de l’expression, c’est son sens qui est mobilisé : c’est parce que l’on est capable d’interpréter le sens attribué à l’expression que l’on comprend la portée de la technique de calcul réfléchi. Ainsi, ce n’est pas tant de savoir que 9 × 4 est égal à 36, mais plutôt de percevoir dans cette décomposition l'intérêt de faire apparaitre un facteur 4 pour ensuite calculer 4 × 25 facilement. Il en est de même pour la décomposition de 36 en 30 + 6, qui montre l'intérêt de faire apparaître le terme 6 pour ensuite calculer facilement 94 + 6. C'est en faisant apparaître ces éléments technologiques qu'il est dès lors possible d'orienter son choix vers une technique plutôt qu'une autre et de pouvoir mesurer l'étendue de la technique, ainsi que son domaine d'efficacité. Ce sont les enjeux de l'enseignement du calcul réfléchi pour qu'il soit pertinent et durable (Butlen 2007).

IV.2.2.ii Statuts du signe égal dans les manuels et utilisation des parenthèses

Bovier-Lapierre (1868, p.14) est le seul auteur étudié à présenter le signe égal dans son ouvrage (Figure 14) ; il le fait, à partir d'un exemple, en même temps qu'il présente le signe + pour l'addition et de la façon suivante :

> Si on veut de plus exprimer que cette somme est égale à 26, on met 26 à la suite, en le séparant de ce qui précède par ce signe = qui veut dire *égale*. On a de cette manière 12 + 8 + 6 = 26. On lit en disant : 12 plus 8 plus 6 égalent 26. Cette expression s'appelle une *égalité*.

Figure 14 - Extrait de Bovier-Lapierre (1868, p. 19) : signification de l'égalité

Le signe égal a donc uniquement ici le statut de signe annonciateur d'un résultat et sera finalement très peu utilisé dans cet ouvrage, si ce n'est pour présenter chacune des opérations ou, comme nous l'avons vu précédemment (Figure 13), entre le produit 26 × 3 × 4 et 26 × 4 × 3, avec le statut de relation d'équivalence.

Si André et Haillecourt (1872) n'introduisent pas de façon formelle le signe égal, ils l'emploient plus régulièrement, en particulier lorsqu'ils explicitent des raisonnements en calcul réfléchi, comme par exemple pour des calculs de produits (Figure 15).

> 1° Multiplier 84 par 3 : 84=80+4. On multiplie par 3, d'abord 80, puis 4 et on ajoute : 80×3=240, 4×3=12 ; 240+12=252.

> 2° Multiplier 75 par 244 : 244=200+40+4 ; donc 75×244=75×200 +75×40+75×4=15 000+3 000+300=18 300.

Figure 15 - Extraits André et Haillecourt (1872, p. 28)

Nous constatons que le signe d'égalité est utilisé ici, tour à tour, avec un statut d'équivalence pour communiquer une décomposition d'un nombre (84 = 80 + 4) ou pour signifier que plusieurs expressions correspondent à un même nombre (dans 2° : 75 × 244 = 75 × 200 + 75× 40 + 75 ×4) et avec un statut d'annonce de résultat (80 × 3 = 240). On retrouve ici l'intérêt du calcul réfléchi pour motiver l'utilisation d'un langage symbolique, basé sur l'écriture d'expressions arithmétiques traduisant les opérations qui ont pu être menées mentalement. L'existence des différents statuts du signe « égal » ainsi que ses propriétés en tant que relation d'équivalence (transitivité et symétrie) interviennent alors lorsque l'on veut par exemple écrire une suite d'égalités pour expliciter des raisonnements en calcul réfléchi. En revanche, nous n'avons pas trouvé un usage des parenthèses dans les écritures arithmétiques, ce qui explique l'utilisation (Figure 15 - 1°) d'égalités séparées par des points-virgules) alors que le calcul pourrait être traduit par une seule égalité à l'aide de parenthèses.

Nous percevons néanmoins chez André et Haillecourt une volonté de conserver un langage mathématique naturel et de ne pas entrer dans un symbolisme excessif ; ce qui se traduit par l'utilisation d'égalités à l'intérieur d'un raisonnement en langage naturel (Figure 16) ou encore la non utilisation d'un signe égal, même quand il serait particulièrement adapté (Figure 17) pour traduire la relation d'équivalence entre les deux expressions :

EXEMPLE. 120 à diviser par 30. $30 = 2 \times 3 \times 5$. On divise 120 par 2, le quotient est 60. On divise ensuite 60 par 3, le quotient est 20. On divise enfin 20 par 5, le quotient est 4. Par conséquent le quotient de 120 par 30 est 4.

Figure 16 - Extrait André et Haillecourt, p. 29

Ainsi, le produit précédent $26 \times 14 \times 17 \times 15$ peut s'écrire $14 \times 26 \times 17 \times 15$ ou encore, $15 \times 14 \times 26 \times 17$, etc.

Figure 17 - Extraits André et Haillecourt, p. 26

L'étude des deux manuels, ajoutée à celle des traités de Bezout et de Reynaud montre que l'entrée dans le symbolisme arithmétique a été très lente et est révélatrice d'un phénomène de transposition didactique en ce qui concerne l'évolution des ostensifs dans les expressions arithmétiques : les signes opératoires et le signe égal restent peu utilisés à la fin du XIXème siècle et les parenthèses semblent absentes (du moins dans les manuels que nous avons étudiés), les auteurs préférant conserver un langage naturel pour expliciter les techniques qu'ils emploient. Pour poursuivre l'étude de l'évolution des ostensifs, nous complétons ce premier travail par la présentation ci-dessous d'autres ostensifs, plus récents, qui peuvent intervenir dans la réécriture d'expressions arithmétiques et nous y reviendrons dans le chapitre 3 lorsque nous aborderons le calcul réfléchi.

Les quelques observations que nous avons pu faire sur les ouvrages étudiés et les conclusions plus générales faites par Butlen (2007) sur le calcul réfléchi mettent en évidence la nécessité de prendre en compte le symbolisme dans l'écriture et dans le traitement des expressions arithmétiques, en particulier dans les tâches relevant du calcul réfléchi ; il s'agit alors, dans la réécriture d'expressions arithmétiques, de prendre en compte leur dénotation et leur sens en lien avec les statuts du signe égal.

Nous avons abordé jusqu'ici trois ostensifs entrant en jeu dans ces écritures : les signes opératoires correspondants aux différentes opérations, le signe égal et les parenthèses. D'autres ostensifs peuvent apparaitre, en lien avec l'algèbre ; ils n'apparaissent pas dans les chapitres des traités ou des manuels que nous avons étudiés, mais peuvent néanmoins intervenir en fin d'école comme nous allons pouvoir l'illustrer dans le paragraphe suivant.

IV.2.3 Les ostensifs dans les expressions arithmétiques

Nous souhaitons évoquer dans ce paragraphe deux ostensifs que nous n'avons pas rencontrés jusque là ni dans les manuels, ni dans les traités mais qui sont en usage dans les manuels actuels : les flèches ou les arbres à calculs pour pouvoir représenter symboliquement les différentes transformations opérées sur une expression arithmétique et les écritures arithmétiques pré-algébriques qui mettent en jeu d'autres symboles.

IV.2.3.i <u>Flèches et arbres à calculs</u>

Les auteurs des manuels scolaires actuels utilisent d'autres ostensifs que les signes opératoires ou le signe égal pour représenter symboliquement les transformations qui opèrent sur une expression.

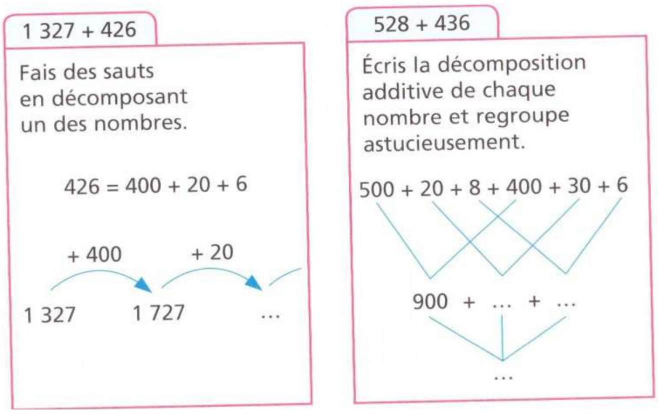


Figure 18 - Extrait de Euromaths CM1 (Peltier & al. 2009c, p. 29)

Dans la Figure 18, pour les deux exemples, chacune des techniques de calcul réfléchi s'appuie sur les décompositions additives du nombre : un seul nombre est décomposé dans le premier exemple, alors que les deux le sont dans le second et dans le premier exemple, l'égalité apparaît comme relation d'équivalence. L'usage des décompositions additives conduit à des expressions égales à celles du départ, mais avec des sens différents : la réécriture des expressions conduit à un calcul qu'il est possible de mener efficacement en s'appuyant sur les propriétés de la numération décimale.

Dans le premier exemple, les flèches symbolisent l'opération que l'on effectue, la pointe de la flèche étant dirigée vers le résultat. Dans le second exemple, les branches de l'arbre rejoignent les nombres qui sont sommés et le résultat est écrit au nœud entre deux branches. Nous n'entrons pas dans une étude sémiotique plus approfondie de ce type de représentation mais nous signalons cependant que, comme pour les parenthèses dans les expressions arithmétiques, les flèches comme les branches permettent de désigner les nombres que l'on transforme ou que l'on assemble, permettant alors de montrer implicitement la portée de la technique et les raisons de son choix.

IV.2.3.ii Écritures arithmétiques pré-algébriques

Dans les manuels de fin d'école primaire actuels figurent aussi des expressions se situant entre l'arithmétique et l'algèbre ; nous les qualifions de pré-algébriques dans le sens où elles préparent à des écritures algébriques qui seront introduites par la suite au collège et en distinguons deux types qui sont à mettre en perspective avec deux statuts de la lettre différents :

- lorsque la lettre a un statut d'inconnue : il s'agit ici traditionnellement d'équations (du type x + a = b), mais l'utilisation de la lettre avec un tel statut n'étant pas au programme de l'école, ce sont plutôt des égalités « à trous » qui sont employées dans lesquelles la lettre est remplacée par un symbole ou des pointillés : ▲ + a = b ou .... + a = b. Ce type d'égalités est utilisée à la fois pour calculer mentalement de façon automatisée (... × 5 = 45) et travailler la connaissance des tables dans les deux sens, ou pour lier addition et soustraction ou multiplication et division (▲ + 156 = 3 587).

- lorsque la lettre a un statut de variable : plus rare dans les manuels de fin d'école en France, nous donnons à titre d'exemple un item extrait de TIMSS (TIMSS 2011 Items Released 2013) dans lequel le symbole utilisé dans l'expression représente une des données de l'énoncé :

Δ stands for the number of pencils Pete had. Kim gave Pete 3 more pencils. How manypencilsdoes Pete have now ?

A . 3 ÷ **Δ** B . **Δ** + 3 C . **Δ** - 3 D . 3 x **Δ**

Cet exemple montre aussi que les expressions arithmétiques pré-algébriques peuvent résulter de la traduction d'un problème additif dans ce registre d'écriture. Nous sommes ici en présence d'un cas complexe, mais plus simplement, l'écriture de la somme de deux nombres sous la forme (a + b) peut être la traduction, dans le registre des écritures arithmétiques, d'un problème additif.

L'étude des expressions arithmétiques et des différents symboles entrant en jeu dans leur écriture et le peu de place qu'elles occupent dans les traités et les manuels anciens, nous montrent à la fois toute la complexité de ces expressions, mais aussi l'intérêt de leur écriture pour symboliser les différents traitements pouvant leur être appliqués : traitements qui peuvent relever du calcul mental réfléchi ou du calcul posé. Les expressions arithmétiques apparaissent donc comme un élément à part entière de notre domaine d'étude ; elles peuvent être produites à partir du calcul réfléchi comme nous l'avons montré dans cette partie, mais elles peuvent être aussi issues de la modélisation d'un problème arithmétique (comme le stipule le programme de 6ème).

IV.3 La résolution de problèmes

Un dernier détour par l'étude des traités et des manuels nous amène à constater que si Bezout et Reynaud proposaient peu de problèmes en même temps qu'ils présentaient les quatre opérations, il n'en est pas de même dans les ouvrages de Bovier-Lapierre (1868) et André & Haillecourt (1872), qui, en étant destiné à l'enseignement, proposent systématiquement une liste de problèmes arithmétiques à la fin de chacun des chapitres relatifs aux opérations.

Bovier-Lapierre complète la définition de l'opération par un problème contextualisé qui peut être résolu par l'opération concernée. Le premier problème motive l'introduction de la nouvelle opération alors que ceux se situant en fin de chapitre sont plutôt des problèmes d'application, permettant d'utiliser l'opération travaillée au cours du chapitre comme outil pour résoudre le problème.

Nous abordons la résolution de problèmes dans cette partie préalable à la définition de l'OM de référence avec deux objectifs : étudier, à travers le processus de modélisation, comment les expressions arithmétiques apparaissent comme des modèles d'un certain type de problèmes et caractériser par la suite les problèmes qui relèvent de notre domaine d'étude. Nous signalons dès lors que les problèmes aboutissant à la production de l'écriture d'un nombre, comme les problèmes de dénombrement par exemple, ne sont pas abordés dans cette partie : comme nous le préciserons lors de la définition de l'OM de référence, nous considérons qu'ils relèvent de praxéologies de la numération.

IV.3.1 Processus de modélisation

De façon générale, un modèle conduit à une simplification du système donné en vue d'une action sur ce système (Julo 1995, p. 63) ; le processus de modélisation mis en jeu dans la résolution de problèmes répond donc lui aussi à cette double perspective.

D'un point de vue cognitif, la modélisation d'un problème pourrait alors être considérée comme une traduction entre le monde réel (ou réel évoqué) dans lequel est formulé le problème et le domaine mathématique dans lequel il est possible de le traiter ; au préalable, il est néanmoins nécessaire de sélectionner les données utiles à la résolution du problème et d'identifier les relations en jeu entre les données. Le langage mathématique permettrait alors de symboliser autrement les relations entre les données du problème considérées comme nécessaires à sa résolution ; la traduction en langage mathématique se révélant alors efficace pour traiter le problème. Or, pour Julo (1995, p. 70) « modéliser n'est pas seulement traduire » puisque le processus de modélisation demande en premier lieu de se représenter le problème et par la suite de structurer cette représentation pour qu'elle soit opérationnelle ; Julo (1995, p. 86) affirme même qu' « un processus de modélisation ne peut se mettre en place que si la représentation est en cours de structuration ».

Si, dans la suite de notre travail, nous exploitons cette approche cognitive pour analyser des productions d'élèves, nous nous situons davantage dans une approche mathématique et didactique pour définir la praxéologie de référence. Chevallard (1989) décrit un processus de modélisation liant un système à étudier (mathématique ou non) et un modèle mathématique en trois étapes :

> « 1. On définit le système que l'on entend étudier, en en précisant les «aspects» pertinents par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système, soit l'ensemble des variables par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il nous apparaît. [...]
> 2. On construit alors le modèle à proprement parler en établissant un certain nombre de relations, IR, IR', IR ", etc., entre les variables prises en compte dans la première étape, le modèle du système à étudier étant l'ensemble de ces relations.
> 3. On «travaille» le modèle ainsi obtenu, dans le but de produire des connaissances relatives au système étudié, connaissances qui prennent la forme de nouvelles relations entre les variables du système. » Chevallard (1989, p. 53)

Les deux premières étapes se situent dans le domaine de réalité dans lequel le problème est posé (mathématique ou non), alors que l'étape 3 est située dans le domaine mathématique. Si le processus de modélisation tel que décrit précédemment semble linéaire, il ne l'est pas, puisque le travail sur le modèle (étape 3) peut amener à redéfinir le système étudié (étape 1) ou à repenser le modèle (étape 2).

Les problèmes que nous étudions dans le cadre des évaluations considérées sont des problèmes de réinvestissement pour lesquels l'élève doit reconnaitre un modèle qu'il a déjà rencontré ; nous définissons enfin, pour notre travail, un problème arithmétique comme un problème qui peut être modélisé par une ou plusieurs des quatre opérations (+, -, ×, :).

Nous nous limitons alors à prendre en compte deux aspects de la modélisation d'un problème :

- le premier relève de ce que nous appelons la compréhension du problème et correspond au choix des données et des informations utiles à la résolution du problème, à la recherche des relations entre les données du problème et les inconnues ; il permet d'étudier si la production de l'élève peut se rattacher à un modèle et plus particulièrement au modèle sous-jacent au problème ;
- le second correspond à la production d'une représentation des relations entre les données sélectionnées. Peltier & al. (2009b) distinguent deux catégories de modes de représentation :
    - les modes de représentations figuratives ou analogiques ; le dessin produit est dépendant du contexte et amène à une simplification plus ou moins importante des objets évoqués dans la situation, en les représentant par des croix, des traits, etc. ;
    - les modes de représentations symboliques, incluant les représentations schématiques (schémas avec flèches, droite numérique, etc.) et les écritures arithmétiques.

Quelque soit le mode de représentation choisi, il doit permettre à l'élève d'agir sur les données du problème pour pouvoir le résoudre ; en particulier, il doit lui permettre de trouver la ou les opérations intervenant dans les relations entres les données du problème. Comme nous l'avons précisé au début de ce chapitre, la résolution de problèmes étant incluse dans le domaine « nombres et calcul » des programmes, il s'agit de construire conjointement le sens des opérations avec l'effectuation des calculs ; cette orientation était déjà présente à la fin du XIXème siècle, si nous nous référons à l'organisation des manuels d'arithmétique de Bovier-Lapierre (1868) et André & Haillecourt (1872).

Afin de pouvoir décrire les opérations mathématiques sous-jacentes à la structure des problèmes arithmétiques et par la suite décrire les praxéologies apprises illustrant le développement cognitif des élèves lors de l'analyse de leur production, nous reprenons ci-après la description des classes de problèmes des structures additives et multiplicatives définies par Vergnaud (1990).

IV.3.2 Les différentes classes de problèmes

Cette classification est issue d'une approche psychologique, en lien avec le développement conceptuel de l'élève, mais aussi d'éléments relatifs aux mathématiques en jeu dans le problème : par exemple, dans les problèmes arithmétiques (additifs ou multiplicatifs), le nombre peut avoir le statut de mesure de grandeurs ou d'opérateur, être positif ou négatif, etc. Différentes classes de problèmes sont alors décrites comme relevant des structures additives et multiplicatives et tiennent compte non seulement du type de problème, mais aussi de la donnée cherchée (inconnue) (Vergnaud 1990).

IV.3.2.i Structures additives

Vergnaud (1986) décrit six classes de problèmes correspondant aux relations additives; nous ne décrivons que les quatre premières dans le Tableau 2 (page suivante), les deux dernières (transformation d'une relation et composition de deux relations) n'intervenant que très rarement à l'école primaire. Nous mettons également en correspondance le calcul numérique permettant de modéliser le problème sous la forme d'une relation algébrique conduisant à la valeur du résultat.

Les calculs numériques figurant dans le tableau sont décrits à titre d'exemples pour des nombres positifs, ce qui explique que nous fassions intervenir le signe des comparaisons ou des transformations. Nous avons choisi de faire apparaître la réponse au problème (symbolisée par un point d'interrogation) comme le résultat d'un calcul numérique issu d'une relation arithmétique entre les données du problème.

La symbolisation des relations du problème dans le mode de représentation des écritures algébriques peut prendre la forme d'écritures a + b = x ou a - b = x, selon la classe de problèmes considérée, mais aussi selon le développement conceptuel de l'élève tant dans la représentation qu'il se fait du problème que dans les symbolisations mathématiques qui lui sont accessibles. Ainsi, des relations arithmétiques de la forme a + x = b peuvent symboliser les relations entre les données du problème et l'inconnue. Dans ce cas, le calcul tel qu'il est écrit ne permet pas de donner directement la valeur de l'inconnue ; soit l'élève reconnaît la soustraction comme l'opération inverse de l'addition et transforme cette relation en b - a = x pour effectuer ensuite le calcul de la soustraction, soit il calcule la valeur de l'inconnue avec une addition à trous (ou avec une technique de calcul réfléchi, éventuellement par sauts).

Certains problèmes apparaissent donc comme plus complexes que d'autres selon la classe de problèmes à laquelle ils appartiennent.

	Type de problème	Schématisation	Calcul numérique
Composition de mesures	Recherche du tout (P)	$?\begin{cases}P_1\\P_2\end{cases}$	$P_1 + P_2 = ?$
	Recherche d'une des parties (P_1 ou P_2)	$P\begin{cases}P_1\\?\end{cases}$	$? = P - P_1$
Transformation de mesure	Recherche de l'état final (E_f)	$E_i \xrightarrow{T} ?$	$? = E_i + T$ (si $T > 0$) $? = E_i - T$ (si $T < 0$)
	Recherche de l'état initial (E_i)	$? \xrightarrow{T} E_f$	$? = E_f - T$ (si $T > 0$) $? = E_f + T$ (si $T < 0$)
	Recherche de la transformation (T)	$E_i \xrightarrow{?} E_f$	$? = E_f - E_i$ (si $E_f > E_i$) $? = E_i + E_f$ (si $E_f < E_i$)
Comparaison de mesures	Recherche d'une mesure dans le sens de la comparaison	$C\begin{cases}E_1\\?\end{cases}$	$? = E_1 + C$ (si $C > 0$) $? = E_1 - C$ (si $C < 0$)
	Recherche d'une mesure dans le sens contraire de la comparaison	$C\begin{cases}?\\E_2\end{cases}$	$? = E_2 - C$ (si $C > 0$) $? = E_2 + C$ (si $C < 0$)
	Recherche de la comparaison	$?\begin{cases}E_1\\E_2\end{cases}$	$? = E_2 - E_1$(si $E_2 > E_1$) $? = E_2 - E_1$(si $E_2 < E_1$)
Composition de transformations	Recherche de la transformation totale	$\underset{\xrightarrow[?]{\hspace{2em}}}{\xrightarrow{T_1}\xrightarrow{T_2}}$	$? = T_1 + T_2$ (si $T_1 > 0$ et $T_2 > 0$) $? = T_1 - T_2$(si $T_1 > 0$ et $T_2 > 0$) ...
	Recherche d'une des deux transformations	$\underset{\xrightarrow[T]{\hspace{2em}}}{\xrightarrow{T_1}\xrightarrow{?}}$	$? = T - T_1$ ...
Transformation d'une relation			
Composition de relations			

Tableau 2 - Classes de problèmes additifs et calculs numériques associés

IV.3.2.ii Structures multiplicatives

Pour décrire les classes de problèmes relevant des structures multiplicatives, nous distinguons les problèmes mettant en jeu quatre mesures de grandeurs (problèmes quaternaires), les problèmes de comparaison, ceux de produits de mesures et ceux combinant deux proportions.

Parmi les problèmes quaternaires, quatre classes de problèmes peuvent être définies (Vergnaud 1990) ; ces problèmes sont symbolisés de la façon suivante : $\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ c & ? \end{array}\right)$ et traduisent une proportion simple entre les variables a et b. La valeur de l'unité peut intervenir dans ces problèmes, en étant connue et donnée dans l'énoncé ou en étant recherchée directement comme réponse au problème. Nous écartons de notre domaine d'étude les problèmes de proportionnalité qui ne donnent pas ou ne questionnent pas directement la valeur de l'unité, la recherche du coefficient de proportionnalité ou les rapports entre les différentes grandeurs pouvant ne pas être entiers. Pour cette même raison, nous ne traitons pas des problèmes combinant deux proportions et nous conservons uniquement les problèmes relevant des différentes classes présentées dans le tableau suivant (Tableau 3).

	Type de problème	Schématisation	Calcul numérique
Problèmes de recherche d'une quatrième proportionnelle	Recherche du tout	$\left(\begin{array}{c\|c}1 & b\\ c & ?\end{array}\right)$	c × b = ?
	Recherche de la valeur unitaire	$\left(\begin{array}{c\|c}1 & ?\\ c & d\end{array}\right)$	? = d div[13] c
	Recherche du nombre d'unités	$\left(\begin{array}{c\|c}1 & b\\ ? & d\end{array}\right)$	? = d div b
Problèmes de comparaison	Recherche de la valeur finale	$C\begin{cases}E_1\\ ?\end{cases}$	? = E_1 × C ? = E_1 : C
	Recherche de la valeur initiale	$C\begin{cases}?\\ E_2\end{cases}$	? = E_2 : C ? = E_2× C
	Recherche de la comparaison	$?\begin{cases}E_1\\ E_2\end{cases}$	? = E_2 : E_1 ? = E_2× E_1
Produit de mesures	Recherche du produit	a × b = ?	a × b = ?
	Recherche d'une des mesures	a × ? = c	? = c : a

Tableau 3 - Classes de problèmes multiplicatifs et calculs numériques associés

Les problèmes de recherche de la valeur unitaire ou du nombre de parts correspondent aux situations que Vergnaud (1990) avait identifiées respectivement sous le terme de division-partition (recherche de la valeur d'une part dans un partage équitable) et de division-quotition (recherche du nombre de tas identiques dans une répartition en tas identiques) ; dans ces deux types de problèmes, la division euclidienne permet de produire le résultat attendu. Comme nous ne considérons que les problèmes mettant en jeu des nombres entiers et conduisant par conséquent à une multiplication ou à une division euclidienne (non décimale), il est alors possible de préciser ce à quoi correspondent reste et quotient dans chacun des deux cas :
- recherche de la valeur unitaire (ou division-partition) : la valeur de l'unité est donnée par le quotient et la valeur restante à partager est donnée par le reste ;
- recherche du nombre d'unités (ou division-quotition) : le nombre d'unités est donné par le quotient et la valeur restante après partage est donnée par le reste.

Nous précisons enfin, en lien avec le choix de notre domaine, que les divisions intervenant aussi dans les problèmes de comparaison ou de produits de mesures sont des divisions exactes ; à la différence des problèmes de quotition et de partition, ces situations n'amènent pas à une interprétation possible du reste dans la division euclidienne.

Comme pour les problèmes additifs, la relation arithmétique traduisant les relations entre les données du problème peut prendre la forme d'une multiplication ou d'une division, selon l'inconnue du problème. Dans certaines classes de problèmes, comme ceux de division (quotition et partition), il est dès lors possible de représenter les relations entre les données sous la forme d'une opération à trous du type a × x = b ; si la division n'est pas exacte, x n'est pas un entier et par conséquent le quotient de la division euclidienne n'est pas la solution de cette équation. L'écriture arithmétique de

[13] div correspondant à une division euclidienne

la relation entre les données a et b d'un problème de division sous la forme d'une équation correspondant à l'égalité caractéristique de la division euclidienne (a = b × x + y) en choisissant des inconnues x et y n'est pas envisageable à l'école élémentaire ; les élèves peuvent néanmoins poser la division euclidienne et écrire l'égalité caractéristique avec le quotient et le reste ou utiliser une notation spécifique ; nous montrerons en effet dans le chapitre 3 (paragraphe III.2.8) que certains auteurs de manuels adoptent une notation spécifique pour indiquer l'opération de la division euclidienne.

Pour les structures additives et multiplicatives, il existe un nombre important de type de problèmes selon la classe de problèmes à laquelle il appartient, les nombres en jeu, les relations existantes entre les nombres ou encore la congruence sémantique entre l'énoncé du problème et la relation arithmétique qui lui correspond (Duval 1996) : par exemple, l'utilisation de l'expression « de plus » dans le problème conduit-elle à une relation additive sous la forme d'une addition ou d'une soustraction ? En tenant compte de ces différentes variables, il est alors possible d'établir une hiérarchie de complexité entre les différents problèmes :

> « Cette diversité de cas peut cependant être aisément hiérarchisée en considérant les trois facteurs de la complexité cognitive : la structure des problèmes, les valeurs numériques, les domaines d'expérience. » Vergnaud (1990)

Les facteurs de complexité cognitive tels que Vergnaud les définit tiennent alors compte non seulement des mathématiques en jeu dans le problème, mais aussi du développement conceptuel de l'élève. Nous reviendrons à cette considération cognitive lorsque nous nous intéresserons aux productions effectives des élèves en situation d'évaluation et nous en tiendrons compte pour comprendre et interpréter leurs erreurs ; nous poursuivons d'abord l'étude du domaine mathématique que nous étudions (écritures des nombres entiers, calcul et résolution de problèmes arithmétiques) en le structurant en différentes praxéologies.

V STRUCTURE DE L'OM DE RÉFÉRENCE : « NUMÉRATION DÉCIMALE & ARITHMÉTIQUE DES ENTIERS »

V.1 Définition du domaine « numération décimale & arithmétique des entiers »

Comme nous l'avons constaté avec les textes de Bezout et Reynaud, les technologies des techniques opératoires de calcul posé sont, pour beaucoup, des propriétés de la numération ; c'est une des raisons pour laquelle nous avons choisi de coupler l'étude des opérations à celle de la numération, et de concevoir un domaine englobant les deux. Néanmoins, l'étude des opérations, comme nous l'avons vu dans les manuels d'arithmétique, ne se limite pas à celle des techniques de calcul posé, mais porte aussi sur le calcul réfléchi, puisqu'il permet de faire fonctionner les propriétés des opérations que nous avons pu établir lors de leur définition mathématique et est en lien avec la résolution de problèmes.

A partir de ces constats, du contenu des programmes de l'école primaire et du début de collège et de la définition mathématique du nombre et des opérations, nous distinguons pour les nombres entiers, ce qui relève :
- des types de représentation du nombre : en écriture chiffrée, avec la numération parlée, avec des écritures en unités de numération ou des décompositions additives en puissances de 10, etc. Même si nous n'écartons pas la numération parlée, c'est principalement à la numération décimale que nous

nous intéressons, puisque nous avons pu constater que ces propriétés occupaient une place importante dans la justification des techniques de calcul posé ;

- des opérations sur les nombres entiers : les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication et division) sont alors considérées. La soustraction est définie comme l'opération permettant de calculer la différence entre deux entiers naturels a et b (a étant supérieur ou égal à b pour que la différence puisse être définie dans $\mathbb{N}$). La division est considérée soit comme division exacte (avec quotient entier) soit comme division euclidienne ; la limitation du domaine aux nombres entiers nous conduit à ne pas considérer les divisions décimales ;

- des relations arithmétiques entre les nombres : figurant dans les programmes et intervenant dans le calcul réfléchi, les décompositions arithmétiques des nombres sont une partie du domaine que nous prenons en compte en lien avec le calcul réfléchi ;

- de la résolution de problèmes additifs et/ou multiplicatifs : la résolution de ces derniers amène en fin d'école à la production de relations arithmétiques symbolisant les relations entre les données du problème, la résolution de problèmes permettant aussi de construire le sens des opérations.

Une partie de notre domaine porte donc sur les nombres entiers ainsi que leurs types de représentations et une autre sur les opérations en lien avec la numération décimale, les relations arithmétiques entre les nombres et la résolution de problèmes. En qualifiant le domaine étudié par « numération décimale et arithmétique des entiers », nous montrons que nous prenons en compte, de façon plus importante, la numération décimale (nous reviendrons néanmoins ponctuellement sur la numération parlée), le terme d'arithmétique des entiers renvoyant à la fois au calcul posé et réfléchi (en lien avec les opérations) et à la résolution de problèmes.

Enfin, nous avons pu constater l'intérêt des écritures arithmétiques comme mode de communication des raisonnements menés en calcul mental, mais aussi comme mode de représentation symbolique permettant d'agir sur les données d'un problème. Or, l'écriture et le maniement des expressions arithmétiques restent complexes : apparaissant tardivement dans les manuels, leur complexité repose principalement sur l'utilisation du signe « égal » qui au cycle 3 prend différents statuts, comme le rappelle l'extrait d'un document accompagnant la mise en œuvre des programmes de 2008 :

> « En effet, si au cycle 2 le signe « = » est généralement exclusivement utilisé pour inscrire le résultat d'une opération (125 + 75 = 200), il possède d'autres sens très importants qui seront à travailler durant les trois années du cycle :
> - a pour résultat : 2 + 2 = 4 ;
> - égalité entre des nombres donnes : 125 = 1 × 100 + 2 × 10 + 5 ;
> - égalité faisant intervenir des variables : c + c + c + c = 4 × c ;
> - lien entre des grandeurs, formule : P = 4 × c ;
> - affectation : tu prendras c = 4 ;
> - désignation : « Pour effectuer le calcul, tu prendras π = 3,1. »[14] Durpaire & Mégard (2012, p. 12)

Nous intégrons donc à notre domaine d'étude une dimension transversale liée à l'écriture et à la réécriture des expressions arithmétiques ; cette dernière n'intervient pas directement dans la

[14] Dans la partie relative à la dénotation des expressions, souhaitant rester dans le domaine arithmétique, et ne pas entrer dans celui de l'algèbre, nous n'avons pas évoqué les statuts du signe égal associés aux différents statuts de la lettre.

définition des praxéologies de référence, mais est prise en compte par la suite dans la définition du modèle et la conception du test (chapitres 6 et 7).

En revanche, même si l'étude du système métrique en parallèle de la numération décimale est porteuse de sens (Chambris 2008, 2012b) et qu'elle peut être « un outil au service de la numération et du sens des nombres » (Durpaire & Mégard 2012, p. 13), nous n'intégrons pas à notre étude ce qui relèverait de l'étude des conversions entre unités du système métrique. Il s'agit ici d'un choix arbitraire visant à circonscrire un domaine déjà étendu, mais nous sommes consciente de l'intérêt qu'il y aurait à l'intégrer.

Le domaine étant désormais défini, nous pouvons expliciter la façon dont nous structurons l'OM de référence avant de la décrire en termes de praxéologies dans le chapitre suivant et de l'exploiter par la suite dans l'analyse du contenu des évaluations et la caractérisation des praxéologies apprises en prenant en compte les étapes de la transposition didactique.

V.2 Structure retenue de l'OM de référence

Nous considérons le nombre et les opérations sous un aspect *objet* à travers ce qui relève du calcul et des différentes écritures, mais aussi sous un aspect *outil* à travers la résolution de problèmes.

Nous avons choisi de traiter de la résolution de problèmes dans une première organisation mathématique régionale (OMR). Au delà de la sélection des données utiles à la résolution et de l'identification des relations entre ces données, la compréhension d'un problème intègre aussi ce qui relève de l'interprétation du résultat une fois qu'il est déterminé mathématiquement ; nous prendrons en compte cette phase du processus de résolution lors de l'analyse *a priori* des tâches, mais ne la définissons pas comme un élément technologique spécifique. Nous avons déjà évoqué la complexité des processus cognitifs entrant en jeu dans la résolution de problèmes ; de ce fait, nous nous limitons, dans la définition de la praxéologie de référence, à l'étude des expressions arithmétiques produites à la suite d'un processus de modélisation et de traduction dans ce mode de représentation spécifique.

Il reste complexe de définir des technologies menant à la production d'expressions arithmétiques et caractérisant l'OMR que nous avons dénommée **« produire une expression » (OMR 1)**, d'autant plus que les écritures arithmétiques ne constituent pas le seul mode de représentation du problème. Nous définissons alors un élément technologique, spécifique à la résolution de problèmes, $\boldsymbol{\Theta_{RP\_Prod\_ea}}$ qui a pour fonction d'assurer la cohérence entre l'expression arithmétique produite et la relation (issue de la situation) entre les données utiles du problème.

En ce qui concerne le nombre, la prise en compte de ses aspects cardinal et ordinal est intégrée, non pas dans la résolution de problèmes, mais dans l'OMR relative à la numération. Ainsi, les OMR 2 et 3 portent sur le traitement des expressions numériques mettant en jeu des nombres uniquement ou des nombres et des opérations : à la suite de l'étude des traités, nous avons pu constater que les principes de la numération écrite chiffrée ($\boldsymbol{\Theta_P}$, $\boldsymbol{\Theta_D}$ et $\boldsymbol{\Theta_{max}}$) correspondaient souvent, en partie, aux technologies des calculs posés, mais que des propriétés liées directement aux opérations pouvaient elles aussi entrer en jeu (comme par exemple $\boldsymbol{\Theta_{dist}}$ et $\boldsymbol{\Theta_{div\text{-}euc}}$). Si Chambris (2008, p. 432) recense les types de tâches de la numération en intégrant d'abord le calcul tout en précisant qu'il est plus difficile à cerner que les autres, elle l'écarte ensuite (Chambris 2012) des générateurs de tâches emblématiques de la numération de position, pour n'en conserver que six, dans lequel le calcul n'apparaît plus.

Nous choisissons pour notre travail de distinguer une OMR dédiée à la numération, dans laquelle nous étudions les différentes écritures d'un nombre **« pratiquer la numération décimale» (OMR 2)** d'une OMR dédiée au calcul **« calculer » (OMR 3)** dans laquelle nous intégrons le calcul posé et le calcul réfléchi.

Nous justifions cette distinction par le fait que, dans les calculs, interviennent des technologies autres que celles relatives à la numération : cela est particulièrement visible en calcul réfléchi ou nous avons mis en évidence différents éléments technologiques tels que $\boldsymbol{\Theta}_{\text{sous-terme-diff}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\text{sous-terme-somme}}$ pour le calcul de soustractions. De plus, toutes les techniques de calcul posé ne se justifient pas à partir des seules propriétés de la numération ; elles convoquent aussi des propriétés des opérations telles que la commutativité et d'associativité ($\boldsymbol{\Theta}_{\text{comm\_+}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\text{comm\_×}}$, $\boldsymbol{\Theta}_{\text{ass\_+}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\text{ass\_×}}$) ou celle de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ($\boldsymbol{\Theta}_{\text{dist}}$).

Lors de l'étude mathématique du domaine, nous avons remarqué que la relation d'ordre ($\boldsymbol{\Theta}_{\text{Def\_RO}}$) était définie à partir de la différence de deux entiers, ce qui pourrait justifier que nous incluions les types de tâches de comparaison ou de comparaison dans l'OMR 3 relative aux calculs. Or, les techniques de comparaison entre deux nombres à l'école élémentaire ne reposent pas sur le calcul de la différence entre deux entiers, mais sur les technologies de la numération $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{P}}$. Par conséquent, nous plaçons ces types de tâches dans l'OMR 2, comme l'ont fait Tempier (2013) et Chambris (2008).

L'OMR 2 porte alors sur la numération décimale (numération écrite chiffrée, en unités de numération), mais englobe aussi la numération parlée ; elle est définie et structurée à partir du travail de Tempier (2013, p. 43) et se décompose en trois organisations mathématiques locales (OML) que nous décrivons dans le chapitre suivant : « **traduire des écritures » (OML 2A)**, « **nombre sous son aspect cardinal »(OML 2B)** et **« nombre sous son aspect ordinal** » (**OML 2C**) ; l'OML 2C incluant les types de tâches de comparaison, de rangement, etc. qui ont pour technologie $\boldsymbol{\Theta}_{\text{Def\_RO}}$.

L'OMR 3 prend en compte les quatre opérations et se décompose en deux OML correspondant chacune à un mode de calcul : **OML 3A : calcul posé** et **OML 3B : calcul réfléchi.** Au-delà du mode de calcul, la distinction s'effectue surtout sur les éléments technologiques qui les sous-tendent, comme nous l'avons rappelé précédemment : même si les propriétés de la numération écrite chiffrée ne sont pas les seules à intervenir pour justifier les techniques de calcul posé, elles y jouent néanmoins un rôle important. En revanche, le calcul mental réfléchi mobilise des technologies supplémentaires, basées sur les décompositions arithmétiques en lien avec les propriétés des opérations ; ces technologies n'intervenant pas dans le calcul posé.

L'organisation mathématique de référence du domaine « numération décimale et arithmétique des entiers » est alors structurée en trois OML, comme le décrit le Schéma 5, page suivante ; nous rappelons que la dimension relative à la dénotation des expressions n'apparaît pas en tant que telle dans les praxéologies, mais interviendra par la suite dans notre travail de façon transversale.

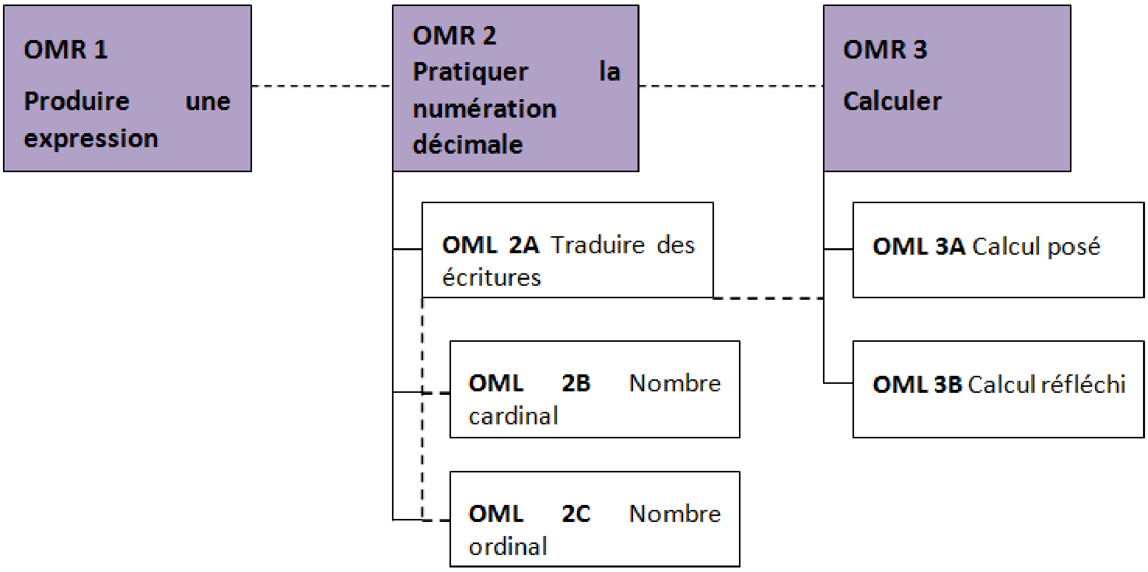


Schéma 5 - Structure de la praxéologie de référence pour l'étude de la numération et de l'arithmétique des entiers.

CHAPITRE 3

ÉTUDE DES PRAXÉOLOGIES DU DOMAINE « NUMÉRATION DÉCIMALE ET ARITHMÉTIQUE DES ENTIERS »

Le chapitre précédent nous a conduite à définir la structure d'une OM de référence pour étudier le domaine de la numération décimale et de l'arithmétique des nombres entiers ; dans la continuité de ce chapitre, nous décrivons ici chacune des praxéologies en précisant pour chacun des types de tâches les techniques attendues au niveau scolaire où nous nous plaçons (fin d'école/début de collège) et les éléments technologico-théoriques sur lesquels elles reposent, en les replaçant dans le processus d'enseignement sur l'école primaire. Nous concluons ce chapitre en montrant l'évolution de certaines techniques, en lien avec les technologies qui les sous-tendent sur ce domaine et pointons alors des points de rupture occasionnés par cette évolution.

Nous exploiterons par la suite la définition des praxéologies de référence pour analyser le contenu des évaluations et étudier leur validité : les tâches proposées dans les évaluations recouvrent-elles le domaine au regard de la praxéologie de référence ? Sont-elles représentatives de ce domaine ? Quelles sont les techniques et les technologies permettant de les résoudre ? L'objectif assigné à chacun des items d'évaluation est-il cohérent avec ces techniques ? Les résultats produits par ces évaluations renseignent les praxéologies apprises en fin d'école : la définition d'une OM de référence permet ensuite de mettre en regard les praxéologies apprises avec celles à enseigner et enseignées. Les résultats des évaluations CEDRE seront donc réinterprétés en ce sens.

Les praxéologies définies dans l'OM de référence nous permettront aussi d'analyser les productions des élèves en repérant les techniques et technologies apprises, en tenant compte du développement conceptuel des élèves pour rechercher des cohérences de fonctionnement lors de la définition des profils. Les éléments technologiques et les points de rupture soulignés en conclusion de ce chapitre seront exploités dans la définition du modèle d'analyse multidimensionnelle pour construire un codage transversal des productions des élèves en lien avec les technologies en jeu et pour définir les profils des élèves.

Nous nous basons, pour caractériser l'OM à enseigner, sur les programmes actuels (programmes de 2008) et sur deux documents les accompagnant (Durpaire & Mégard 2010, 2012) ; nous ne réalisons pas dans la thèse une étude de manuels, mais exploitons néanmoins certains extraits pour présenter des techniques et des technologies à enseigner et préconisées dans les manuels ou enseignées. Nous illustrons leurs évolutions durant l'école élémentaire et les mettons en perspective de celles présentes dans les traités et les manuels anciens étudiés dans le chapitre 2. Pour chacun des types de tâches, nous faisons référence à des techniques qui subsistent jusqu'en fin du cycle 3, bien qu'elles ne relèvent pas de techniques et technologies attendues ou visées à ce niveau scolaire. Nous le précisons néanmoins afin de pouvoir analyser par la suite les réponses des élèves dans les évaluations et interroger des pratiques enseignantes qui seraient à leur origine dans les classes. La synthèse de ce chapitre s'appuiera sur les évolutions de ces différentes techniques pour souligner les évolutions des éléments technologiques et les points ruptures qu'elles suscitent.

Nous centrons notre travail sur le calcul et complétons ainsi les études menées par Chambris (2008) et Tempier (2013) sur la numération. La structure de ce chapitre repose sur celle de l'OM de référence définie à la fin du chapitre précédent et s'organise en trois parties correspondant à chacune des OMR. Une synthèse reprenant l'ensemble des types de tâches, l'évolution des techniques et des éléments technologiques au cours de l'école primaire clôture ce chapitre.

I ÉTUDE DE L'OMR1 : PRODUIRE UNE EXPRESSION

L'étude mathématique accompagnée d'une courte approche cognitive, menée dans le chapitre 2 nous a conduite à identifier des structures additives et multiplicatives pour catégoriser les problèmes arithmétiques ; à l'intérieur de ces structures, la typologie de Vergnaud (1990) permet d'identifier le type de relation qui existe entre les données du problème et de prendre en compte aussi bien les mathématiques sous-jacentes que le développement conceptuel de l'élève.

Nous nous intéressons dans l'OMR1 à la façon dont les modèles arithmétiques, issus de la définition des quatre opérations interviennent dans la résolution du problème pour permettre à l'élève de produire une expression arithmétique, conduisant ensuite à un processus de calcul. D'un point de vue mathématique et anthropologique, l'étude de la modélisation du problème demande une description des différents modèles possibles, ainsi que des technologies qui les sous-tendent. En ce sens, Wozniak (2012) situe l'analyse des praxéologies de modélisation en prenant en compte les éléments du discours qui justifient les techniques de modélisation :

> « l'analyse des praxéologies de modélisation nécessite la mise à jour des praxéologies permettant la définition du système, la construction et le travail sur le modèle. La modélisation ne se limite donc pas à un travail sur un modèle préconstruit mais appelle l'élaboration d'un discours qui rende compte des ingrédients qui entrent dans l'élaboration du modèle. Ainsi, le rôle et la place des discours qui décrivent, justifient et légitiment les techniques de modélisation apparaissent comme essentiels. » Wozniak (2012)

Nous considérons alors que la résolution de problèmes arithmétiques de réinvestissement demande la reconnaissance d'un modèle arithmétique en lien avec une ou plusieurs des quatre opérations et la conversion des relations des données du problème en une expression arithmétique conduisant ensuite à l'effectuation d'un calcul (de façon posée ou réfléchie) ; la technologie $\mathbf{\Theta_{RP\_Prod\_ea}}$ assurant la cohérence entre l'expression arithmétique produite et les relations existant entre les données du problème. Les autres éléments technologiques sont ceux liés à la définition des opérations en tant que modèles additifs, soustractifs, multiplicatifs ou de division.

Il est par ailleurs important de distinguer ce qui relève de la résolution du problème *stricto sensu*, de la production d'une expression arithmétique. Nous nous situons dans ce chapitre d'un point de vue anthropologique; ce qui signifie que nous nous centrons sur les techniques de résolution attendues en fin d'école conduisant à la production d'expressions arithmétiques. Nous prendrons en compte les autres modes de représentation symbolique du problème évoqués dans le chapitre précédent lorsque, dans la définition du modèle d'analyse multidimensionnel, nous croiserons l'approche anthropologique avec une approche cognitive (chapitre 6).

Par ailleurs, toutes les techniques de résolution de problèmes ne s'apparentent pas à des techniques de calcul. Il est en effet possible, dès la maternelle, de procéder par comptage ou par décomptage pour résoudre des problèmes additifs ; de la même façon, des problèmes de division (partition ou quotition) peuvent être résolus avec des techniques de distribution ou de groupement menant au quotient ou au reste sans avoir recours au calcul. Les techniques de comptage $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_compt}}$ ou de groupements /partage existant à l'école maternelle sont destinées à évoluer en même temps que se construit le sens des opérations au cours de l'école élémentaire ; la résolution de problèmes, par le choix des nombres en jeu, nécessitant le recours à des stratégies de calcul et réduisant l'efficacité des techniques de comptage. Si les techniques de comptage peuvent se révéler efficaces pour résoudre des problèmes mettant en jeu des petits nombres, elles ne le sont plus dès que les nombres deviennent plus grands : ce qui demande d'entrer dans un certain formalisme mathématique passant par la production de calculs (posé ou en ligne). Carpenter & al. (1988) cités par Fagnant (2008) voient alors, dans l'apprentissage de la représentation des problèmes par des symboles mathématiques, « un des objectifs majeurs de l'enseignement ».

L'évolution des techniques de comptage vers celles du calcul présente une première rupture puisque les éléments technologiques qui sous-tendent ces deux techniques sont différents. La technologie de comptage $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{Compt}}$ ne repose que sur la définition d'un successeur (ou d'un prédécesseur de chacun des nombres) alors que les techniques menant à la production d'une écriture arithmétique impliquent de reconnaître le modèle et par la suite d'utiliser des techniques de calcul reposant sur des technologies de la numération et des opérations. La transition entre le comptage et le calcul est un des enjeux du cycle 2. L'enseignement du comptage dès les premières années de l'école serait pour Brissiaud (2013) déterminant quant aux performances de calcul des élèves ; il explique ainsi que le comptage-numérotage « éloigne les élèves du calcul » et il privilégie au début de l'apprentissage le comptage-dénombrement pour faire comprendre le calcul sous-jacent. Charnay & Valentin (1991) se positionnent différemment et visent plutôt l'abandon des techniques de comptage au profit de celles de groupement au fur et à mesure de l'apprentissage ; les techniques de calcul devenant inefficaces lorsque les nombres en jeu sont grands.

En nous plaçant en fin d'école et en prenant en compte les attentes des programmes, nous considérons, dans cette partie, que la conversion attendue s'effectue dans le type de registre des expressions arithmétiques. Nous définissons alors trois types de tâches : deux types de tâche de production d'expressions arithmétiques $\mathbf{T}_{\mathbf{RP\_+}}$ si le problème relève d'une structure additive et $\mathbf{T}_{\mathbf{RP\_\times}}$ s'il relève d'une structure multiplicative et un type de tâche d'association $\mathbf{T}_{\mathbf{RP\_ass}}$ entre une expression arithmétique et un problème.

La structure retenue pour l'OMR 1 est donc la suivante (Schéma 1) :

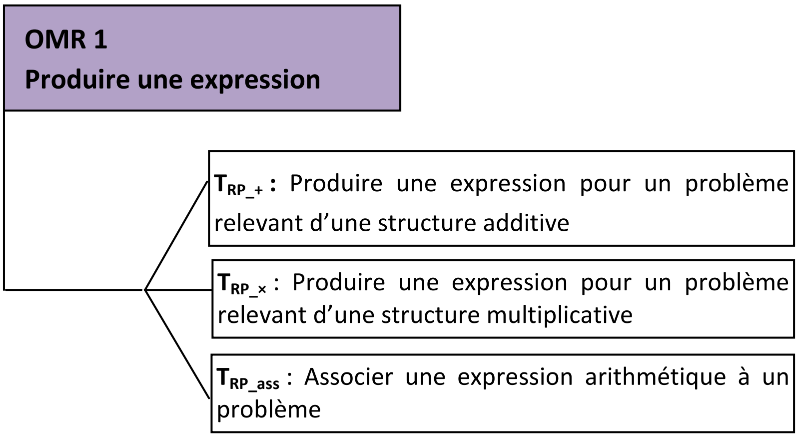


Schéma 1 - Structure de l'OMR1 « produire une expression »

I.1.1 $\mathbf{T}_{\mathbf{RP\_+}}$: produire une expression pour un problème relevant d'une structure additive

Les modèles en jeu sont ici des modèles additifs ou soustractifs ; l'addition et la soustraction apparaissant comme les opérations attachées à ces modèles. Si a et b sont les données de l'énoncé et x l'inconnue, la reconnaissance d'un modèle additif conduit alors à des écritures du type a + b = x alors que, pour un modèle soustractif, la conversion peut conduire à des expressions de la forme a - b = x ou a + x = b. Les écritures de la forme a - b = x sont équivalentes à celles de la forme a + x = b, et sont justifiées par la définition de la différence de deux entiers (définition construite à partir de celle de l'addition).

Dans les classes de problèmes suivantes, la recherche du modèle conduit à la production d'une expression de la forme a + b = x ou a - b = x :
- composition de mesures avec recherche du tout (modèle additif),
- transformation de mesure avec recherche de l'état final (modèle additif si la transformation est positive ou soustractif si la transformation est négative),
- comparaison de mesures avec recherche de la mesure finale (modèle additif si la comparaison est positive ou soustractif si la comparaison est négative),
- composition de transformations avec recherche de la transformation totale (modèle additif si les deux transformations sont du même signe ou soustractif si les deux transformations n'ont pas le même signe).

Techniques et technologies attendues en fin d'école :

Dans ces différents cas, la technique de résolution attendue en fin d'école $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_calc}}$[15] suppose la reconnaissance du modèle additif ou soustractif adapté à la situation évoquée par le problème et conduit, à une écriture arithmétique du type : a + b = x ou a - b = x en ligne ou posé ; la cohérence entre l'écriture en ligne et la relation entre les données du problème évoquée par la situation est assurée par $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{RP\_Prod\_ea}}$. La convocation par la suite de praxéologies de calcul conduit à la valeur de x.

[15] Nous nommons $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_\ldots}}$ les différentes techniques conduisant à la production d'expressions arithmétiques en situation de résolution de problèmes.

Dans d'autres classes de problèmes telles que la composition de mesures avec recherche d'une des parties ou la transformation de mesure avec recherche de l'état initial, la recherche du modèle suivie de la conversion peut davantage conduire à des expressions du type a + x = b ou a - x = b. Nous distinguons alors la technique de production $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_op\text{-}trou}}$ qui aboutit à la production d'écritures arithmétiques « à trous », de $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_calc}}$ qui conduit à une expression arithmétique permettant l'effectuation d'un calcul avec les techniques usuelles. La technologie $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{RP\_Prod\_ea}}$ assure non seulement la cohérence entre l'expression produite par chacune de ces techniques, mais aussi, par conséquent, l'équivalence entre les deux relations arithmétiques produites. La technique attendue en fin d'école est $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_calc}}$; $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_op\text{-}trou}}$ pouvant apparaître dans certaines classes de problèmes.

Par exemple, si nous considérons le problème de composition de mesures «Yoann et Lou collectionnent des timbres. A eux deux, ils possèdent 1 351 timbres ; Yoann a 562 timbres. Combien Lou en a-t-elle ? » : $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_calc}}$ conduit à l'écriture de l'expression1 351 - 562 alors que $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_op\text{-}trou}}$ à une écriture du type : 562 + ... = 1 351. A la différence de $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_calc}}$ et de $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_compt}}$, l'expression produite par $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_op\text{-}trou}}$ n'est pas un calcul qui appelle la convocation d'un type de tâche de calcul pour être effectué. A ce niveau scolaire, il ne s'agit pas de mobiliser des techniques algébriques, mais si nous reprenons notre exemple, le traitement de l'expression 562 + ... = 1 351 peut être résolu par la technique de soustraction $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_-\_add\_trou}}$ reposant sur la résolution d'une addition à trous (technique décrite dans l'OMR 3) ou en considérant l'expression équivalente 1 351 - 562 (la transformation d'une expression à l'autre étant justifiée par la définition de la différence entre deux entiers ou par $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{inv}}$).

Autres techniques :

Dans l'exemple précédent, la technique de comptage $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_compt}}$ consisterait à décompter à partir de 1 351, 562 unités, ce qui est inadapté au regard des nombres en jeu. Certaines valeurs de variables le privilégient néanmoins, lorsque la mesure d'une des parties entrant en jeu dans la composition est un petit nombre.

La technique de comptage $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_compt}}$ utilisée depuis l'école maternelle n'est pas attendue en fin d'école. Elle suppose la mise en œuvre d'un modèle que nous qualifions de « modèle collection », dans lequel les données du problème restent contextualisées : les nombres ne sont alors pas considérés comme des entités abstraites permettant de les mettre en œuvre dans des opérations. D'un point de vue technologique, le sens des opérations n'est pas construit. La reconnaissance d'un « modèle collection », non arithmétique, conduit ensuite à des procédés de sur-comptage dans le cas des problèmes additifs ou de décomptage dans le cas de problèmes soustractifs, et ne débouche pas sur l'écriture d'une expression arithmétique. La portée de la technique de comptage $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_compt}}$ est donc très limitée et dépend de la taille des nombres en jeu.

I.1.2 $\mathbf{T}_{\mathbf{RP\_\times}}$: produire une expression pour un problème relevant d'une structure multiplicative

Pour déterminer les techniques relatives à $\mathbf{T}_{\mathbf{RP\_x}}$, nous procédons dans ce type de tâche comme nous l'avons fait pour les problèmes relevant de structures additives, en distinguant les techniques qui aboutissent à la production d'une expression arithmétique de celles conduisant à l'écriture d'une relation arithmétique à trous. Nous conservons la même dénomination des techniques :
- $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_calc}}$ permet de modéliser le problème avec une opération conduisant, après conversion, à une expression arithmétique du type a × b = x ou a : b = x ; si la division est exacte (quotient entier) le résultat de a : b est un nombre (le quotient), sinon il s'agit d'un couple de nombres, le quotient et le reste de la division euclidienne,

- $\tau_{RP\_op\text{-}trou}$ conduit à l'écriture d'une expression à trous de la forme : a × x = b ou a : x = b ; comme précédemment si le quotient n'est pas entier, ces écritures peuvent évoluer vers des écritures du type : a = b × $x + y$.

La technique de comptage τ_{RP_compt} existant pour les problèmes additifs et soustractifs se retrouve ici avec la reconnaissance de « modèles collections » qui conduisent à des groupements ou à des partages de la collection sans passer par des écritures arithmétiques.

I.1.2.i Modèles multiplicatifs et additions itérées

Le modèle multiplicatif peut aussi être considéré comme un modèle additif, la multiplication étant construite initialement comme une addition itérée ; l'introduction de la multiplication en CE1 étant réalisée à partir d'additions itérées. Pour les problèmes multiplicatifs, la technique de production d'expressions $\tau_{RP\_\times\_add}$ menant à l'écriture d'additions itérées repose alors sur la définition de la multiplication, non pas comme opération à part entière, mais comme addition itérée.

τ_{RP_calc} est la technique attendue en fin d'école. Dans l'exemple « Une place de cinéma coûte 8 euros, combien coûtent 15 places ? », τ_{RP_calc} conduit à exprimer le coût total sous la forme 8 × 15, sachant qu'il s'agit de 15 fois le prix unitaire d'une place.

La technique $\tau_{RP\_\times\_add}$ peut encore exister en CM1 notamment pour réactiver la technique de calcul posé de la multiplication comme en témoigne l'extrait d'Euromaths (Peltier & al. 2009c) pour le calcul du produit de 57 par 6 (Figure 1). Dans le problème précédent, $\tau_{RP\_\times\_add}$ conduit à la somme : 8 + 8 + 8 + …+ 8 + 8 (15 fois) et ne se montre guère adaptée pour les nombres en jeu.

Figure 1 - Extrait d'Euromaths CM1 Peltier & al. (2009c, p. 63)

$\tau_{RP\_\times\_add}$ évolue au cours de l'école élémentaire vers une technique de production d'expressions arithmétiques sous la forme de produits τ_{RP_calc} ; cette dernière étant celle attendue en fin d'école.

I.1.2.ii Modèles de division et soustractions itérées

Techniques et technologies attendues en fin d'école :

Dans les problèmes de division, τ_{RP_calc} mène à une division exacte ou euclidienne et par conséquent à des expressions arithmétiques de la forme a : b = x ou a = b × $x + y$. D'autres techniques peuvent subsister néanmoins en fin d'école puisque la construction du sens de la division a été construite de façon progressive depuis la maternelle, en lien avec les autres opérations.

Autres techniques :

Si l'on se réfère à la façon dont se construit la division à l'école élémentaire, nous observons qu'après avoir résolu des problèmes de division par groupement et partage à l'école maternelle et au début de l'école élémentaire, les problèmes de division peuvent être résolus à partir d'additions itérées, de soustractions successives, puis à partir du calcul de multiplications par essais-erreurs, visant à retrouver le dividende (nous compléterons notre propos dans l'OML 3A lorsque nous décrirons des possibles pour enseigner l'algorithme de la division posée). Par conséquent, dans un problème de division, le modèle peut être un modèle de division, multiplicatif (avec une opération à trous), mais aussi soustractif, voire additif.

L'extrait d'Euromaths CM2 (Peltier & al. 2009a) montre comment la technique opératoire de la division peut s'appuyer sur un modèle soustractif de la division pour être justifiée (Figure 2) ; nous y reviendrons lorsque nous décrirons les praxéologies de calcul posé.

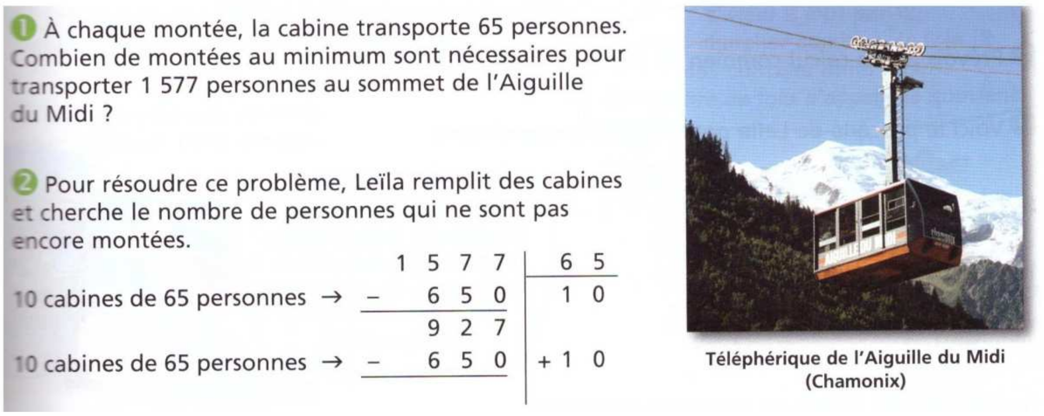


Figure 2 - Extrait d'Euromaths CM2 (Peltier & al. 2009c, p. 63)

En complément de τ_{RP_calc} nous définissons deux autres techniques conduisant à la production d'expressions arithmétiques dans le cas de la résolution d'un problème de division :

- $\tau_{RP\_:\_mult}$ consiste à déterminer le quotient par essais-erreurs et encadrement du dividende par deux multiples du diviseur ; la technologie de cette technique est $\Theta_{div\text{-}euc}$. Le modèle mathématique sous-jacent de cette technique de production rejoint celui de $\tau_{RP\_op\text{-}trou}$; déterminer la valeur de x dans l'opération à trous a × x = b pouvant se faire par essais erreurs.

-$\tau_{RP\_:\_sous}$ repose sur la définition de la division comme soustractions (ou éventuellement additions) successives du diviseur. Les expressions arithmétiques produites sont des soustractions successives du diviseur au dividende (ou des soustractions de multiples du diviseur). Il est par conséquent aussi possible de modéliser le problème de façon additive par des additions successives du diviseur (ou de ses multiples) permettant de retrouver le dividende.

Ces deux techniques mettent en jeu des expressions arithmétiques, mais ne sont pas celles attendues en fin d'école. Enfin, la technique de comptage τ_{RP_compt} reposant encore sur un « modèle collection » consiste à réaliser des groupements ou à partager une collection, puis à compter chacun des éléments de la collection dans une part ou le nombre de groupements ; elle ne relève pas du cycle 3.

Par exemple, dans le problème de division-partition suivant : « Je possède 120 euros. Une place de cinéma coûte 8 euros, combien puis-je acheter de places ? », les différentes techniques conduisent alors à des expressions arithmétiques différentes :

- τ_{RP_calc} conduit à 120 : 8 = ... ; la convocation d'une praxéologie de calcul permet alors de donner le résultat ;

- $\tau_{RP\_op\text{-}trou}$ conduit à 8 × .... = 120 ; la détermination de la valeur manquante peut ensuite être déterminée en transformant cette relation en une relation équivalente : 120 : 8 = ... ou en procédant par des essais-erreurs successifs (ce qui rejoint alors $\tau_{RP\_:\_mult}$) ;

- $\tau_{RP\_:\_mult}$ mène à l'écriture de multiples du diviseur permettant l'encadrement du dividende ; par exemple 8 × 12 = 96 ; 8 × 13 = 104 ... 8 × 15 = 120 ;

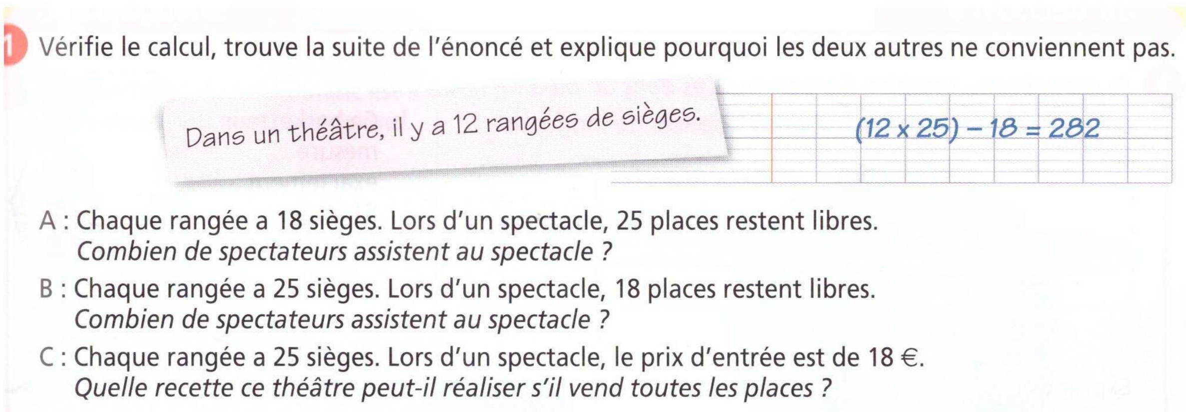
- $\tau_{RP\_:\_sous}$ conduit à des soustractions successives de 8 (ou d'un multiple de 8) à partir de 120 ou des additions successives de 8 (ou de multiples) à partir de 0.
- τ_{RP_compt} consiste à faire des paquets de 8 jusqu'à atteindre 120 ; elle est non idoine à ce niveau scolaire.

Nous concluons la description de cette première OMR par une remarque concernant la dénotation des expressions produites, en particulier avec les différents statuts du signe égal : τ_{RP_calc} conduit à la production d'une expression arithmétique amenant à un calcul, le signe égal ayant dans ce cas le statut d'annonciateur de résultat. Ce n'est pas le cas avec $\tau_{RP\_op\text{-}trou}$ qui conduit à l'écriture d'une opération à trous dans laquelle le signe égal à un statut d'équivalence et qui demande soit des techniques de calcul spécifiques (comme l'addition à trous), soit une réécriture de l'expression en utilisant les opérations inverses pour trouver le nombre manquant, ou encore de procéder par essais successifs.

Il n'est pas attendu dans les programmes de l'école primaire que les élèves entrent dans un formalisme avancé concernant la résolution de problèmes, en particulier qu'ils écrivent en ligne sous la forme d'une unique expression arithmétique les différents calculs réalisés dans le cas de problèmes relevant à la fois de structures additives et multiplicatives. En revanche, il est attendu que les modèles employés pour résoudre des problèmes arithmétiques de réinvestissement soient ceux correspondant à τ_{RP_calc} (et éventuellement, selon les types de problèmes à $\tau_{RP\_op\text{-}trou}$), plutôt que ceux correspondant à $\tau_{RP\_:\_sous}$ ou $\tau_{RP\_:\_mult}$ et encore moins à τ_{RP_compt} dont la portée est très réduite ; c'est en ce sens que nous comprenons que « la résolution de problèmes doit permettre de renforcer la maîtrise du sens et de la pratique des opérations » (Programmes cycle 3 - 2008). Nous soulignons enfin qu'à la différence des autres techniques, τ_{RP_compt} ne conduit pas à la production de relations arithmétiques et est plutôt liée à des modes de représentation figurative ou analogique des collections en jeu dans le problème.

I.1.3 T_{RP_ass} : associer une expression arithmétique à un problème

Il s'agit d'un type de tâche spécifique d'un certain type de question dans lequel il faut associer une expression arithmétique à un problème ou retrouver l'expression arithmétique correspondant à la modélisation du problème.


1 Vérifie le calcul, trouve la suite de l'énoncé et explique pourquoi les deux autres ne conviennent pas.

Dans un théâtre, il y a 12 rangées de sièges.

$(12 \times 25) - 18 = 282$

A : Chaque rangée a 18 sièges. Lors d'un spectacle, 25 places restent libres.
Combien de spectateurs assistent au spectacle ?

B : Chaque rangée a 25 sièges. Lors d'un spectacle, 18 places restent libres.
Combien de spectateurs assistent au spectacle ?

C : Chaque rangée a 25 sièges. Lors d'un spectacle, le prix d'entrée est de 18 €.
Quelle recette ce théâtre peut-il réaliser s'il vend toutes les places ?

Figure 3 - Extrait de J'apprends les maths CM2 (Brissiaud & al. 2010a, p. 46)

Nous considérons qu'il s'agit d'un type de tâche de reconnaissance plutôt que de production d'expressions arithmétiques ; la production étant composée de la reconnaissance du modèle et d'une conversion de l'énoncé du problème dans le mode de représentation des écritures arithmétiques (le choix du mode de représentation étant néanmoins laissé à l'initiative de l'élève) ; il n'y a donc pas de choix de technique ici, celle attendue étant τ_{RP_calc} avec la technologie $\Theta_{RP\_Prod\_ea}$.

Si les quatre opérations sont considérées ici sous un aspect outil, comme des modèles permettant de résoudre un problème, nous les abordons dans l'OMR 3 sous un aspect objet à travers le calcul posé et le calcul réfléchi. Nous reviendrons alors sur la façon dont l'enseignement des techniques opératoires de la division fait appel à la définition de l'opération à travers celle des soustractions successives et des multiplications par encadrement du dividende ; ces approches ne sont pas sans rapport avec les techniques $\tau_{RP\_:\_sous}$ et $\tau_{RP\_:\_mult}$ évoquées précédemment.

II ÉTUDE DE L'OMR2 : PRATIQUER LA NUMÉRATION DÉCIMALE

Pour l'étude de cette OM, nous repartons du travail de Tempier (2013) qui structure l'étude de l'OMR « connaissance des nombres entiers » sous la forme de trois OML :

> « - Une OML qui comprend les types de tâches mettant en jeu le nombre sous son aspect cardinal (principalement dénombrement et comparaison de collections) ;
> - Une OML qui comprend les types de tâches mettant en jeu le nombre sous son aspect ordinal (comparer, ranger, placer des nombres sur une droite graduée, etc.) ;
> - Une OML qui comprend les types de tâches de traductions d'écritures. » Tempier (2013, p. 43)

Tempier (2013) distingue deux types de tâches dans les traductions d'écritures :
- les traductions canoniques d'écritures qui associent l'écriture chiffrée d'un nombre à une autre de ses représentations sous forme canonique (EUNC, EAPDC, APDC et NP) ou au nom du nombre (numération parlée) ;
- les conversions d'écritures qui regroupent les conversions entre unités dans un même registre et les traductions entre l'écriture chiffrée du nombre et une autre de ses représentations sous forme non canonique (EUN, EAPD, EPD). Le terme de conversion ici n'est pas employé au sens de Duval (2006) : il ne s'agit pas de conversion de registres, mais de tâches de conversion d'unités, comme elles peuvent exister dans le système métrique.

Une telle structure permet ainsi de prendre en compte à travers deux OML ce qui relève des problèmes amenant à l'écriture d'un nombre (pour anticiper, pour mémoriser, etc.) dans des situations de dénombrement ou de repérage et que nous n'avons pas considéré dans l'OMR 1. Par ailleurs, comme nous l'avons déjà souligné à plusieurs reprises, les relations entre les unités de numération et l'écriture chiffrée des nombres entrent régulièrement en jeu pour justifier les techniques de calcul ; une telle structure, par le biais des types de tâches de traduction d'écritures, permet d'étudier ces relations en prenant en compte les techniques associées à ces traductions. Cette structure distingue ce qui pourrait relever de l'aspect ordinal du nombre, de la relation d'ordre et de l'aspect cardinal ; ce qui répond aux besoins de notre étude. Même si nous évoquons la numération parlée à plusieurs reprises dans la description des praxéologies, l'écriture chiffrée (décimale) reste celle qui retient le plus notre attention, ce qui justifie la dénomination que nous avons choisi pour l'OMR 2 « pratiquer la numération décimale ». Nous avons montré, dans le chapitre précédent, que trois éléments technologiques sous-tendent les praxéologies de la numération décimale, à savoir Θ_{max}, Θ_P et Θ_D et que la technologie Θ_{np} est liée aux règles de fonctionnement de la numération parlée ; nous les exploitons régulièrement dans cette partie.

Le travail de Tempier (2013) nous conduit à considérer l'organisation de l'OMR 2 « Pratiquer la numération » à partir des trois OML définies précédemment ; le Schéma 2, ci-dessous, présente les types de tâches associés à chacune de ces OML.

Le contenu de cette partie repose sur la description de chaque type de tâches avec les techniques et les technologies qui lui sont associées ; comme pour la description des praxéologies de l'OMR 1, nous soulignons les éventuels points de rupture sur les techniques et technologies selon l'évolution de l'enseignement à l'école primaire.

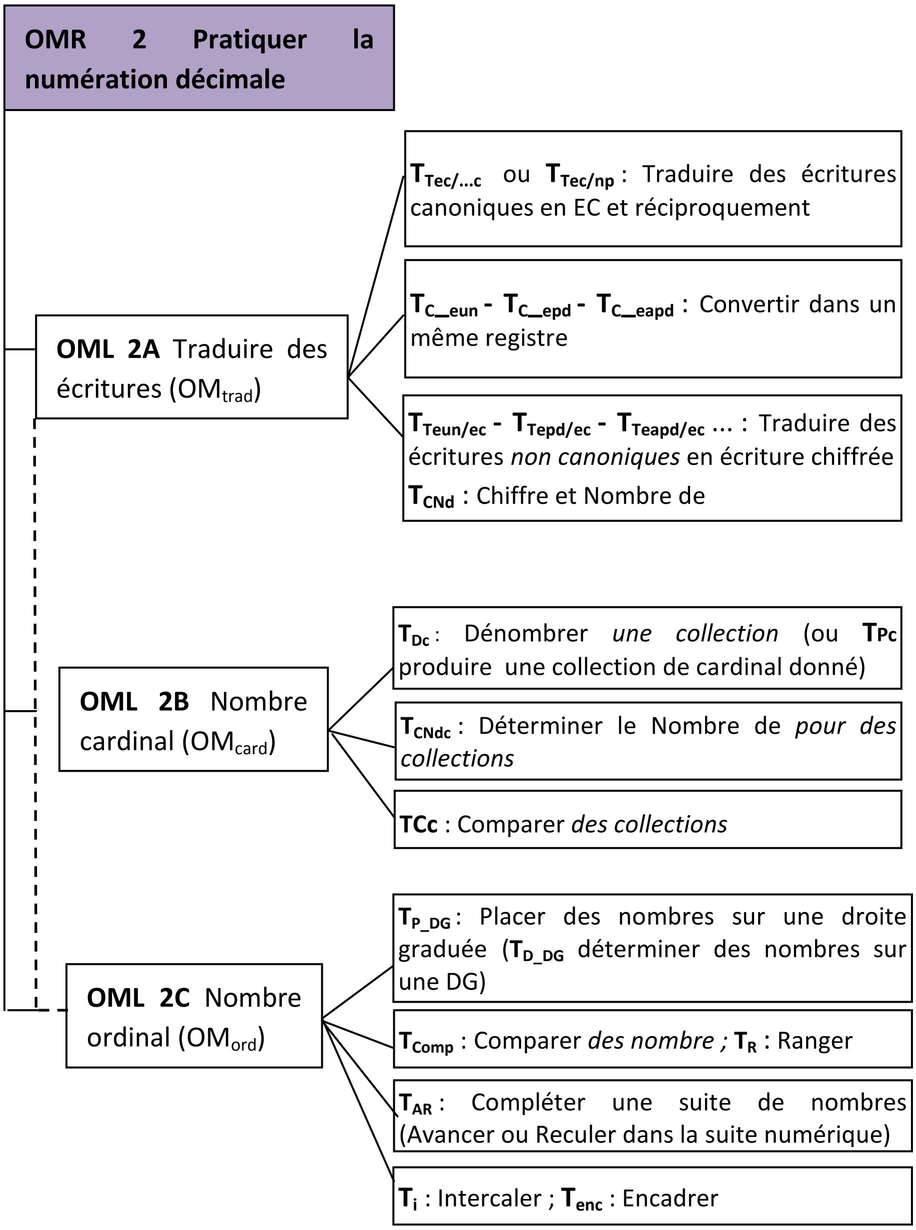


Schéma 2 - Synthèse des types de tâches relativement au travail de Tempier (2013)

II.1 OML 2A : Traductions d'écritures

L'étude de cette praxéologie est réalisée principalement par Tempier (2013) ; nous reprenons ici son travail en présentant les types de tâches, les techniques et les technologies associées, sans les détailler.

II.1.1 $T_{Tec/\ldots c}$ ou $T_{T\ldots c/ec}$: Traduire des écritures canoniques

Les écritures canoniques considérées sont les écritures EUNC, EAPDC, APDC et NP telles que nous les avons décrites dans le chapitre 1 (paragraphe II.3.4)[16] ; nous commençons par décrire les types de tâche de traduction entre l'écriture chiffrée d'un nombre et une de ses écritures canoniques ; le cas de la numération parlée étant traité séparément puisqu'il repose sur des éléments technologiques différents.

II.1.1.i $T_{Tec/eunc}$, $T_{Tec/eac}$, $T_{Tec/epdc}$ (et $T_{Teunc/ec}$, $T_{Teac/ec}$, $T_{Tepdc/ec}$) : traduire l'EC en écriture canonique et réciproquement.

Ce type de tâche appelé aussi « décompositions et recompositions canoniques » est traité par une technique qualifiée par Tempier (2013, p. 45) de technique de position $\boldsymbol{\tau_{pos}}$ qui repose principalement sur l'aspect positionnel ($\boldsymbol{\Theta_p}$) de la numération écrite chiffrée ; $\boldsymbol{\tau_{pos}}$ consiste« à associer à chaque unité sa position dans l'écriture en chiffres (ou réciproquement) par une juxtaposition des nombres d'unités de chaque ordre» (Ibid). Par exemple pour décomposer 32 567 en EUNC, on associe à chaque chiffre l'unité de l'ordre qui lui correspond dans l'écriture chiffrée : 32 567 = 3 dizaines de milliers 2 milliers 5 centaines 6 dizaines 7 unités.

Pour les EPDC et EAPDC, la technique de position peut aussi s'appuyer sur des technologies de calcul : les technologies de calcul de multiplication (écrire des zéros à droite du nombre lorsque l'on multiplie par 10, 100, etc.) et celles de calcul des additions (Chambris 2008, Tempier 2013).

Si Tempier donne ensuite une formulation plus générale des techniques de traduction avec une technique de juxtaposition ($\boldsymbol{\tau_{juxt}}$) que nous décrivons par la suite, nous conservons la distinction entre ces deux techniques pour pouvoir repérer, par la suite, les élèves qui convoquent $\boldsymbol{\tau_{pos}}$ et non $\boldsymbol{\tau_{juxt}}$, en particulier ceux qui étendent la portée de $\boldsymbol{\tau_{pos}}$ à des écritures non canoniques.

II.1.1.ii $T_{Tec/en}$ (et $T_{Ten/ec}$) : associer la désignation en chiffres à la désignation parlée - ou en lettres et réciproquement.

Pour les traductions mettant en jeu l'écriture chiffrée et la numération parlée, la technique de position $\boldsymbol{\tau_{pos}}$ ne peut fonctionner puisqu'il n'y a pas congruence entre le système de la numération écrite chiffrée et celui de la numération parlée. Pour justifier de la technique de traduction, $\boldsymbol{\tau_{Tec/np}}$ (ou $\boldsymbol{\tau_{Tnp/ec}}$) pour ce type de tâche, Tempier (ibid) définit un élément technologique $\boldsymbol{\Theta_{ec/np}}$:

> « Les chiffres 1, 2, …, 9, se disent un, deux, …, neuf, les dizaines se disent dix, vingt, trente, …, quatre-vingt-dix, les centaines se disent cent mais pour une centaine « un cent » ne se dit pas (on dira « cent »), etc. » Tempier (2013, p.46)

Nous ajoutons que les techniques de traduction, pour ce type de tâches, peuvent aussi reposer sur le principe de la numération parlée ($\boldsymbol{\Theta_{np}}$) que nous avons introduit lors de l'étude de la numération parlée dans le chapitre 2.

---

[16] La liste récapitulative des signes utilisés dans la thèse figure après la bibliographie et avant les annexes ; elle est suivie de l'ensemble des technologies, techniques et types de tâches selon chacune des OMR.

II.1.2 T_C : Convertir

II.1.2.i $T_{C\_\ldots}$: Conversion d'écriture dans un même registre (T_{C_eun} - T_{C_epd} - T_{C_eapd})

Le terme de conversion ici n'est pas employé au sens de Duval (2006) : il ne s'agit pas de conversion de registre, mais de tâches de conversion d'unités, comme elles peuvent exister dans le système métrique.

Quelle que soit l'écriture considérée (EUN, EPD, EAPD), la technique de conversion $\boldsymbol{\tau_{conv}}$ (sans repasser par l'écriture chiffrée) repose uniquement sur la technologie $\boldsymbol{\Theta_D}$. Par exemple, pour convertir 32 milliers en dizaines : comme 1 millier = 10 centaines, et 1 centaine = 10 dizaines, par conséquent, 1 millier = 10 dizaines de dizaines = 100 dizaines, d'où : 32 milliers = 3 200 dizaines.

Comme le souligne Tempier (2013), les ostensifs « écriture en unités de numération » et « écriture selon les puissances de 10 » n'ont pas la même valence sémiotique : les techniques associées aux conversions en EPD donnent à voir plutôt des relations multiplicatives par 10, 100 (10 x 10 = 100), et peuvent reposer sur des technologies de calcul. Il en est de même pour les technologies relatives aux techniques avec les EAPD qui peuvent être interprétées comme des technologies de calcul additives, alors que les technologies associées aux conversions avec les EUN donnent à voir uniquement les relations entre les différentes unités (10 dizaines = 1 centaine) et ne peuvent être interprétées autrement.

Selon les écritures utilisées, ce ne sont pas les mêmes éléments technologiques qui apparaissent : avec les EPD, ce sont plutôt des technologies de calcul qui sont mises en avant, dans lesquelles l'associativité et la commutativité de la multiplication ($\boldsymbol{\Theta_{ass\_\times}}$ et $\boldsymbol{\Theta_{comm\_\times}}$) interviennent pour légitimer les transformations d'écritures.

II.1.2.ii $T_{T\ldots/\ldots}$: Traduire des écritures non canoniques en écriture chiffrée et réciproquement ($T_{Teun/ec}$ - $T_{Tepd/ec}$ - $T_{Teapd/ec}$ (et $T_{Tec/eun}$ - $T_{Tec/epd}$ - $T_{Tec/eapd}$)

Les écritures concernées ont au moins un ordre pour lequel il y a plus de dix unités (sinon, il s'agit d'une écriture canonique, ce qui relève de $\boldsymbol{T_{Tec/\ldots c}}$ ou $\boldsymbol{T_{T\ldots c\ /ec}}$). Pour résoudre ce type de tâche, Tempier définit une technique de juxtaposition $\boldsymbol{\tau_{juxt}}$ qui généralise $\boldsymbol{\tau_{pos}}$ et qui est décrite de la façon suivante :

> « La technique consiste en une association des nombres d'unités de chaque ordre à leur position dans l'écriture en chiffres par juxtaposition. Cette juxtaposition ne peut se faire que sous les trois conditions suivantes (s'appuyant sur les technologies $\boldsymbol{\Theta_P}$ et $\boldsymbol{\Theta_D}$) :
> - respect du rang de chaque unité dans l'écriture en chiffres (les unités simples s'écrivent au premier rang à partir de la droite, les dizaines au deuxième, etc.), ce qui peut nécessiter de modifier l'ordre dans lequel les unités sont données avant de faire la juxtaposition des chiffres dans l'écriture chiffrée ;
> - présence de chaque unité (jusqu'à l'unité de plus grand ordre) dans l'écriture en chiffres, ce qui peut nécessiter d'utiliser le chiffre 0 pour marquer l'absence d'unités isolées ;
> - présence de nombres à un seul chiffre à chaque rang de l'écriture en chiffres, ce qui peut nécessiter de faire des conversions entre unités. » Tempier (2013, p. 49)

Le type de tâches « multiplier un nombre par une puissance de 10 » peut alors être considéré comme relevant de $\mathbf{T}_{\mathbf{Tepd/ec}}$ et être résolu grâce à $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{juxt}}$; dans ce cas spécifique, la technique de juxtaposition peut être mise en relation avec une technique spécifique $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{multPD}}$ consistant à ajouter, à droite de l'écriture chiffrée du nombre, le nombre de zéros correspondant à la puissance de 10.

Donner le Nombre de (et le chiffre des) : $\mathbf{T}_{\mathbf{CNd}}$

Ce type de tâche consiste à donner le nombre d'unités d'un certain ordre ou le chiffre des unités d'un ordre donné. Il relève bien d'une traduction $\mathbf{T}_{\mathbf{ec/eun}}$ puisqu'une des techniques possibles est de convertir le nombre d'unités simples dans l'unité voulue. Par exemple, pour trouver le nombre de centaines dans 15 468, on peut convertir de la façon suivante : 15 468 = 154 centaines + 68 unités (ou décomposer de façon similaire avec les puissances de 10 ou avec une décomposition additive) ; ce qui revient à tronquer l'écriture du nombre au rang voulu, qui correspond à ce que Tempier désigne sous le terme de technique de troncature : $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{tronc}}$.

De la même façon que nous avons défini $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{multPD}}$, il est possible de définir $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{divPD}}$, pour la division euclidienne d'un nombre par une puissance de 10. La technique de troncature $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{tronc}}$ pouvant être mise en relation avec $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{divPD}}$.

Nous signalons enfin, pour conclure cette OML portant sur les conversions d'écritures, l'existence d'un dernier type de tâche : le changement de base. Peu pratiquées actuellement à l'école primaire, les tâches demandant de passer d'une écriture en base 10 à une écriture en base n (ou réciproquement) (Chambris, 2012a) peuvent intervenir dans le contexte des grandeurs, particulièrement dans le système de mesure des durées ; les conversions s'effectuant dans des bases différentes de la 10 que ce soit pour les conversions d'heures en jour (base 24) ou d'heure en minutes, de minutes en secondes, etc. (base 60). Nous n'incluons pas ce type de tâche dans notre étude.

II.2 OML 2B : Nombre cardinal

Cette OML permet de prendre en compte les problèmes mobilisant un nombre sous un aspect cardinal, lorsqu'il intervient en tant qu'outil (pour anticiper, pour mémoriser) ; les types de tâches portent donc exclusivement sur des collections.

II.2.1 $\mathbf{T}_{\mathbf{Dc}}$: Dénombrer une collection (ou $\mathbf{T}_{\mathbf{Pc}}$: produire une collection de cardinal donné)

Pour rappel, la collection concernée peut être représentée (fixe) ou matérielle (déplaçable), organisée (totalement, partiellement ou pas du tout) ; on se limite aux tâches pour lesquelles il faut écrire le cardinal de la collection en chiffres (et réciproquement) et dans le cadre de notre travail et au niveau scolaire où nous nous plaçons, à des collections qui sont représentées et organisées ou partiellement organisées (Figure 4 avec une collection représentée organisée).

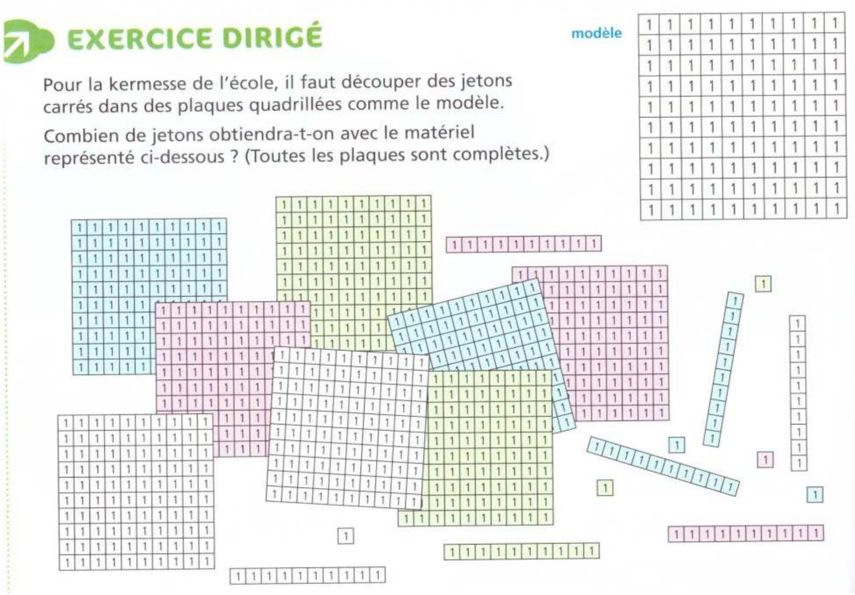


Figure 4 - Extrait Euromaths CM1 (Peltier &al. 2009 c, p. 10) - Exemple de tâche de dénombrement de collection

Techniques et technologies attendues en fin d'école :

$\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}ec}}$: l'écriture chiffrée est obtenue à partir d'un codage de la quantité lorsque les groupements sont organisés de manière maximale. Il n'est pas utile de recourir explicitement aux unités de numération ni au nom du nombre, mais il est nécessaire pour effectuer le codage de connaitre l'ordre de chacun des groupements (pour utiliser le principe de position $\boldsymbol{\Theta_P}$) et que ceux-ci soient maximaux ($\boldsymbol{\Theta_{max}}$). Si on se réfère à une représentation du nombre (EUN ou EPD), cette technique s'apparente à $\boldsymbol{\tau_{juxt}}$.

$\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}calc}}$: plutôt que d'utiliser les principes de la numération décimale de position, il est possible de recourir à une technique s'appuyant sur les EPD et qui peut donner à voir des technologies de calcul, comme nous l'avons déjà évoqué.
Dans l'exemple de la Figure 4, on aurait alors : $8 \times 100 + 7 \times 10 + 6 = 800 + 70 + 6 = 876$.

Autres techniques :

Mounier & Pfaff (2014) distinguent, en plus des précédentes, deux techniques reposant sur la numération parlée ($\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}np}}$).

$\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}np\text{-}add}}$[17] : les groupements réalisés ne sont pas nécessairement maximaux ; on égraine la comptine avec les unités de l'ordre le plus élevé, puis avec l'ordre immédiatement inférieur, puis on convoque la tâche de traduction $\boldsymbol{T_{np/ec}}$ pour obtenir l'écriture chiffrée du nombre. Par exemple, sur l'extrait précédent *: « cent ; deux-cents ; trois-cents...huit-cents ; huit-cent-dix ; huit-cent-vingt ;... huit-cent-soixante-dix ; huit-cent-soixante-et-onze...huit-cent-soixante-seize »* que l'on traduit ensuite avec l'écriture chiffrée 876.

$\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}np\text{-}mult}}$: la collection est organisée avec des groupements maximaux. Il s'agit de compter indépendamment le nombre de groupements de chaque ordre un à un et de transcrire le nom du

[17] Le nom de la technique réfère à l'interprétation de la numération parlée : une interprétation additive dans le premier cas et une interprétation multiplicative dans le second. Nous renvoyons à Mounier (2010) et à Mounier & Pfaff (2014) pour la description de ces deux interprétations.

nombre en EC. A partir de l'extrait précédent : *« un ; deux ; trois...huit » cents ; « un ; deux ; trois...sept » dizaines ; « un ; deux... ; six » ; « huit-cent-soixante-seize ».*

Ces deux techniques se révèlent inefficaces lorsque le nombre d'éléments de la collection est important ou que les groupements ne sont pas faits de manière maximale (pour $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{Dc\text{-}np\text{-}mult}}$ notamment). Les deux autres techniques, attendues en fin d'école et reposant sur l'écriture chiffrée, ont une portée plus grande. Enfin, la technique consistant en un comptage en unités simples n'est pas celle attendue à ce niveau d'enseignement, les collections ayant un nombre d'éléments trop important.

II.2.2 T_{CNdc} : Déterminer le *Nombre de* pour des collections

Il s'agit de déterminer le « nombre de... » d'une collection donnée. Pour ce faire, il est possible de convoquer $\mathbf{T_{Dc}}$ et de déterminer l'écriture en chiffres du cardinal d'une collection à l'aide de $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{Dc\text{-}ec}}$, puis ensuite d'utiliser la technique de troncature $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{tronc}}$. Il est aussi envisageable de déterminer directement le « nombre de... » à partir de la représentation de la collection, organisée en groupements maximaux ; dans ce cas, le nombre d'unités de l'ordre voulu est obtenu en convertissant le nombre des unités des rangs supérieurs.

Les tâches « déterminer un ordre de grandeur du cardinal d'une collection » relèvent aussi de ce type de tâches ; il ne s'agit pas ici d'aborder la question de l'estimation d'une quantité (Fayol 2013, p.40), mais d'un point de vue mathématique, de déterminer un ordre de grandeur du cardinal avec une certaine précision. Ce qui revient, selon l'estimation choisie, à donner le nombre de dizaines, de centaines, etc. et par conséquent relève de $\mathbf{T_{CNdc}}$.

II.2.3 T_{Cc} : Comparer des collections

En fin d'école, la plupart des comparaisons s'effectue à partir d'écritures chiffrées (ce que nous aborderons dans le paragraphe suivant sur l'aspect ordinal du nombre), ce type de tâche étant peu présent sur les collections dont le cardinal est supérieur à 100, les collections devenant complexes à représenter. Il est néanmoins possible d'utiliser des techniques spécifiques et ayant une portée très faible de comparaison terme à terme ou groupement par groupement, sans passer par l'écriture chiffrée du cardinal de la collection.

II.3 OML 2C : Nombre ordinal

Nous poursuivons dans cette praxéologie le travail amorcé par Tempier (2013, p. 54) en détaillant les techniques et technologies relatives à chacun des types de tâches ; c'est aussi dans le premier type de tâches que nous considérons les problèmes conduisant à la production de l'écriture d'un nombre pour repérer une position (comme nous avons pu le faire avec les problèmes de dénombrement dans OML2B).

II.3.1 T_{P_DG} : Placer des nombres sur une droite graduée (ou T_{D_DG} déterminer des nombres correspondant à une graduation)

La droite graduée est un point d'appui important pour la compréhension des fractions et des nombres décimaux, mais pour les nombres entiers et surtout les grands nombres, « la construction d'une droite numérique avec les élèves jusqu'au million, puis au milliard est un épineux problème » (Durpaire & Mégard 2012, p. 11). Nous précisons que nous nous intéressons ici uniquement à la droite graduée et non à la droite numérique vide.

Nous décrivons la technique relativement à $\mathbf{T_{P\_DG}}$ (Placer des nombres sur une droite graduée) et nous ne décrivons que le cas où les graduations sont données en puissances de 10 ; ce qui correspond à des tâches accompagnées de droites semblables à celle ci-dessous (Schéma 3) et pour laquelle il est demandé de placer « deux-mille trois-cents » (à partir du nom du nombre) ou 2 300 (à partir de l'écriture chiffrée).

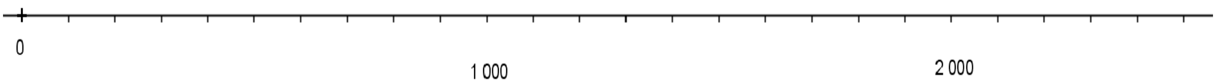


Schéma 3 - Droite graduée de 100 en 100

Quelle que soit la tâche, il est nécessaire de déterminer le pas de la graduation s'il n'est pas indiqué : dans l'exemple ci-dessus comme 10 graduations séparent deux nombres qui diffèrent d'un millier, le pas est d'une centaine (1 millier = 10 centaines).

- à partir de l'écriture en chiffres : une fois le pas déterminé, la traduction du nombre en écriture en puissances de dix canonique par $\mathbf{T_{Tec/epdc}}$ grâce à la technique $\boldsymbol{\tau_{pos}}$ (ou plus généralement $\boldsymbol{\tau_{juxt}}$) permet de placer le nombre (par exemple sur la droite précédente, pour placer 2300 : l'écriture en EPDC de 2300 amène $2300 = 2 \times 1000 + 3 \times 100$, ce qui revient à placer le nombre trois graduations après 2 000).

- à partir du nom du nombre : pour placer un nombre sur une droite graduée, il s'agit de repérer les mots-segments principaux (qui peuvent éventuellement correspondre aux graduations principales) et les segments secondaires, puis à l'aide des principes qui régissent la numération parlée ($\boldsymbol{\Theta_{np}}$), de positionner le nombre. Par exemple, à partir de la droite ci-dessus, « deux-mille-trois-cents », correspond à deux fois mille + trois fois cent (d'après $\boldsymbol{\Theta_{np}}$), et par conséquent, il se situe trois graduations après le nombre 2 000. Il est aussi possible de convoquer un type de tâche de traduction $\mathbf{T_{Tnp/ec}}$ pour se ramener à la technique précédente.

II.3.2 $\mathbf{T_{Comp}}$: Comparer - $\mathbf{T_R}$: Ranger

Comparer ou ranger des nombres consiste à déterminer la relation d'ordre qui existe entre eux (nombres égaux, nombre inférieur ou supérieur à l'autre) ; nous distinguons les types de tâches de comparaison de celles relevant du rangement puisque les techniques permettant de ranger (ou d'ordonner) les nombres s'appuient sur un élément technologique supplémentaire, la transitivité de la relation d'ordre $\boldsymbol{\Theta_{Def\_RO}}$ sur les nombres entiers : ce que nous précisons par la suite.

Nous nous limitons, dans notre description, aux types de tâches qui ne font intervenir qu'un même type de désignation du nombre dans la comparaison ou le rangement ; une tâche qui demande de comparer deux nombres écrits dans des registres différents (l'un en écriture chiffrée et l'autre en unités de numération) convoque un type de tâche de traduction ($\mathbf{T_{Teun/ec}}$ par exemple) étudié précédemment. Notons aussi que nous nous plaçons en fin de cycle 3, avec des nombres entiers supérieurs à 100 ; l'utilisation de la file numérique pour comparer deux nombres en utilisant leur position dans la file numérique n'est pas retenue comme une technique attendue à ce niveau de la scolarité.

II.3.2.i <u>T_{Comp} : Comparer</u>

Nous distinguons deux types de tâches (si les nombres sont écrits en chiffres ou désignés oralement) et précisons les techniques et technologies attendues en fin d'école.

$T_{Comp\ EC}$: Comparer deux nombres en écriture chiffrée

Techniques et technologies attendues en fin d'école :

La principale technique de comparaison de deux nombres à partir de leurs écritures chiffrées est la technique de comparaison chiffre à chiffre $\boldsymbol{\tau}_{\textbf{Comp-EC}}$. Elle consiste d'abord à comparer le nombre de chiffres qui composent chacune des écritures chiffrées (le nombre le plus grand a le plus de chiffres dans son écriture) ; si le nombre de chiffres de l'écriture chiffrée est identique, chacune des unités de même ordre des deux nombres est comparée successivement à partir des unités de plus haut ordre (à gauche dans l'écriture chiffrée).

Cette technique peut être produite à partir de $\boldsymbol{\tau}_{\textbf{tronc}}$ et justifiée grâce au principe de maximalité $\boldsymbol{\Theta}_{\textbf{max}}$ et à la définition même de la relation d'ordre entre deux entiers $\boldsymbol{\Theta}_{\textbf{Def\_RO}}$. Par exemple, pour comparer 52 238 et 52 426 : 52 238 = 522 centaines + 38 unités et 52 426 = 524 centaines et 26 unités (en appliquant $\boldsymbol{\tau}_{\textbf{tronc}}$) ; le nombre de centaines étant maximal (il n'y a pas de conversion possible de dizaines en centaines), le nombre composé de 524 centaines est donc supérieur à celui composé de 522 centaines. Ce qui revient, si on applique $\boldsymbol{\tau}_{\textbf{Comp-EC}}$, à comparer le troisième chiffre en partant de la gauche ; les deux nombres étant de même taille et les deux premiers chiffres composant l'écriture chiffrée de chacun des deux nombres étant identique.

Nous ne définissons pas de technique spécifique pour des comparaisons avec des nombres en EUNC ou en EPDC puisqu'elles se rapportent à celle décrite précédemment ; la technique avec EUNC peut être considérée comme un élément technologique de la technique $\boldsymbol{\tau}_{\textbf{Comp-EC}}$. En revanche, il est nécessaire que l'écriture du nombre soit réduite pour pouvoir effectuer cette technique et comparer le nombre d'unités ordre par ordre. En effet : 5 centaines 26 dizaines est supérieur à 6 centaines 4 dizaines, alors que 5 est inférieur à 6, si on compare uniquement le nombre de centaines dans ces écritures non réduites.

$T_{Comp\ np}$: Comparer deux nombres désignés oralement (ou écrits en lettres)

Techniques et technologies attendues en fin d'école :

À la différence de la technique de comparaison avec des écritures chiffrées, celle de la désignation parlée $\boldsymbol{\tau}_{\textbf{Comp-np}}$ ne peut s'appuyer sur la comparaison successive des mots énoncés, ni sur la longueur de la désignation : ainsi « trois millions » sera supérieur à « dix-huit-mille-quatre-cent-quatre-vingt-cinq ». La technique de comparaison $\boldsymbol{\tau}_{\textbf{Comp-np}}$ que nous décrivons se fait sans référence à la numération écrite chiffrée ; sinon il s'agit de convertir la désignation orale en écriture chiffrée et de traiter la comparaison avec $\boldsymbol{\tau}_{\textbf{Comp-EC}}$. Les éléments technologiques se réfèrent donc à l'analyse syntaxique de la numération parlée menée dans le chapitre 2 et à l'élément $\boldsymbol{\Theta}_{\textbf{np}}$.

$\boldsymbol{\tau}_{\textbf{Comp-np}}$ consiste à repérer dans l'ordre d'énonciation des noms des nombres, les mots-segments principaux (milliards, millions, mille, cents), puis secondaires (cent, vingt) et à comparer les nombres correspondants aux mots qui précèdent ces mots-segments : par exemple, pour comparer « deux-**millions**-vingt-trois-**mille**-sept-**cent**-cinq » avec « deux-**millions**-**cent**-trente-trois-**mille**-quatre-**cent**-huit », on repère que le nombre de millions désigné par le mot « deux » est identique, le nombre de milliers est de vingt-trois dans le premier nombre et de cent-trois dans le second ; la présence du mot-segment « cent » dans le second permet de conclure sur le fait que le second nombre est supérieur au premier. La justification de cette technique repose principalement sur $\boldsymbol{\Theta}_{\textbf{np}}$ et sur $\boldsymbol{\Theta}_{\textbf{Def\_RO}}$.

Cette technique de comparaison semble être attendue, du moins être possible sans forcément être explicitée, puisque la lecture des nombres est considérée comme un exercice « indispensable » dans le sens où « elle facilite les comparaisons » (Durpaire & Mégard 2012, p. 11). Nous ne la détaillons pas davantage puisque notre travail se situe davantage autour de la numération décimale que de la numération parlée.

II.3.2.ii T_R : Ranger des nombres entiers écrits en chiffres

Pour les types de tâches relevant du rangement de nombres, nous nous limitons aux nombres écrits en chiffres ; les tâches de rangement sont rarement proposées à partir des désignations parlées uniquement ni à partir d'EUN ou EAPD ou EPD. Nous ne distinguons pas l'ordre dans le rangement (croissant ou décroissant), puisque cela n'influence pas la technique.

Techniques et technologies attendues en fin d'école :

Les techniques de rangement reposent sur celle de la comparaison $\boldsymbol{\tau}_{\textbf{Comp-EC}}$, qui est répétée plusieurs fois et conduit à des relations d'ordre entre deux entiers ; la transitivité étant une des propriétés de la relation d'ordre, $\boldsymbol{\Theta}_{\textbf{Def\_RO}}$ assure ensuite la relation d'ordre sur tous les nombres.

$\boldsymbol{\tau}_{\textbf{R}}$ pourrait alors se décrire de la façon suivante : pour ranger dans l'ordre croissant une suite de nombres écrits en chiffres, une première étape consiste à les trier selon leur taille (ceux qui ont le plus grand nombre de chiffres dans leur écriture sont les plus grands), puis pour les nombres de même taille, à les ordonner selon le premier chiffre de leur écriture, puis selon le second, etc. en s'appuyant sur $\boldsymbol{\tau}_{\textbf{Comp-EC}}$. La transitivité de la relation d'ordre apparaît dans ce type de tâche comme un élément technologique supplémentaire par rapport à la comparaison d'entiers, ce qui justifie le fait de ne pas les regrouper au sein d'un même type de tâches.

L'utilisation de la droite graduée comme ostensif pour les tâches de comparaison (et à plus forte raison de rangement) conduit à une autre technique spécifique ($\boldsymbol{\tau}_{\textbf{Comp-EC\_DG}}$ et $\boldsymbol{\tau}_{\textbf{R\_DG}}$) : les nombres positionnés sur la droite graduée sont ordonnés de façon croissante de la gauche vers la droite si l'axe est orienté de la même façon.

II.3.2.iii $\mathbf{T}_{\textbf{AR}}$: Compléter une suite de nombre (Avancer-Reculer)

Avancer ou reculer dans la suite des nombres ne signifie pas uniquement trouver le prédécesseur ou le successeur d'un nombre, mais aussi compter de 10 en 10, de 100 en 100, etc. en avançant ou en reculant ; les tâches consistant à compter de n en n, de façon générale (sans que n ne soit un multiple de 10), seront traitées dans l'OML relative au calcul réfléchi. Nous ne décrivons les techniques afférentes que pour les types de tâches « avancer » ; elles sont transférables pour les types de tâches « reculer » et reposent sur les mêmes technologies.

Comme pour les types de tâches précédents, nous considérons deux désignations possibles du nombre : sa désignation parlée ou son écriture chiffrée.

$\mathbf{T}_{\textbf{AR-np}}$: Compter de 10^n en 10^n à l'oral (numération parlée)

Proposées en classe sous la dénomination de « jeu du furet » (en référence à différents manuels, Cap Maths ou J'apprends les maths par exemple), ces tâches sont formulées à l'oral et demandent à l'élève de compter en avançant ou en reculant de 10^n en 10^n. La technique utilisée $\boldsymbol{\tau}_{\textbf{AR-np}}$ pour trouver le nombre voulu repose sur les principes de la numération parlée $\boldsymbol{\Theta}_{\textbf{np}}$, en particulier en repérant les mots-segments principaux et secondaires. Lorsque n = 0, c'est-à-dire lorsque que l'on avance dans la suite des nombres de un en un, cela revient à égrainer la suite des noms de nombres.

Avancer dans la suite des nombres avec un pas de 10^n revient par conséquent à compter de 10^n en 10^n ; or, ce que nous avons désigné sous le terme de technique de comptage (**τ_{compt}**) ne relève que du cas où n = 0 et apparaît comme un cas particulier de **$\tau_{AR\text{-}np}$**.

$T_{AR\text{-}ec}$: Compléter une suite de nombres de 10^n en 10^n (pour des nombres en écriture chiffrée)

L'exemple de tâche suivant montre que, quelle que soit la technique que l'on emploie, il faut d'abord repérer, dans la régularité des écritures, le pas de comptage si celui-ci n'est pas donné.

Pour chaque suite de nombres, complète les pointillés par le nombre manquant : *256 - 356 - 456 - ....* *8 413 - 8 403 - ..... - 8 383*

Techniques et technologies attendues en fin d'école :

En restant dans le registre des écritures chiffrées, une première technique consiste à ajouter 10^n, ce qui revient à ajouter une unité au nombre d'unités du rang n + 1 (à partir de la droite) ; l'écriture chiffrée du nombre est ensuite obtenue à l'aide de **τ_{juxt}** :
- si le nombre d'unités au rang n + 1 est inférieur strictement à 9, il suffit de lui ajouter 1 ;
- s'il est égal à 9 : il faut ajouter une unité au nombre d'unités du rang n + 2, le nombre d'unités au rang n+1 devenant alors 0 ;

Cette technique revient à **τ_{juxt}** et repose donc sur les trois principes de la numération écrite chiffrée : **Θ_{max}, Θ_P** et **Θ_D**. Nous ne définissons donc pas de technique spécifique pour ce type de tâche.

Autre technique :

Même si les tâches sont proposées dans le registre des écritures chiffrées, l'utilisation d'une technique basée sur la numération orale reste envisageable avec une double traduction (écrit-oral puis oral-écrit) ; dans ce cas, une première tâche de traduction intervient **$T_{Tec/np}$**, puis **$T_{AR\text{-}np}$** définie juste avant, puis une deuxième tâche de traduction dans le sens inverse : **$T_{Tnp/ec}$**.

II.3.3 T_i : Intercaler des nombres ou T_{enc} : Encadrer des nombres (entre deux dizaines, centaines, …consécutives)

II.3.3.i T_i : intercaler des nombres entiers dans une suite de nombres (en écriture chiffrée)

ℕ étant un ensemble discret, entre deux nombres entiers consécutifs, il n'existe pas de nombre entier naturel. Les tâches d'intercalation dans ℕ ne présentent, par conséquent, que peu d'intérêt puisque si les deux bornes entre lesquelles il est demandé d'intercaler un nombre entier ne sont pas des entiers consécutifs, il suffit de prendre le successeur de la borne inférieure ou le prédécesseur de la borne supérieure pour répondre à la question posée ; ce qui revient alors au type de tâche précédent **T_{AR}** et peut par conséquent être résolu par la technique **τ_{compt}**.

II.3.3.ii T_{enc} : encadrer un nombre entre deux nombres entiers de dizaines, de centaines...

La technique d'encadrement **τ_{enc}** repose sur la technique de troncature : pour un nombre donné, **τ_{tronc}** permet de déterminer le nombre d'unités d'un certain ordre ; ce qui correspond à la borne inférieure de l'encadrement à cet ordre d'après **Θ_{Def_RO}**. La borne supérieure est quant à elle donnée par le successeur du nombre d'unités de cet ordre (d'après **Θ_{max}**).

Par exemple pour encadrer 32 456 entre deux centaines, $\boldsymbol{\tau}_{\text{tronc}}$ permet d'écrire 32 456 sous la forme : 32 456 = 324 centaines 56 unités. Par la définition même de la relation d'ordre, on déduit que 32 456 > 324 centaines. Comme 56 unités est inférieur à 100 (ce qui est assuré par $\boldsymbol{\Theta}_{\text{max}}$), on conclut aussi que 32 456 < 325 centaines. Par conséquent : 324 centaines < 32 456 < 325 centaines.

Il est aussi possible de procéder par des techniques relevant de la numération parlée : nous ne les développons pas ici, mais elles s'appuient sur $\boldsymbol{\Theta}_{\text{Def\_RO}}$ et sur les principes de la numération parlée. Enfin, une droite graduée peut être utilisée comme ostensif permettant d'expliciter la technique $\boldsymbol{\tau}_{\text{enc}}$.

En conclusion, l'étude de l'OMR 2 a permis d'étudier les types de tâches mettant en jeu le nombre et ses différentes représentations, en particulier les écritures chiffrées, les écritures en unités de numération et celles avec des puissances de 10. Nous avons constaté que ces différentes écritures donnent à voir des technologies différentes dans les techniques : les EUN ne montrent que des éléments technologiques relevant des trois principes de la numération, alors que les EPD donnent à voir des technologies reposant sur les propriétés des opérations, ce que nous retrouverons pour les praxéologies de calcul.

Enfin, en ce qui concerne la dénotation des expressions, le signe égal est fréquemment utilisé comme relation d'équivalence entre deux expressions désignant le même nombre ; les types de tâches de composition et de recomposition d'écriture mettant en jeu la symétrie de la relation d'égalité.

III ÉTUDE DE L'OMR3 : CALCULER

Nous précisons à nouveau que nous n'avons pas pris en compte dans notre étude le calcul instrumenté et que, par conséquent, il n'apparait pas dans la structure de cette OM (Schéma 4 page suivante) qui se décompose en deux OML : **OML 3A** relative au calcul posé et **OML 3B** relative au calcul réfléchi.

Nous commençons par décrire les types de tâches de calcul posé (OML 3A) pour lesquelles l'étude des traités de Bezout et de Reynaud a permis de montrer certaines techniques de calcul justifiées par des technologies relevant de la numération. Par ailleurs, commencer la description de l'OMR par les OML de calcul posé permet, lors de la description des OML de calcul réfléchi, de prendre en compte comme technique, celle correspondant au calcul posé, mais effectuée mentalement.

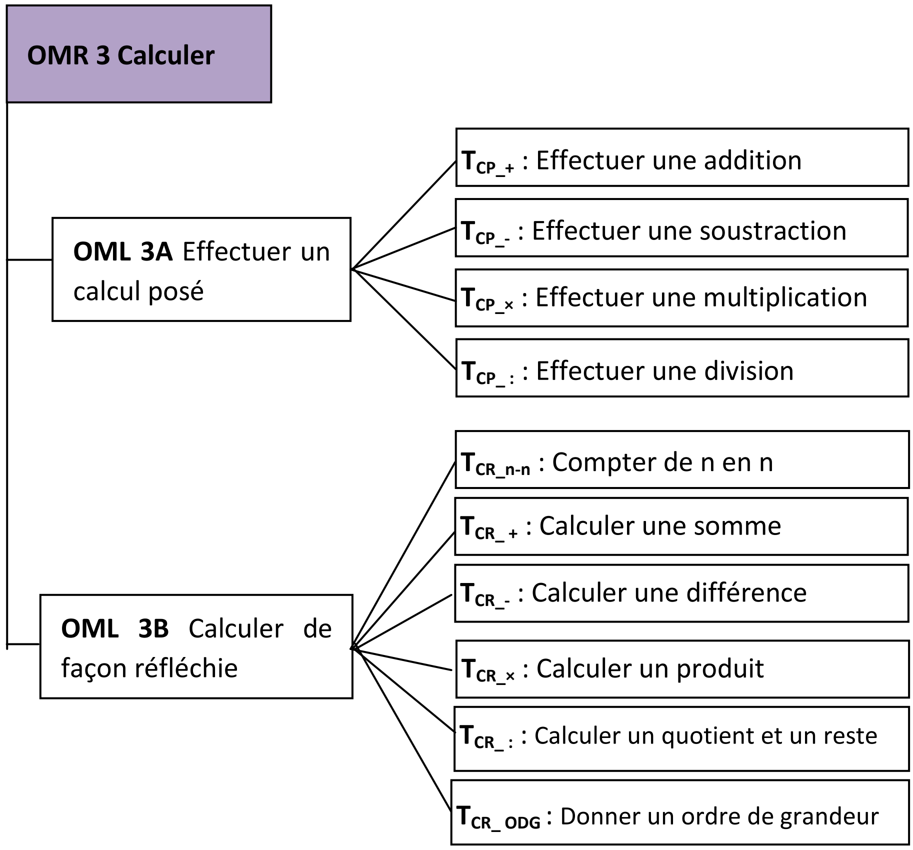


Schéma 4 - Synthèse des types de tâches de l'OMR 3 : Calculer

Le calcul posé qualifie un mode de calcul écrit et automatisé, un calcul posé étant réalisé à partir de la mise en œuvre d'un algorithme de calcul, c'est-à-dire :

> « d'un procédé qui est caractérisé par le fait qu'il se déroule de manière identique quelles que soient les valeurs numériques auxquelles il s'applique. » Peltier & al. (2009b, p. 21)

Le calcul posé diffère alors du calcul réfléchi :
- même si plusieurs techniques peuvent exister dans le calcul posé, la technique sur laquelle repose l'algorithme est la même et elle conserve son efficacité quels que soient les nombres en jeu dans le calcul. Ce n'est pas le cas pour le calcul réfléchi : comme nous l'avons observé avec l'étude des manuels de Bovier-Lapierre (1868) et André & Haillecourt (1872), les techniques de calcul réfléchi sont multiples. L'élève doit donc sélectionner une technique adaptée aux nombres en jeu dans le calcul en visant son efficacité ;
- les technologies qui sous-tendent les techniques de calcul posé diffèrent de celles du calcul réfléchi. Comme nous l'avons déjà montré, les technologies du calcul posé sont liées aux propriétés de la numération décimale et à certaines propriétés des opérations (associativité, commutativité ou distributivité) ; au-delà de ces technologies, les techniques de calcul réfléchi mobilisent des propriétés arithmétiques des nombres et des opérations qui conduisent à des décompositions et recompositions autres que celles basées sur la numération décimale. Nous l'explicitons lors de la description des praxéologies dans les paragraphes suivants.

III.1 OML 3A : Effectuer un calcul posé

Nous présentons les praxéologies du calcul posé selon chacune des opérations en mettant en évidence les technologies qui les sous-tendent, mais aussi la façon dont elles sont enseignées en fin d'école et les préconisations éventuelles des programmes ou des ressources les accompagnant ; les manuels et les guides de l'enseignant des différents niveaux de l'école primaire que nous avons consultés sont issus de trois collections : Euromaths (Peltier & al. 2009a, 2009b), Cap Maths (Charnay & al. 2010a, 2010b) et J'apprends les maths (Brissiaud & al. 2010a, 2010b).

III.1.1 T_{CP_+} : Effectuer une addition

La technique de l'addition posée $\boldsymbol{\tau_{CP\_+}}$ est étudiée à partir d'un discours technologique s'appuyant sur les écritures en unités de numération par Tempier (2013), pour laquelle il explique que :

> « la numération intervient à un niveau technologique de justification de la technique ; le principe de position $\boldsymbol{\Theta_P}$ pour justifier l'alignement vertical des chiffres et le principe décimal $\boldsymbol{\Theta_D}$ pour justifier les retenues. » Tempier (2013, p. 55)

Nous ne détaillons pas davantage cette technique classique, que nous avons déjà étudiée lors de l'étude des traités et précisons qu'il n'y a pas d'éléments technologiques relatifs aux propriétés des opérations qui interviennent ici. Le principe de maximalité $\boldsymbol{\Theta_{max}}$, non évoqué par Tempier (2013), justifie le fait que l'on considère des retenues au delà de 10 unités (ce qui peut implicitement relever de $\boldsymbol{\Theta_D}$).

Il est néanmoins possible de repenser cette technique à partir des écritures en EPDC des deux nombres :

$$a = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + ... + a_n \times 10^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i$$
$$b = b_0 \times 10^0 + b_1 \times 10^1 + b_2 \times 10^2 + ... + b_p \times 10^p = \sum_{j=0}^{n} b_j \times 10^j$$

$$a + b = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + ... + a_n \times 10^n + b_0 \times 10^0 + b_1 \times 10^1 + b_2 \times 10^2 + ... + b_p \times 10^p$$
$$a + b = \sum_{k=0}^{\max(n,p)} (a_k + b_k) \times 10^k$$

Si, comme pour les tâches de traduction dans l'OML 2A, les EUN ne laissent à voir que des éléments technologiques relevant de la numération, les EPD en laissent voir pouvant relever de la numération et qui sont identiques à ceux avec les EUN, et d'autres davantage associées aux propriétés de l'addition : comme la commutativité ($\boldsymbol{\Theta_{Comm\_+}}$), l'associativité ($\boldsymbol{\Theta_{ass\_+}}$) ou la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ($\boldsymbol{\Theta_{dist}}$). On retrouve ici le fait que la valence sémiotique des EUN n'est pas la même que celle des EPD : si la technique de calcul posé telle que la décrivent Bezout et Reynaud ou Tempier (2013) est justifiée par des conversions entre unités de numération, elle peut l'être tout autant par des propriétés de l'addition avec des EPD ou des EAPD.

Par exemple :
2 536 + 762 = (2000 + 500 + 30 + 6) + (700 + 60 + 2)
= 2000 + (500 + 700) + (30 + 60) + (6 + 2)
= 2 000 + 1 200 + 90 + 8
= 2000 + 1000 + 200 + 90 + 8
= 3000 + 200 + 90 + 8
= 3298.
Les différentes réécritures peuvent s'appuyer aussi bien sur $\boldsymbol{\Theta_{Comm+}}$, $\boldsymbol{\Theta_{ass+}}$ que sur les techniques de traduction définies dans l'OML 2A.

Techniques et technologies attendues en fin d'école :

La présentation de la technique telle que présentée ci-contre avec retenue correspond à celle présentée comme la plus usuelle en France et pouvant être considérée comme attendue en fin de cycle 3 [18].

$$
\begin{array}{|rrrrr}
 & 1 & & & \\
 & 2 & 5 & 3 & 6 \\
+ & & 7 & 6 & 2 \\
\hline
 & 3 & 2 & 9 & 8
\end{array}
$$

Dans les manuels de CM2 que nous avons consultés, la technique de calcul posé de l'addition réactivée correspond à celle présentée ci-dessus (technique traditionnelle française avec retenue).

Autres techniques :

Dans les documents ressources accompagnant les programmes, Durpaire & Mégard (2010) proposent des dispositions intermédiaires de l'addition posée (Figure 5) menant à des calculs pouvant s'effectuer de gauche à droite ou en sens inverse, si l'on se réfère aux écritures chiffrées ; il est alors possible de commencer d'abord par ajouter les unités d'ordre supérieur (à gauche dans l'écriture chiffrée du nombre), puis celles de l'ordre immédiatement inférieur (technique de gauche à droite, Figure 6) ou en sens inverse de droite à gauche (Figure 6).

Quelle que soit la disposition choisie (Figure 5) et la technique qui lui correspond, les technologies justifiant cette technique sont celles de la numération. Si les dispositions intermédiaires trouvent leur place au début de l'apprentissage, elles sont destinées à évoluer vers celles exposées dans la figure 6, correspondant à la technique attendue en fin d'école.

Paquets de dix	Tout seul
+ 3	4
4	7
+ 7	
1	1
8	1
Calculs développés de gauche à droite (a)	

Paquets de dix	Tout seul
+ 3	4
4	7
+ 1	1
7	
8	1
Calculs développés de droite à gauche (b)	

Paquets de dix	Tout seul
+ 3	4
4	7
7	11
8	1
Calculs développés de façon indifférente (c)	

Figure 5 - Dispositions intermédiaires du calcul posé de l'addition - Extrait de Durpaire & Mégard (2010, p. 45)

Paquets de dix	Tout seul
+ 3	4
4	7
7 8	1
Technique de gauche à droite (a)	

Paquets de dix	Tout seul
+ 3	4
4	7
1 8	1
Technique de droite à gauche (b)	

Paquets de dix	Tout seul
1	
+ 3	4
4	7
8	1
Technique traditionnelle française avec retenue (C)	

Figure 6 - Techniques de calcul posé de l'addition - Extrait de Durpaire & Mégard (2010, p. 45)

[18] Il n'est pas spécifié explicitement que la technique française avec retenue, même si c'est la plus usuelle en France, est celle attendue en fin de cycle 3, les enseignants de cycle 2 pouvant en choisir une autre : « Il est de la responsabilité de l'enseignant de choisir la technique qui leur semble la plus appropriée. La technique choisie gagnerait à être identique en CP et CE1. » (Durpaire & Mégard 2010, p. 45)

III.1.2 T_{CP_-} : Effectuer une soustraction

Trois techniques sont possibles pour effectuer une soustraction posée ; nous les illustrons avec un même exemple 8 053 - 982. Nous nous appuyons à nouveau sur Tempier (2013) pour la description des deux premières techniques et complétons ses propos en citant les éléments technologiques autres que ceux relevant de la numération pouvant légitimer ces techniques.

Techniques attendues en fin d'école :

<u>Technique « par emprunt »</u> (**$\tau_{CP\_-\_emprunt}$**) : elle correspond à celle décrite par Bezout et Reynaud dans les traités ; nous avons déjà explicité qu'elle ne reposait que sur les technologies de la numération.

	$\cancel{8}_7$	$\cancel{0}_{+\cancel{10}\ 9}$	5_{+10}	3
-		9	8	2
	7	0	7	1

Dans l'exemple : comme on ne peut soustraire 8 dizaines à 5 dizaines et puisque l'on ne peut pas convertir directement des centaines en dizaines, on convertit 1 millier en 10 centaines, desquelles on en en emprunte une que l'on convertit en 10 dizaines. On peut alors soustraire 8 dizaines de quinze dizaines et poursuivre la soustraction sur les unités de rang supérieur.

<u>Technique s'appuyant sur la propriété de l'écart constant</u> (**$\tau_{CP\_-\_écart}$**) : comme on ne peut soustraire 8 dizaines de 5 dizaines, on ajoute alors 10 dizaines au premier terme et 10 dizaines, sous la forme d'une centaine au second. On peut alors soustraire 8 dizaines de 15 dizaines.

	8	0_{+10}	5_{+10}	3
-	$_{+1}$	9_{+1}	8	2
	7	0	7	1

Au rang des centaines, on ne peut soustraire 10 centaines de 0 centaines ; on ajoute donc 10 centaines au premier terme et 10 centaines au second (sous la forme d'un millier) et on termine la soustraction.

Si la technique **$\tau_{CP\_-\_emprunt}$** s'appuyant sur la numération ne se justifie que par le principe de position **Θ_P** (pour l'alignement) et le principe décimal **Θ_D** (conversion d'unités d'un rang donnée en unités de rangs inférieurs), cette deuxième technique fait appel à la technologie **$\Theta_{écart}$** (la différence entre deux nombres est inchangée si l'on ajoute (ou si l'on retranche) un même nombre à chacun des deux termes). Dans le cas de cette technique, sur cet exemple, on ajoute 100 aux deux nombres sous la forme de 10 dizaines pour le premier nombre et d'une centaine pour le second ; on recommence en ajoutant ensuite 1 000 aux deux nombres sous al forme de 10 centaines pour le premier terme et d'un millier pour le second.

<u>Technique « addition à trous »</u> (**$\tau_{CP\_-\_add\_trou}$**) : de façon générale, pour calculer la différence entre deux nombres a et b, il s'agit de chercher le nombre à ajouter à b pour obtenir a. Cette technique permet alors de considérer la soustraction comme l'opération inverse de l'addition, ce qui rejoint la définition mathématique de la différence et celle donnée par Reynaud ; nous retrouvons la méthodologie décrite pour faire la preuve d'une soustraction dans les deux traités.

Par exemple : pour calculer la différence entre 8 053 et 982, il faut chercher le nombre à additionner à 982 pour obtenir 8 053.

		9	8	2
+	.....	....	....	.....
	8	0	5	3

Pour obtenir 3 unités, il faut ajouter **1** unité à 2 unités : comme on ne peut ajouter de dizaines à 8 pour en obtenir 5 ; ce qui signifie que l'on va ajouter **7** dizaines pour avoir 15 dizaines, que l'on convertit en une centaine et 5 dizaines. On a donc 10 (9 + 1) centaines, soit 1 millier et 0 centaine. On ajoute donc **0** centaine, puis on ajoute **7** milliers au millier déjà présent. La différence est 7 071.

Nous observons que les technologies de cette technique sont uniquement celles associées à l'addition, à savoir $\mathbf{\Theta_P}$ et $\mathbf{\Theta_D}$ si on raisonne avec les unités de numération.

Autres techniques :

Comme pour l'addition, les ressources accompagnant les programmes (Durpaire & Mégard 2010) présentent des techniques de calcul posé de la soustraction, mais sans spécifier si une technique est plus attendue qu'une autre en fin d'école primaire. Il est seulement précisé, qu'en termes d'enseignement, « il est essentiel de fixer une technique de calcul et de s'y tenir durablement ». Nous retrouvons (Figure 7) les techniques que nous avons présentées précédemment : $\tau_{CP\_-\_emprunt}$, $\tau_{CP\_-\_add\_trou}$, $\tau_{CP\_-\_écart}$, cette dernière étant identifiée comme la technique traditionnelle française ; nous notons aussi la référence systématique à des « paquets de dix » et à des « tout seuls », plutôt qu'à des dizaines et à des unités.

Paquets de dix	Tout seul	Paquets de dix	Tout seul	Paquets de dix	Tout seul	Paquets de dix	Tout seul
~~7~~ 6	1 4	7	4	7	4	7	1 4
− 3	6	1		− 1		− 3	6
		+ 3	6	3	6	1	
3	8	3	8	3	8	3	8
Technique anglo-saxonne de droite à gauche (transformation du premier terme)		Disposition intermédiaire de l'addition à trous (issue de la technique traditionnelle de l'addition)		Technique de l'addition à trous		Technique traditionnelle française avec retenue (différences égales)	

Figure 7 - Techniques de calcul posé de la soustraction - Extrait de Durpaire & Mégard (2010, p. 45)

Techniques et technologies présentes dans les manuels

Nous avions constaté que Bezout et Reynaud ne présentaient qu'une seule technique de calcul posé de la soustraction ($\tau_{CP\_-\_emprunt}$) basée sur les propriétés de la numération. Pour le CM2, Cap Maths, Euromaths et J'apprends les maths réactivent la technique $\tau_{CP\_-\_écart}$ (Figures 8 et 9) et ne se réfèrent pas à $\tau_{CP\_-\_emprunt}$; auparavant l'équivalence entre la soustraction et l'addition à trous est vue à travers des techniques de calcul réfléchi par sauts (avec décomposition additive des nombres).

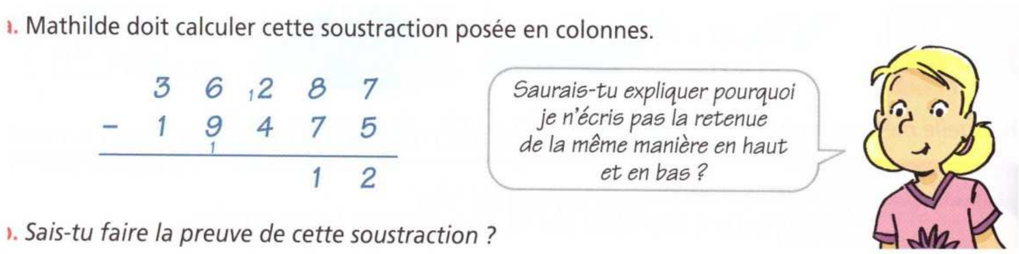


Figure 8 - Extrait de J'apprends les maths CM2 (Brissiaud & al. 2010a, p. 28)

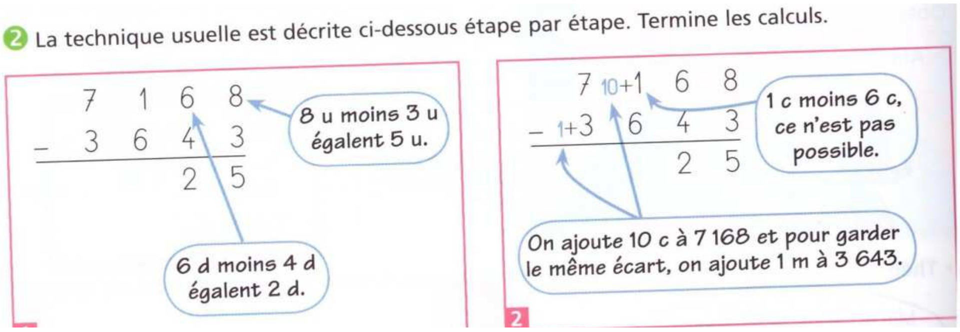


Figure 9 - Extrait de Euromaths CM2 (Peltier & al. 2009a, p. 16)

Si la technique de calcul de l'addition posée n'a pas évoluée entre la fin du XVIII[ème] siècle et en fin de CM2 actuellement, il n'en est pas de même pour la soustraction ; la technique usuelle $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_-\_écart}}$ semblant désormais davantage présente en fin d'école que celle par emprunt ($\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_-\_emprunt}}$) en France. Nous le montrerons lors de l'analyse des productions d'élèves aux évaluations CEDRE 2014.

III.1.3 $\mathbf{T_{CP\_x}}$: Effectuer une multiplication

Avant de décrire la technique $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_x}}$ de calcul posé d'une multiplication, nous signalons qu'une technique possible s'appuie sur la définition d'une multiplication comme addition réitérée et revient par conséquent, à calculer une somme à l'aide de $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_+}}$. L'efficacité de cette technique est très limitée et se révèle particulièrement inadaptée dès qu'un des deux facteurs est relativement grand.

III.1.3.i Technologies sous-jacentes

Pour effectuer de façon posée une multiplication, Clivaz (2011, p. 121) montre qu'il existe des dispositions spatiales, en particulier la disposition «*per gelosia* », autres que celle utilisée usuellement (qui est celle décrite par Bezout et Reynaud).

Avant de décrire l'algorithme de la technique et la disposition des nombres, étudions d'abord les éléments technologiques mobilisés pour donner des raisons d'être à l'algorithme en dehors de toute disposition spécifique ; pour la description des techniques, nous distinguons deux cas selon la façon dont est représenté le nombre (EUN et EPDC) puisque, comme pour l'addition, les techniques ne donnent pas forcément à voir les mêmes éléments technologiques.

Si les deux nombres sont décomposés en unité de numération (EUN), la justification de la technique est identique à celle donnée par Reynaud et Bezout et nous l'illustrons par un exemple numérique :

4 608 × 369 = (4 milliers 6 centaines 8 unités) × 369 en utilisant $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{pos}}$;

4 608 × 369 = 4 milliers × 369 + 6 centaines × 369 + 8 unités × 369 : cette équivalence est justifiée grâce à $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{dist}}$;

4 608 × 369 = 4 × 369 milliers + 6 × 369 centaines + 8 × 369 unités : l'égalité peut être justifiée à l'aide de $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{comm\_x}}$, ou à partir d'une propriété de la multiplication qui découle de sa définition : le produit d'un nombre d'unités d'un rang donné par un nombre est égal, pour le rang des unités donné, au produit des deux nombres ;

4 608 × 369 = (4 × 3 centaines) milliers + (4 × 6 dizaines) milliers + (4 × 9 unités) milliers + (6 × 3 centaines) centaines + (6 × 6 dizaines) centaines + (6 × 8 unités) centaines + (8 × 3 centaines) unités + (8 × 6 dizaines) unités + (8 × 9 unités) unités : en se référant à la définition de la multiplication comme addition réitérée et en utilisant $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{pos}}$ pour écrire 369 en EUN.

4 608 × 369 = 12 centaines de mille + 24 dizaines de mille + 36 unités de mille + 18 dizaines de mille + 36 unités de mille + 48 centaines + 24 centaines + 48 dizaines + 72 unités en utilisant la technique de conversion.

L'écriture chiffrée du produit est obtenue en utilisant la technique de juxtaposition $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{juxt}}$.

<u>Si les deux nombres sont décomposés en EPDC</u>, la justification de la technique $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_x}}$ peut s'appuyer sur des propriétés de la multiplication $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{ass\_\times}}$, $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{comm\_\times}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{dist}}$ de façon identique au raisonnement réalisé sur les unités de numération :

On considère deux nombres entiers a et b :
$a = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + \ldots + a_n \times 10^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i$
$b = b_0 \times 10^0 + b_1 \times 10^1 + b_2 \times 10^2 + \ldots + b_p \times 10^p = \sum_{k=0}^{p} b_k \times 10^k$

Le produit s'écrit alors :
$a \times b = (\sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i) \times (\sum_{k=0}^{p} b_k \times 10^k)$
$a \times b = \sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i \times (\sum_{k=0}^{p} b_k \times 10^k)$ d'après $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{dist}}$
$a \times b = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} \ a_i \times 10^i \times b_k \times 10^k$d'après $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{dist}}$
$a \times b = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} \ a_i \times b_k \times 10^{k+i}$d'après $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{ass\_\times}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{comm\_\times}}$
$a \times b = \sum_{j=0}^{n+p} (\sum_{e+f=j} \ a_e \times b_f) \times 10^j$
Le produit est alors la somme des produits partiels ; l'écriture chiffrée du produit s'obtient en convoquant $\mathbf{T}_{\mathbf{CP\_+}}$ ou un type de tâche de traduction $\mathbf{T}_{\mathbf{Tepd/ec}}$.

III.1.3.ii Technique de la multiplication posée

Si d'autres dispositions sont possibles (Clivaz 2011), attachons nous à la disposition utilisée traditionnellement en France et étudions la technique de la multiplication posée $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_\times}}$ à partir du produit : 4 608 × 369

$$
\begin{array}{ccccccc l}
 & & & 4 & 0 & 6 & 8 & \\
 & & \mathrm{X} & & 3 & 6 & 9 & \\
\hline
 & & 3 & 6 & 6 & 1 & 2 & \leftarrow 4\,068 \times 9 \\
 & 2 & 4 & 4 & 0 & 8 & 0 & \leftarrow 4\,068 \times 60 \text{ ou } 4\,068 \times 6 \text{ dizaines} \\
1 & 2 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & \leftarrow 4\,068 \times 300 \text{ ou } 4\,068 \times 3 \text{ centaines} \\
\hline
1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 9 & 2 &
\end{array}
$$

La disposition que nous avons choisie ne fait pas apparaitre tous les produits partiels (une première ligne pourrait correspondre à 9 × 8, une deuxième à 9 × 60, puis 9 × 4 000 ; suivie de 60 × 8, etc.) et correspond à une disposition attendue à la fin du cycle 3. Cette disposition fait apparaître les produits partiels du multiplicande par le nombre d'unités de chacun des ordres du multiplicateur (ce qui correspond, pour chacune des valeurs de k à $\sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i \times b_k \times 10^k$). Nous retrouvons alors les différents éléments que nous avons fait apparaître pour justifier la technique, aussi bien lorsque les éléments technologiques relèvent de la numération que du calcul.

Des dispositions faisant apparaître les différents produits partiels peuvent être proposées au début du CM2 pour réactiver la technique opératoire de la multiplication posée enseignée dès le CE2 ; il ne s'agit pas uniquement de re-proposer la technique de calcul, mais aussi de faire apparaître les éléments technologiques qui la sous-tendent pour l'expliciter à nouveau. Pour ce faire, les auteurs utilisent des dispositions de calculs autres que celles figurant dans la disposition usuelle : des tableaux (Figure 10) ou des dispositions semblables à celle usuelle, mais faisant apparaître tous les produits partiels (Figure 11).

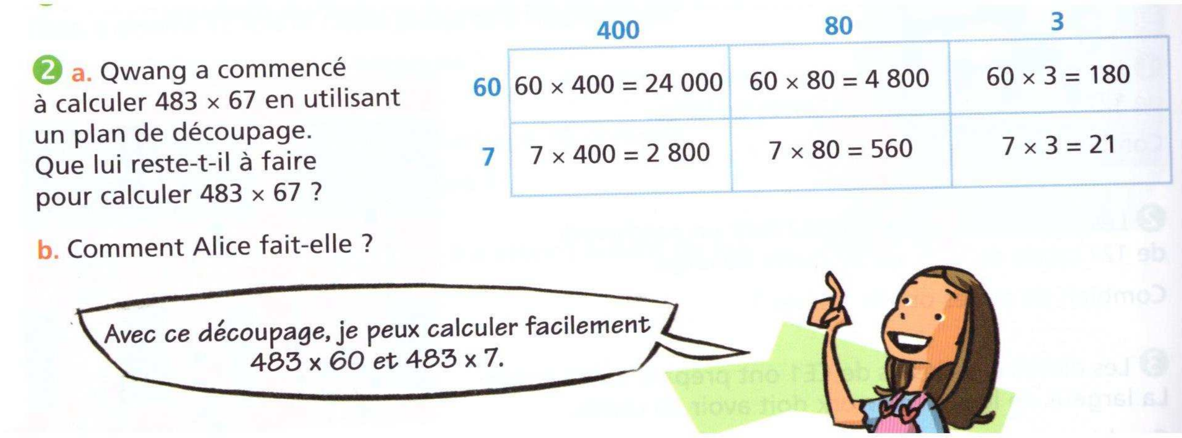


Figure 10 - Extrait d'Euromaths CM2 (Peltier & al. 2009a, p. 24)

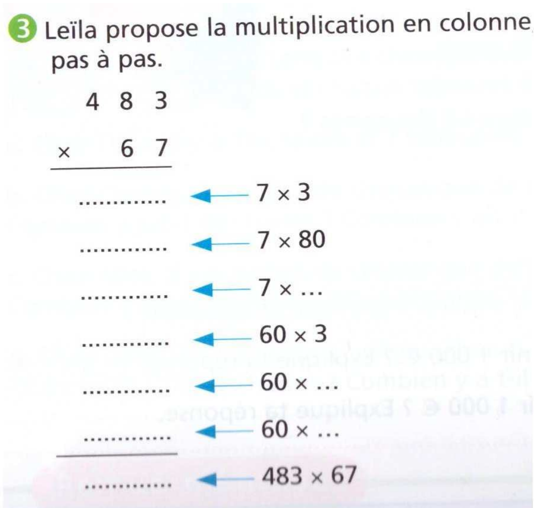


Figure 11 - Extrait d'Euromaths CM2 (Peltier & al. 2009a, p. 24)

Le manuel J'apprends les maths CM2 propose une disposition dans laquelle les lignes de calcul sont interverties par rapport à la disposition usuelle (Figure 12) ; ce qui permet de justifier à nouveau la disposition usuelle des calculs dans $\boldsymbol{\tau}_{CP\_\times}$ en se référant à $\boldsymbol{\Theta}_{dist}$.

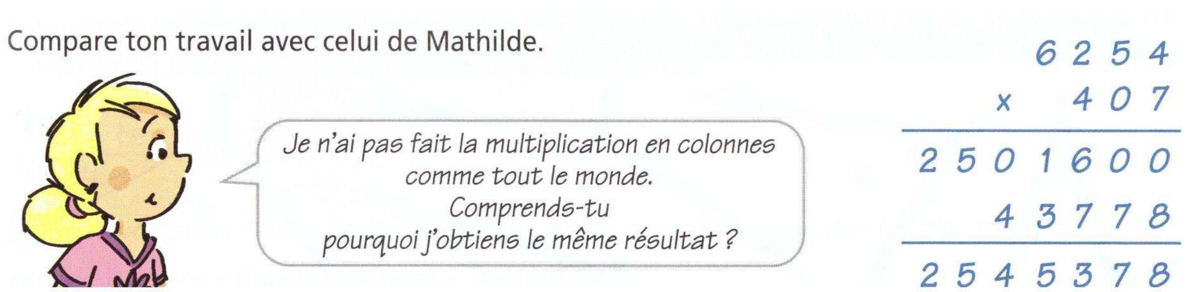


Figure 12 - Extrait de J'apprends les maths CM2 (Brissiaud & al. 2010a, p. 29)

Dans aucun des trois manuels de CM2 que nous avons consultés, nous n'avons trouvé de référence à l'addition itérée. Comprendre en quoi la disposition des calculs précédents (Figures 10 à 12) diffère de celle usuelle, mais aboutit au produit des deux nombres fait apparaître les technologies qui sous-tendent $\boldsymbol{\tau}_{CP\_\times}$, en particulier $\boldsymbol{\Theta}_{dist}$, $\boldsymbol{\Theta}_{ass_\times}$et $\boldsymbol{\Theta}_{comm\_\times}$.

Comme nous l'avions remarqué dans l'étude de Bezout et Reynaud, la disposition en colonnes ne demande pas d'écrire chacun des produits partiels avec le nombre de zéros nécessaires à une écriture en unités (le deuxième produit partiel correspondant à un nombre de dizaines, le suivant à un nombre de centaines, etc.), sauf si la technologie repose sur les propriétés du calcul. Les dispositions utilisées actuellement en France (Durpaire & Mégard 2010, p. 42) privilégient le fait d'écrire des zéros plutôt que de ne rien mettre ou de mettre des points ou des tirets.

Les dispositions proposées dans les manuels de CM2 ne font pas apparaître les retenues intervenant lors du calcul de produits partiels ou lors de la somme de ceux-ci pour obtenir le produit. Par ailleurs, nous avons pu observer lors de l'étude des traités que Bezout et Reynaud traitaient des cas spécifiques lorsqu'un des chiffres du multiplicateur était un zéro : la technique est inchangée, mais l'écriture de l'algorithme peut ou non faire apparaître des lignes des zéros. Comme le montre la Figure 12, certains manuels ne font pas apparaître la ligne de zéros dans la disposition des calculs, même lorsque la disposition n'est pas usuelle. Aucune indication n'est formulée dans les documents accompagnant les programmes relativement à cette disposition et à l'écriture de lignes de zéros.

<u>En conclusion,</u> nous constatons que la disposition des calculs dans la technique opératoire de la multiplication posée a peu évolué depuis les traités de Bezout et Reynaud ; par contre, les éléments technologiques qui entrent dans sa justification ne sont pas présentés de la même façon. La référence à la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, bien que non citée sous cette forme actuellement, est rendue plus explicite par les ostensifs utilisés (tableaux ou flèches désignant les produits partiels). Une évolution est néanmoins à souligner sur l'écriture des produits partiels, correspondant désormais à des nombres d'unités simples et s'écrivant avec des zéros. Entre le CE2 où cette technique est découverte et le CM2, il n'y a pas d'évolution dans la disposition des calculs ni dans la technique.

III.1.4 $T_{CP\_:}$: effectuer une division euclidienne

Nous commençons dans ce paragraphe par étudier des techniques qui ne relèvent pas de celle du calcul posé, mais qui sont des préalables à son introduction dans l'enseignement.

III.1.4.i <u>Techniques intermédiaires et technologies sous-jacentes</u>

Non évoquée par Bezout et Reynaud, une première technique consiste à soustraire successivement du dividende le diviseur, jusqu'à ce que le reste soit inférieur au diviseur ; le quotient étant alors le nombre de fois que l'on a retranché le diviseur. Cette technique $\boldsymbol{\tau}_{CP\_:\_sous}$, justifiée par la définition même de la division euclidienne $\boldsymbol{\Theta}_{div\text{-}euc}$, s'avère très coûteuse, notamment lorsque le dividende est un nombre assez grand et que le diviseur est « petit » ; on peut aussi procéder par additions successives du diviseur en partant de 0.

Il est néanmoins possible de faire évoluer cette technique en retranchant des multiples du diviseur (Figure 2 de ce chapitre illustrant la technique $\boldsymbol{\tau}_{RP\_\times\_sous}$) : nous nommons cette technique abrégée de la précédente $\boldsymbol{\tau}_{CP\_:\_sous\_mult}$. Par exemple pour diviser 3 487 par 15, on peut retrancher 15 × 200, puis 15 × 30 puis 15 × 2 ; le quotient est alors 232 (200 + 30 + 2) et le reste est 7. Cette technique n'est pas justifiée par les propriétés de la numération, mais par la définition de la division euclidienne $\mathbf{\Theta_{div\text{-}euc}}$ et par $\mathbf{\Theta_{dist}}$. En effet, dans la division euclidienne de deux entiers naturels a et b, on cherche à déterminer les entiers naturels q et r tels que a = b × q + r (avec r < b).

$\boldsymbol{\tau_{CP\_:\_mult}}$ consiste à retrancher successivement du nombre a des multiples de b jusqu'à ce que la différence soit inférieure à r ; si nous notons $b \times q_1$, $b \times q_2$,... $b \times q_n$ les multiples du diviseur, $\boldsymbol{\tau_{CP\_:\_mult}}$ conduit au calcul : $[((a - b \times q_1) - b \times q_2) - ... b \times q_n] = a - b \times (q_1 + q_2 + ...q_n)$ d'après $\mathbf{\Theta_{dist}}$. Le quotient q est alors donné par la somme $q_1 + q_2 + ...q_n$ et le reste par la différence a - b × q.

Les propriétés de la numération peuvent éventuellement intervenir dans cette technique si q_1, q_2,... q_n sont des multiples de puissance de 10, comme dans la Figure 2. Il est dès lors possible de faire évoluer cette technique vers la technique $\boldsymbol{\tau_{CP\_:\_u}}$ (technique utilisée par Reynaud dans laquelle le diviseur est considérée comme un nombre d'unités simples). Nous y reviendrons dans le paragraphe suivant.

Si Reynaud utilisait des encadrements pour déterminer le nombre de chiffres du quotient, il est aussi possible de définir une technique par encadrement $\boldsymbol{\tau_{CP\_:\_enc}}$. Pour diviser 3487 par 15, on calcule : 15 × 200 = 3 000 puis 15 × 300 = 4 500 et on déduit que le quotient est compris entre 200 et 300 ; on calcule ensuite 15 × 220 = 3 300, 15 × 230 = 3 450, 15 × 240 = 3360 pour déduire que le quotient est compris entre 230 et 240, etc. On poursuit ainsi jusqu'à obtenir 232.

Les technologies sont les mêmes que celles intervenant dans la technique précédente ; dans ce cas la définition de la division euclidienne n'est pas celle faisant intervenir l'égalité caractéristique (comme précédemment), mais plutôt la suivante :
$\forall (a ; b) \in \mathbb{N}\times \mathbb{N}^*, \exists ! (q ; r) \in \mathbb{N}\times \mathbb{N}$ tel que : $b.q \leq a < b. (q+1)$.
r est alors défini par $r = a - b.q$ et $0 \leq r < b$.

Si ces techniques peuvent évoluer vers les techniques de calcul posées usuelles, elles correspondent aussi à des techniques de calcul réfléchi sur lesquelles nous reviendrons lors de la description de l'OMR 3B.

III.1.4.ii Techniques de la division posée : $\boldsymbol{\tau_{CP\_:}}$

Nous commençons par revenir sur les deux techniques utilisées par Bezout et Reynaud et les mettons en parallèle à partir d'un même exemple, celui de la division euclidienne de 3 487 par 15. Nous étudions ensuite la façon dont les manuels actuels de CM2 traitent le calcul posé de la division et observons s'il existe une éventuelle évolution dans son enseignement, en lien avec les technologies qui la justifient.

Les deux techniques que nous considérons sont :
$\boldsymbol{\tau_{CP\_:\_eun}}$: utilisée par Bezout, elle considère le dividende comme structuré en nombres d'unités d'ordre différents qui composent des dividendes partiels ;
$\boldsymbol{\tau_{CP\_:\_u}}$: utilisée par Reynaud, le dividende est considéré comme un nombre entier d'unités simples et les différents calculs s'effectuent à partir de la totalité de ce nombre. Nous la développons ici avec une autre disposition que celle adoptée par Reynaud, en faisant apparaître des quotients partiels.
Elles peuvent être toutes deux attendues en fin d'école et nous montrerons qu'elles figurent toutes deux dans les manuels de CM2.

Description de la technique $\tau_{CP\ :\ eun}$

3	4	8	7	1	5

Le premier dividende partiel est le nombre obtenu en sélectionnant les premiers chiffres du diviseur, à partir de la gauche, jusqu'à obtenir un nombre supérieur au diviseur. Ici il s'agit de 34. On peut ensuite avoir un discours technologique avec une EUN ou avec une EAPD. τ_{tronc} permet d'écrire 3487 sous la forme :
3487 = 34 centaines 87 unités

Ensuite, on divise 34 centaines par 15 : le quotient est alors de 2 centaines et il reste 4 centaines (34 centaines - 15 × 2 centaines). Ce que l'on peut écrire sous la forme : 34 c = 15 × 2c + 4 c.

Pour déterminer le quotient partiel de 34 par 15, il est possible d'utiliser une des techniques de calcul réfléchi ou de procéder par ordre de grandeur (techniques que nous présentons et justifions dans l'OML3B) ; il est aussi possible de faire la liste des multiples du diviseur comme le suggère Reynaud.

Ainsi, dans la division de 3 487 par 15, le premier quotient partiel est de 2c et le premier reste partiel de :

3487 - 15 × 2c, c'est à dire de 4c 8d 7u (ou 487).

	m	c	d	u		
	3	4	8	7	1	5
-	3	0			2	
		4	8	7	c	

L'algorithme se poursuit avec pour nouveau dividende 4c 8d 7u (ou 487) ; on choisit alors comme dividende partiel 48, qui lorsque l'on divise par 15 amène :
48 = 15 × 3 + 3.
Le nouveau quotient partiel 3 est de l'ordre des dizaines, et le nouveau reste partiel est de :
487 - 15 × 30 = 37.

	m	c	d	u		
	3	4	8	7	1	5
-	3	0			2	3
		4	8	7	c	d
	-	4	5			
			3	7		

Le reste étant toujours supérieur au diviseur, l'algorithme se poursuit à nouveau.

Puisque 37 = 15 × 2 + 7. Le quotient partiel est de 2 unités et le reste est de 7.

L'égalité de la division euclidienne s'écrit alors :
3487 = 15 × 232 + 7

	m	c	d	u			
	3	4	8	7	1	5	
-	3	0			2	3	2
		4	8	7	c	d	u
	-	4	5				
			3	7			
		-	3	0			
				7			

D'après la définition de la division euclidienne $\Theta_{div\text{-}euc}$, l'algorithme s'arrête à cette étape puisque le reste 7 est inférieur au diviseur 15 ; le quotient est alors de 232.

Description de la technique $\tau_{CP\ :\ u}$

3	4	8	7	1	5	

Le nombre de chiffres du quotient est déterminé par encadrement du dividende : comme 15 × 100 = 1500 et 15 × 1 000 = 15 000, le quotient est compris entre 100 et 1 000, et par conséquent le quotient s'écrira avec trois chiffres (étape décrite dans le cours de Reynaud).

Le quotient étant compris entre 100 et 1 000, et comme 15 x 200 = 3 000 d'après τ_{multPD}, on retire 3000 du dividende pour obtenir un premier dividende partiel : 487. On a alors l'égalité :

3487 = 15 × 200 + 487

	3	4	8	7	1	5		
-	3	0	0	0	2	0	0	
		4	8	7				

Comme 15 × 30 = 450, on retire 450 du dividende partiel 487 pour obtenir 37.

487 = 15 x 30 + 37

et 3 487 = 15 ×200 + 15 × 30 + 37 = 15 × 230 + 37 d'après Θ_{dist}.

	3	4	8	7	1	5		
-	3	0	0	0	2	0	0	
		4	8	7		3	0	
	-	4	5	0				
			3	7				

Comme 15 × 2 = 30, on retire 30 du dividende partiel 37 pour obtenir 7.

37 = 15 × 2 + 7

et 3 487 = 15 × 230 + 37 = 15 × 232 + 7 d'après Θ_{dist}.

Le quotient de la division est donné par la somme 200 + 30 + 2, c'est-à-dire 232.

	3	4	8	7	1	5		
-	3	0	0	0	2	0	0	
		4	8	7		3	0	
	-	4	5	0			2	
			3	7				
		-	3	0				
				7				

Comparaison des deux techniques

Les deux techniques $\tau_{CP\_:\_eun}$ et $\tau_{CP\_:\_u}$ telles que nous les avons décrites diffèrent non seulement par la façon dont le dividende est considéré, mais aussi par la disposition et la construction progressive du quotient. Déterminer progressivement dans $\tau_{CP\_:\_u}$ il est déterminé directement dans $\tau_{CP\_:\_eun}$.

Nous n'entrons pas ici dans les différentes difficultés suscitées par ces techniques, mais nous soulignons leur complexité par les différentes adaptations qu'elles demandent, en particulier :

> « ces adaptations et décisions locales sont d'autant plus nécessaires que la technique maitrisée est sophistiquée (déterminer le nombre de chiffres du quotient, poser ou non des soustractions, écrire ou non des produits partiels : 26 × 2 ; 26 × 4, etc.). » Durpaire & Mégard (2012, p. 43)

Si la technique attendue à la fin du cycle 3 n'est pas spécifiée, la disposition attendue des calculs n'est pas nécessairement la plus épurée (comme nous la présentons ci-après) ; en particulier, les calculs intermédiaires, tels que les soustractions, peuvent encore être présents. En revanche, la soustraction de zéro, qui se présente lorsqu'un reste intermédiaire est nul, n'a pas de raison d'être (ce qui rejoint la remarque faite sur les lignes de zéros présentes dans la multiplication).

Disposition attendue en fin d'école :

3	4	8	7	1	5	
	4	8		2	3	2
		3	7			
			7			

Les éléments technologiques apparus lors de la réalisation des techniques sont liés à:
- la numération : Θ_{max}, Θ_P et Θ_D justifient la technique de troncature τ_{tronc} ou les calculs des produits par des multiples de 10^n par τ_{multPD}
- la définition de la division euclidienne $\Theta_{div\text{-}euc}$ qui impose que le reste soit inférieur au diviseur et qui, par conséquent, assure que les quotients partiels ne soient que des nombres à un chiffre ;
- la détermination du quotient en sommant les quotients partiels peut être justifiée par Θ_{dist}, si l'on se réfère au fur et à mesure des étapes à une égalité correspondant à une division euclidienne.

III.1.4.iii Techniques de la division posée dans les manuels de CM2

Les deux techniques présentées précédemment sont enseignées dans les manuels de CM2 que nous avons consultés. $\tau_{CP\_:\_eun}$ est la technique choisie par Cap Maths (Annexe 1) et J'apprends les maths CM2 (Annexe 2).

Dans Cap Maths, Charnay & al. (2010b) insistent sur le fait de justifier les différentes étapes de calcul en se référant aux différentes unités de numération. La technique est réactivée après un travail mené sur le calcul réfléchi de restes et de quotient. L'algorithme et ses différentes justifications, tels qu'ils sont à retenir par les élèves, figurent en Annexe 1.

Brissiaud & al. (2010b) explicitent dans le guide de l'enseignant de J'apprends les maths leurs choix : $\tau_{CP\_:\_eun}$ pour des diviseurs à un chiffre découle d'une technique découverte à partir de manuel de numération et elle est présentée comme « une technique au service du calcul mental » (Ibid, p. 33). Selon les nombres en jeu et dans le cas d'un diviseur à un chiffre, elle peut être exploitée mentalement et permettre à l'élève d'écrire le quotient au fur et à mesure.

Le passage aux divisions par un diviseur à deux chiffres demande, pour l'auteur, « la coordination de geste mentaux de la division» et pas seulement une évolution de la technique : dans le cas d'une division à un chiffre (*a*), on peut partager le nombre d'unités d'un ordre donné lorsqu'il est partagé en *a* parts (division partition), alors que dans le cas d'une division d'un nombre *c* par un nombre *b* à deux chiffres, on cherche en *b* combien de fois *c*, c'est-à-dire que l'on se ramène à une division-quotition. Cette remarque explique l'approche proposée dans J'apprends les maths CM2 (Annexe 2) pour les divisions à deux chiffres, où la technique présentée est $\tau_{CP\_:\_enc}$ pour aborder la division par un nombre à deux chiffres ; cette technique évoluant ensuite vers $\tau_{CP\_:\_eun}$ (Extrait de J'apprends les maths (2010b, p. 96) figurant en Annexe 2).

Euromaths privilégie la technique $\tau_{CP\_:\_u}$ et l'introduit à partir des soustractions successives ; il est précisé dans le guide du maître (Figure 13) :

rentes selon les pays. Nous avons opté pour la disposition qui est conforme aux recommandations officielles : la technique française avec écriture des soustractions.

$$\begin{array}{rrrr|ll} & 7 & 8 & 8 & 6 & 4 \\ \cline{5-6} - & 6 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ \cline{1-4} & 1 & 4 & 8 & & \\ - & 1 & 2 & 8 & & \\ \cline{1-4} & & 2 & 0 & & \end{array}$$

Cette technique peut être rendue plus proche encore du sens en laissant apparents les constituants du quotient (10 puis 2) et la somme est effectuée ultérieurement. Cette présentation **permet de bien mémoriser** la comptabilité tenue dont nous parlions plus haut.

Figure 13 - Extrait du guide de l'enseignants Euromaths CM2 Peltier & al. (2009b, p. 34)

Dans Euromaths CM2, la technique $\tau_{CP\_:\_u}$ témoigne d'une certaine évolution (en se limitant à l'enseignement au CM2) : introduite à partir des soustractions successives, elle fait ensuite apparaître les « constituants » du quotient pour en faire la somme, et amène finalement à une technique experte où le quotient est écrit directement, comme dans l'extrait précédent (Annexe 3). Faire déterminer le nombre de chiffres au quotient avant encadrement permet de repérer le nombre de chiffres du quotient et d'avoir un moyen de contrôle lorsqu'apparaissent des « zéros » intercalaires au quotient.

En conclusion, différentes techniques de calcul posé de la division existent en fin d'école ; ce qui rejoint le constat réalisé à partir de l'étude des traités. La complexité de cet algorithme est soulignée par les différents auteurs de manuels, ce qui explique, qu'en fin de CM2 la justification des différentes étapes de calcul par des propriétés de la numération soit encore présente, du moins de façon plus explicite que pour les autres opérations. Dans tous les manuels consultés, l'écriture des soustractions intermédiaires est présente, même si elle n'est pas systématique (en particulier lorsque les calculs sont simples). Les ostensifs utilisés sont variés et visent à accompagner le discours justifiant la technique ; nous notons en particulier la présence de points pour indiquer le nombre de chiffres du diviseur ou de lettres (c, d, u avec un code couleur) pour déterminer le rang des différents chiffres du quotient.

La description des techniques de calcul posé, des algorithmes et des dispositions écrites qui les accompagnent nous a permis, encore une fois, de constater la prégnance des techniques de l'OML2A comme éléments technologiques des techniques de calcul posé : ce qui justifie à nouveau, si besoin en était, d'avoir construit un domaine englobant numération et calcul.

III.2 OML 3B : Calculer de façon réfléchie

L'expression « calcul mental » englobe à la fois ce qui relève du calcul automatisé (connaissance des tables) et ce qui relève du calcul réfléchi (le résultat du calcul n'est pas mémorisé et il peut être trouvé par différentes techniques, mais sans passer par un calcul posé). Si le terme de « mental » peut aussi s'opposer à celui d'« écrit » comme nous l'avions observé chez André et Haillecourt (1872) et Bovier-Lapierre (1868), celui de « réfléchi » n'induit pas cette vision du calcul, au contraire, les opérations peuvent être éventuellement écrites en ligne ; l'élève conservant une trace écrite des résultats de ses calculs intermédiaires (mais sans les poser).

La connaissance des répertoires (tables d'addition et de multiplication) ou des compléments à des puissances de dix sont nécessaires à la réalisation de toutes les tâches de calcul réfléchi (et de calcul posé) ; si nous ne les considérons pas comme représentant un type de tâche spécifique de cette OML parce qu'ils ne nécessitent pas de techniques ou de technologies spécifiques, il n'en demeure pas moins que ce sont des savoirs de base, nécessaires à la réalisation de tout calcul, qui devraient être automatisés en fin de CM2. La connaissance de ces faits numériques diffère du comptage ; ce dernier ne nécessite que la connaissance de la comptine numérique et de stratégies d'énumération et ne met pas en jeu d'opération.

En revanche, nous identifions un type de tâche spécifique pour le calcul réfléchi approché, conduisant à la détermination d'un ordre de grandeur d'un résultat, puisqu'il met en jeu des techniques et des technologies spécifiques, liées à la fois à la numération et aux propriétés des opérations.

Quelque soit le type de tâche de calcul réfléchi, les techniques associées dépendent grandement des nombres en jeu ou de la façon dont le calcul est fourni à l'élève (écriture chiffrée ou numération orale) ; nous spécifions donc ces techniques à chaque fois selon ces variables lorsque cela se révèle pertinent. Enfin, pour chacun des types de tâches, nous dressons après avoir décrit les différentes techniques un tableau récapitulatif décrivant le domaine d'efficacité de la technique (selon les nombres en jeu) et les attentes institutionnelles relativement à ces techniques.

Calculer mentalement de façon réfléchie demande donc non seulement une connaissance de certains faits numériques (résultats des répertoires, décompositions additives ou multiplicatives de nombres s'appuyant sur la numération ou sur les propriétés arithmétiques du nombre), mais aussi une capacité à mobiliser des techniques plus ou moins performantes selon les nombres en jeu, s'appuyant elles-mêmes sur les propriétés des opérations.

En plus des éléments technologiques relevant de la numération et des propriétés des opérations, et à la différence du calcul posé, les décompositions arithmétiques (additives et multiplicatives) des nombres interviennent dans les techniques de calcul réfléchi ; nous justifions l'existence de ces décompositions par les deux propriétés suivantes :

- $\mathbf{\Theta_{Dec\_+}}$ (décomposition additive) : tout nombre entier non nul peut se décomposer sous la forme d'une somme d'un ou plusieurs termes ;
- $\mathbf{\Theta_{Dec\_x}}$ (décomposition multiplicative) : tout nombre entier strictement supérieur à 1 et non premier peut se décomposer sous la forme d'un produit de facteurs non nuls et différents de 1.

Ce sont ici des décompositions arithmétiques que nous prenons en compte (par exemple $16 = 7 + 9$ ou $50 = 25 \times 2$) et nous les distinguons des décompositions additives ou en puissances de 10 relevant de la numération (par exemple $16 = 10 + 6$ ou $50 = 5 \times 10$).

Nous concluons la description de l'OMR3B par quelques extraits de manuels permettant d'illustrer certaines techniques et d'aborder la question de la dénotation des expressions arithmétiques produites ainsi que de leur réécriture dans le cadre du calcul réfléchi.

Avant de lister les différents types de tâches, une première technique inadaptée peut être utilisée pour tout calcul réfléchi : il s'agit d'appliquer mentalement l'algorithme de l'opération posée, technique que nous nommons de façon générale, quelle que soit l'opération considérée $\boldsymbol{\tau_{CR\_posé}}$. Elle peut se révéler néanmoins être assez efficace dans certains cas, notamment dans le cas d'addition ou de soustraction sans retenue, mais beaucoup moins dans d'autres (par exemple dans le calcul de 113 - 68). Elle reste rare pour les multiplications et les divisions et ne se révèle efficace, là encore, uniquement dans les cas simples. Nous ne la faisons pas apparaitre comme une technique relevant des types de tâches de calcul réfléchi : d'une part elle n'est pas attendue en tant que telle et d'autre part sa portée est très limitée.

De la même façon, une technique de comptage $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{compt}}$ développée à l'école maternelle et au début du cycle 2 peut subsister pour traiter des additions ou des soustractions alors qu'elle ne relève pas du calcul réfléchi. Elle ne se limite pas à la récitation de la suite des noms des nombres à partir de celui d'un des termes (sur-comptage ou décomptage), mais doit s'accompagner d'un processus d'énumération visant à ce que le nombre de noms de nombres prononcés corresponde à un des deux termes de la somme ou de la différence. Nous ne la faisons pas apparaître dans les descriptions des praxéologies puisqu'elle a elle aussi une portée très limitée et n'est plus attendue en fin d'école.

III.2.1 $T_{CR\_n\text{-}n}$: compter ou décompter de n en n (n différent de 10^k)

Un exemple emblématique de tâche relevant de $\mathbf{T}_{\mathbf{CR\_n\text{-}n}}$ est le jeu du furet, mené oralement, il s'agit de compter ou de décompter de n en n à partir d'un nombre donné ; en CM2, le nombre de départ peut être à trois chiffres et le nombre n un nombre à un ou deux chiffres. Dans le cas où n est un multiple de 10, il s'agit du type de tâche $\mathbf{T}_{\mathbf{AR}}$ que nous avons déjà étudié dans OMR2 et lorsque le pas de la suite est un petit nombre, la tâche s'apparente à du calcul mental automatisé permettant de travailler les répertoires additifs.

Dans le cas où n n'est pas une puissance de dix, deux cas peuvent se présenter :

- soit le nombre de départ n'est pas un multiple de n : il s'agit dans ce cas de déterminer une somme mentalement, ce qui relève plus généralement de $\mathbf{T}_{\mathbf{CR\_+}}$ décrit ci-après,

- soit le nombre de départ est un multiple de n et dans ce cas il s'agit de citer, dans l'ordre croissant ou décroissant, les multiples de n. D'un point de vue technique, soit les résultats appartiennent au répertoire multiplicatif de n (c'est-à-dire à la table de multiplication de n et ils sont automatisés), soit ils peuvent être reconstruits au fur et à mesure en ajoutant n au résultat précédent (lorsque l'on sort du répertoire). On retrouve ici le fait que la multiplication est définie comme addition itérée et par conséquent, que le produit de n par (k+1) est égal à la somme du produit de n par k et de n.

III.2.2 T_{CR_+} : calculer une somme de façon réfléchie

III.2.2.i Techniques et technologies sous-jacentes

Techniques et technologies attendues en fin d'école

Nous avons regroupé les différentes techniques attendues en fin d'école à partir de Butlen (2007, p. 42) et de Fuson & al. (1997a), en quatre types de techniques selon les éléments technologiques en jeu et les illustrons à partir d'un même exemple (453 + 286) pour montrer leur domaine d'efficacité :

$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_+\_dec\_eapdc}}$: technique reposant sur la décomposition additive canonique des nombres.

Cette technique repose sur la décomposition additive en puissances de dix canonique (en EAPDC) d'un nombre ou des deux afin de faciliter les calculs intermédiaires.

Par exemple : 453 + 286
= 453 + 200 + 80 + 6 en convoquant $\mathbf{T}_{\mathbf{Tec/eapdc}}$
= 653 + 80 + 6 en convoquant $\mathbf{T}_{\mathbf{Teapd\ /ec}}$ ou $\mathbf{T}_{\mathbf{AR}}$ (en avançant de 100 en 100 deux fois à partir de 453) ; le recours à par $\mathbf{\Theta}_{\mathbf{ass\_+}}$ n'est pas nécessaire (la technologie ne s'appuyant que sur les propriétés de la numération)
= 733 + 6 en convoquant $\mathbf{T}_{\mathbf{Teapd\ /ec}}$ ou $\mathbf{T}_{\mathbf{AR}}$ (en avançant de 10 en 10 huit fois)
=739 idem

Nous présentons cette technique à l'aide de relations arithmétiques et de réécritures des nombres en jeu dans le calcul ; elle peut mettre en jeu d'autres ostensifs tels que des flèches symbolisant les ajouts des différents termes issus de la décomposition du nombre (technique « par sauts »).

Dans cet exemple, nous n'avons décomposé que le second terme de la somme, mais il est possible de décomposer le premier ou de décomposer les deux comme nous le montrons ci-dessous :
453 + 286
= (400 + 50 + 3) + (200 + 80 + 6) en convoquant $\mathbf{T}_{\mathbf{Tec/eapdc}}$
= 600 + 50 + 3 + 80 + 6 en convoquant $\mathbf{T}_{\mathbf{Teapd\ /ec}}$ les propriétés de la numération suffisent pour justifier cette écriture
= 600 + (50 + 80) + 3 + 6 en convoquant $\mathbf{T}_{\mathbf{Teapd\ /ec}}$
= 600 + 130 + 9
= 739

Fuson & al. (1997a) distingue les méthodes où un seul nombre est décomposé de celles où les deux nombres sont transformés ; nous avons choisi ici de les regrouper puisque technologiquement elles reposent sur les mêmes éléments à savoir : la convocation des types de tâche $\mathbf{T}_{\mathbf{Tec/eapdc}}$ et $\mathbf{T}_{\mathbf{Teapd\ /ec}}$ relevant de la numération pour la décomposition et la recomposition en écriture chiffrée. Les principes de la numération décimale $\mathbf{\Theta}_{\mathbf{P}}$ et $\mathbf{\Theta}_{\mathbf{D}}$ interviennent quant à eux à travers la convocation de ces types de tâche; ce sont eux qui assurent la portée et l'efficacité de ces techniques consistant à se ramener à des calculs (ou du comptage) avec des nombres entiers de puissances de 10. Les propriétés de l'addition $\mathbf{\Theta}_{\mathbf{ass\_+}}$, $\mathbf{\Theta}_{\mathbf{comm\_+}}$ apparaissent implicitement, en particulier si l'on se réfère à des propriétés de la numération pour justifier ces techniques.

Pour des raisons de commodités, nous avons décrit cette technique dans le registre des écritures chiffrées avec des écritures en ligne, mais elle peut être réalisée de la même façon dans le registre de la numération parlée en comptant de centaines en centaines, puis de dizaines en dizaines, comme nous l'avions évoqué lors de la description de $\mathbf{T}_{\mathbf{AR}}$.

- $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_+\_dec\text{-}arithm+}}$: technique basée sur la décomposition arithmétique additive des nombres

À la différence de la technique précédente, les nombres sont ici décomposés de façon arithmétique afin d'obtenir un nombre entier d'unités à un ordre donné ; cette technique est en lien avec les compléments à la dizaine, à la centaine, etc.

Reprenons l'exemple précédent :
453 + 286
= 453 + (47 + 239) justifié par $\mathbf{\Theta}_{\mathbf{Dec\_+}}$
= (453 + 47) + 239 justifié par $\mathbf{\Theta}_{\mathbf{ass\_+}}$
= 500 + 239 en convoquant $\mathbf{T}_{\mathbf{Teapd\ /ec}}$ ou $\mathbf{T}_{\mathbf{AR}}$
= 739

$\tau_{CR\_+\_dec\text{-}arithm+}$ est de façon générale sous-tendue par les éléments technologiques que nous avons fait apparaître dans l'exemple : Θ_{Dec_+}, Θ_{ass_+} et éventuellement Θ_{Comm_+}, et convoque une fois encore $T_{Teapd\ /ec}$ ou T_{AR}. Nous avons utilisé dans l'exemple la décomposition de 286 en 47 + 239 afin de faire apparaître 500 en regroupant 453 et 47 ; il aurait été possible de procéder par étape, c'est-à-dire de décomposer d'abord 286 en 7 + 279 pour faire apparaître 460, puis ensuite décomposer 279 en 4 + 239 pour faire apparaître 300.

Il est possible de formuler cette technique d'une deuxième façon comme le fait Fuson & al. (1997a) en mettant en avant d'autres éléments technologiques :
453 + 286
= (453 + 47) + (286 - 47) justifié principalement par le fait que 0 soit l'élément neutre de l'addition
= 500 + 239 justifié par Θ_{ass_+} et convoquant T_{CR_-} que nous décrivons ensuite pour le calcul de la différence
= 739 en convoquant $T_{Teapd\ /ec}$ ou T_{AR}
Sans être formulé de la même façon, le fait que 0 soit l'élément neutre de l'addition n'est pas une propriété qui figure, même implicitement, dans les programmes de l'école primaire ; par conséquent, cette technique qui s'apparente à <u>une technique par compensation $\tau_{CR\_+\_compens}$</u> n'est pas attendue sous cette forme à la fin de l'école primaire.

- $\tau_{CR\_+\_exc\grave{e}s}$: <u>technique où l'on ajoute un nombre entier d'unités d'un ordre donné supérieur à un des termes de la somme</u>.

Par exemple :
453 + 286
= 453 + (300 - 14) en décomposant 286 de façon arithmétique (Θ_{Dec_+})
= 753 - 14 justifié par $T_{Teapdc\ /ec}$
= 739 en convoquant T_{CR_-}.

Cette technique ne se révèle pas efficace sur l'exemple précédent, puisqu'il est nécessaire de convoquer T_{CR_-} pour terminer le calcul ; par contre, elle est particulièrement adaptée lorsque l'on ajoute des nombres proches à une ou deux unités près d'un nombre entier de dizaines, de centaines, de milliers, etc. comme par exemple lorsque l'on ajoute 98 ou 199 comme dans l'exemple ci-dessous :
652 + 199 = 652 + (200 - 1) = (652 + 200) - 1 = 852 -1 = 851 ; la dernière étape du calcul pouvant être traitée uniquement par la connaissance des répertoires et ne nécessitant par la convocation de T_{CR_-}.

De façon générale, l'efficacité d'une technique de calcul réfléchi ne se juge pas uniquement à partir des nombres qui sont en jeu, mais elle dépend aussi des habilités que possède ou non l'élève dans la connaissance des répertoires en général et de la décomposition des nombres en particulier ; par exemple, pour pouvoir utiliser $\tau_{CR\_+\_dec\text{-}arithm+}$, il est nécessaire d'avoir une bonne maitrise des compléments.

Par ailleurs, dans le calcul réfléchi d'une somme, il est possible de faire appel successivement à plusieurs techniques à l'intérieur d'une même tâche.
Par exemple, pour calculer 453 + 286 :
457 + 286
= 400 + 57 + 200 + 86 en convoquant $T_{Tec/eapd}$
= 600 + 57 + 86
= 600 + 60 + 83 avec $\tau_{CR\_+\_dec\text{-}arithm+}$
= 743

Autre technique

La technique suivante a un domaine de portée très limité et n'est pas attendue en fin d'école ; à la différence des autres, elle s'appuie sur le nom des nombres et non sur l'écriture chiffrée ; elle consiste alors à mobiliser les principes de la numération parlée $\mathbf{\Theta_{np}}$.

- $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_+\_num}}$: <u>technique basée sur le nom des nombres</u>

Même si elle a un domaine de validité très limité, cette technique consiste à accoler le nom des nombres composant la somme. Par exemple, la somme de « trois-cents » et de « vingt » est le nombre qui peut s'interpréter comme « trois fois cent plus vingt », c'est-à-dire « trois-cent-vingt » : on utilise ici les interprétations multiplicatives et additives de la numération orale (Mounier 2010), mais dans un sens moins usuel (on recompose le nombre à partir d'une décomposition). $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_+\_num}}$ a une portée très limitée, puisque la plupart du temps, les termes qui interviennent dans la somme ne correspondent pas directement à une recomposition orale du nombre ; par exemple, la somme de « cinq-cent-quatre» et de « vingt » n'est pas « cinq-cent-quatre-vingt ».

III.2.2.ii <u>Synthèse des techniques et des éléments technologiques pour T_{CR_+} et techniques attendues</u>

Même si nous ne l'avons pas fait apparaître dans chacun des exemples que nous avons traités, la commutativité $\mathbf{\Theta_{Comm\_+}}$ et l'associativité $\mathbf{\Theta_{ass\_+}}$ de l'addition peuvent intervenir comme éléments technologiques justifiant la réorganisation du calcul dans les techniques qui s'appuient sur des technologies de calcul ; pour celles qui reposent sur des propriétés de la numération, la commutativité n'apparaît pas comme nécessaire.

Nous récapitulons dans le Tableau 1 ci-dessous les techniques présentées ainsi que leur domaine d'efficacité et les éventuelles attentes institutionnelles ; nous rappelons que toutes ces techniques nécessitent pour être exploitées une connaissance de différents faits numériques (répertoires, compléments...).

Techniques	**Éléments technologiques et types de tâches convoqués**	**Domaine d'efficacité de la technique et attentes institutionnelles**
$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_+\_num}}$	$\mathbf{\Theta_{np}}$	Très limité
$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_+\_dec\_eapdc}}$	$\mathbf{T_{Tec/eapd}}$ - $\mathbf{T_{AR}}$ ou $\mathbf{T_{Teapd/ec}}$	
$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_+\_dec\text{-}arithm+}}$	$\mathbf{\Theta_{Dec\_+}}$ - $\mathbf{\Theta_{ass\_+}}$ - $\mathbf{\Theta_{comm\_+}}$ - $\mathbf{T_{Teapd\ /ec}}$ ou $\mathbf{T_{AR}}$	
$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_+\_compens}}$	$\mathbf{\Theta_{ass\_+}}$ - $\mathbf{\Theta_{comm\_+}}$ - $\mathbf{T_{CR\_-}}$ - $\mathbf{T_{tec/eapd}}$ ou $\mathbf{T_{AR}}$ *et 0 comme élément neutre de l'addition*	*Non attendue*
$\mathbf{T_{CR\_+\_exc\grave{e}s}}$	$\mathbf{\Theta_{Dec\_+}}$ - $\mathbf{T_{CR\_-}}$ (éventuellement $\mathbf{\Theta_{ass\_+}}$ et $\mathbf{\Theta_{comm\_+}}$)	Un des termes est proche, à une ou deux unités près, d'un nombre entier de dizaines, de centaines...

Tableau 1 - Techniques et technologies relatives à $\mathbf{T_{CR\_+}}$

Si les programmes ou les documents les accompagnant ne décrivent pas explicitement les techniques attendues, les techniques listées dans reprennent celles que nous avons listées précédemment dans différents exemples, mis à part $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_+\_compens}}$ (Durpaire & Mégard 2010, p. 18) ; c'est pourquoi nous considérons qu'elles sont toutes attendues en fin de cycle 3, hormis cette dernière.

III.2.3 T_{CR_-} : calculer une différence de façon réfléchie

Nous reprenons, comme Fuson & al. (1997a), la même catégorisation pour les techniques de calcul réfléchi d'une différence que celle utilisée pour le calcul d'une somme.

III.2.3.i Techniques et technologies sous-jacentes

Techniques et technologies attendues en fin d'école

Comme pour le calcul d'une somme, nous illustrons les différentes techniques à partir d'un même exemple, celui du calcul de 856 - 275 ; nous montrons ainsi la limite de la portée de certaines techniques sur cet exemple et complétons dans ce cas par un calcul plus adapté.

- $\boldsymbol{\tau}_{CR\_-\_dec\_eapdc}$: technique reposant sur la décomposition canonique des nombres

Il s'agit, comme pour la somme, de décomposer en EAPDC un des termes ou les deux pour faciliter le calcul des soustractions en retranchant des nombres entiers de dizaines, de centaines, etc. ; par exemple, dans le calcul de la différence de 275 avec 856 si on décompose seulement le deuxième terme :
856 - 275
= 856 - (200 + 70 + 5) en convoquant $\mathbf{T}_{Tec/eapd}$
= (856 - 200) -70 - 5 justifié par $\boldsymbol{\Theta}_{sous\text{-}somme}$ si on se réfère à des propriétés de calcul (soustraire une somme revient à soustraire chacun des termes de la somme) ou par les propriétés de la numération ($\boldsymbol{\Theta}_D$ et $\boldsymbol{\Theta}_P$)
= 656 - 70 - 5
= 656 - 70 -5
= 586 - 5
= 581

Si on décompose désormais les deux termes sous une forme additive canonique, les technologies sont inchangées et les écritures deviennent :
856 - 275
= (800 + 50 + 6) - (200 + 70 + 5) en convoquant $\mathbf{T}_{Tec/eapd}$
= (800 - 200) + 50 + 6 -70 - 5 justifié par $\boldsymbol{\Theta}_{sous\text{-}somme}$
= (600 + 50) + 6 -70 - 5
= 650 -70 + 6 -5
= 580 + 6 - 5
= 581

- $\boldsymbol{\tau}_{CR\_-\_dec\text{-}arithm+}$: technique basée sur la décomposition arithmétique additive des nombres
Cette technique consiste à retrancher du premier terme les mêmes nombres d'unités, puis de dizaines, etc. que ceux qui le composent afin de faciliter le calcul ; la décomposition du deuxième terme est donc menée en ce sens. Par exemple :
856 - 275
= 856 - (256 + 19) $\boldsymbol{\Theta}_{Dec\_+}$ assurant le fait de pouvoir décomposer 275 sous la forme 256 + 19
= 856 - 256 - 19 $\boldsymbol{\Theta}_{sous\text{-}somme}$ justifiant le fait que l'on retranche successivement 256 et 19 si on considère des technologies de calcul.
= 600 - 19
= 600 - 10 - 9 en reprenant $\boldsymbol{\tau}_{CR\_-\_dec\text{-}num}$ décrite précédemment
= 590 - 9
= 581

La décomposition arithmétique de 286 en 256 + 19 n'est pas aisée, et montre la limite de cette technique sur cet exemple. Si nous l'appliquons au calcul de 856 - 261, elle se montre plus efficace, la décomposition de 261 en 256 + 5 étant plus immédiate :
856 - 261 = 856 - 256 - 5 = 600 - 5 = 595 avec des justifications identiques à celles proposées précédemment.

- $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_-\_excès}}$: <u>technique basée sur le retrait d'un nombre de dizaines ou de centaines... entières déterminé par excès</u>
Cette technique consiste à retrancher un nombre entier d'unités d'un ordre donné qui est supérieur au deuxième terme de la différence pour faciliter les calculs.
856 - 275
= 856 - (300 - 25) $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{Dec\_+}}$ assurant le fait de pouvoir décomposer 275 sous la forme 300 - 25
= 856 - 300 + 25 $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{sous\text{-}diff}}$ justifiant le fait que l'on retranche 300 et que l'on ajoute 25
= 556 + 25 justifiée par $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{P}}$ ou $\mathbf{T}_{\mathbf{AR}}$
= 581 en convoquant $\mathbf{T}_{\mathbf{CR\_+}}$

Comme pour les additions, cette technique est particulièrement efficace pour retrancher des nombres proches d'un nombre entier d'unités d'un ordre donné comme 99 (ou comme 198, etc.) ; dans ce cas on retranche 100 (ou 200) puis on ajoute 1 (ou 2). Elle ne se montre pas particulièrement pertinente sur l'exemple précédent, mais elle est efficace pour le calcul de 856 - 199 :
856 - 199
= 856 - 200 + 1 (justifié par $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{Dec\_+}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{sous\text{-}diff}}$)
= 656 - 1
= 655

- $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_-\_add\_trous}}$: <u>technique s'appuyant sur l'addition à trous</u>
Il s'agit ici d'utiliser la définition de la différence en lien avec l'addition, comme nous l'avons fait pour $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_-\_add\_trous}}$.
Par exemple, pour calculer 856 - 275, on cherche le nombre qui, ajouté à 275, permet d'obtenir 856, ce qui peut s'écrire sous la forme : 275 + …. = 856. S'il est éventuellement possible de procéder comme pour le calcul d'une soustraction posée avec $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_-\_add\_trous}}$, il est aussi possible de procéder par « sauts » :
275 + 500 = 775 ;
775 + 80 = 855 ;
855 + 1 = 856.
Ces différentes étapes se justifient avec les propriétés de la numération $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{P}}$; la différence entre 856 et 275 étant égale, par définition à 500 + 80 + 1, c'est-à-dire 581.

Plutôt que d'être représentée sous la forme de calculs en ligne, cette technique peut être représentée à partir d'une droite graduée ou d'une droite numérique vide, accompagnée de flèches représentant les différents « sauts ». Elle est, par ailleurs, régulièrement exploitée dans les calculs de soustraction de durées (avec une base autre que la base 10) ; nous considérons donc que c'est une technique attendue en fin d'école.

Autre technique

- $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_-\_compens}}$: <u>technique par compensation.</u> Comme pour l'addition, dans cette technique il s'agit de ramener le nombre que l'on soustrait à un nombre entier de dizaines, de centaines, etc. Cette technique s'appuie sur $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{écart}}$ que nous avons déjà définie dans le cadre de la soustraction posée et

rejoint $\tau_{CR\_+\_compens}$ définie pour le calcul réfléchi d'une somme ; elle n'est pas une des techniques de calcul réfléchi privilégiée à l'école primaire.
856 - 275
= (856 + 25) - (275 + 25) justifiée par la technologie $\Theta_{écart}$
= 881 - 300 convoque T_{CR_+} pour le calcul de la somme
= 581 justifiée par Θ_D et Θ_P ou T_{AR}

Nous soulignons qu'il est aussi possible de retrancher un même nombre à chacun des termes de la différence : 878 - 245 = (878 - 45) - (245 - 45) = 833 - 200 = 633

III.2.3.ii Synthèse des techniques et des éléments technologiques pour T_{CR_-} et techniques attendues

Nous listons dans le Tableau 2 les différentes techniques que nous avons présentées, comme nous l'avons fait pour l'addition.

Techniques	**Éléments technologiques et types de tâches convoqués**	**Domaine d'efficacité de la technique et attentes institutionnelles**
$\tau_{CR\_-\_dec\_eapdc}$	$T_{tec/eapd}$ - T_{AR}	
$\tau_{CR\_-\_dec\text{-}arithm+\_}$	Θ_{Dec_+} - $T_{tec/eapdc}$ - $\tau_{CR\_dec\text{-}num}$ ou T_{AR}	
$\tau_{CR\_-\_excès}$	Θ_{Dec_+} - $\Theta_{sous\text{-}diff}$ - T_{CR_+}	Un des termes est proche, à une ou deux unités près, d'un nombre entier de dizaines, de centaines, etc.
$\tau_{CR\_-\_add\_trous\_}$	Θ_D et Θ_P ou éventuellement T_{AR}	
$\tau_{CR\_-\_compens}$	$\Theta_{écart}$ - T_{CR_+} - Θ_D et Θ_P ou T_{AR}	*Non privilégiée*

Tableau 2 - Techniques et technologies relatives à T_{CR_-}

Même si aucune technique n'est clairement indiquée comme étant attendue en fin d'école, toutes celles que nous avons listées précédemment figurent dans le document ressource accompagnant les programmes du cycle 3 (Durpaire & Mégard 2012),en étant utilisées sur différents exemples ; nous considérons donc qu'elles peuvent toutes être attendues en fin d'école.

III.2.4 $T_{CR\_\times}$: calculer un produit de façon réfléchie

Nous avons déjà étudié dans l'OML 2A les multiplications par 10^n et dégagé la technique τ_{multPD} consistant à ajouter le nombre de zéros nécessaires à droite de l'écriture chiffrée du nombre. Nous décrivons, à partir de Butlen (2007) et de l'étude épistémologique réalisée dans le chapitre précédent, quatre techniques différentes pour résoudre $T_{CR\_\times}$ toutes attendues en fin d'école

III.2.4.i Techniques et technologies sous-jacentes

- $\tau_{CR\_\times\_add\_it}$: technique basée sur l'addition itérée.

Cette technique est issue de la définition de la multiplication comme addition itérée et convoque par conséquent T_{CR_+} dans sa mise en œuvre. La mise en œuvre de $\tau_{CR\_\times\_add\_it}$ demande alors de transformer le produit en une somme ; par exemple, pour calculer le produit de 48 par 2 (le double de 48), on utilise l'équivalence 48 × 2 = 48 + 48.

La portée de cette technique est limitée ; elle se révèle inefficace dès que les deux facteurs sont supérieurs à 4. En revanche, elle peut être employée pour calculer des doubles (ou éventuellement des triples), comme nous l'avons montré dans l'exemple.

- $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_\times\_dist}}$ <u>: technique mettant en jeu la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction</u>

Elle est directement issue de l'élément technologique $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{dist}}$ et est liée à des décompositions additives (ou soustractives) d'un des deux nombres en lien avec les décompositions additives en puissances de dix ou avec des décompositions arithmétiques ; le choix de la décomposition peut dépendre des nombres en jeu (et pour l'élève, de la disponibilité des répertoires).

La décomposition additive canonique de l'un des nombres et l'utilisation par la suite de $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{dist}}$ permettent d'introduire la technique $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_\times}}$ de calcul posé de la multiplication.

Par exemple, pour calculer le produit de 87 par 4 en décomposant 87 en 80 + 7, les étapes du calcul : 87 × 4 = (80 + 7) × 4 = 80 × 4 + 7 × 4 = 320 + 28 = 348 correspondent aux mêmes étapes que dans la réalisation de la technique de calcul posé $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_\times}}$, mais sans la disposition des nombres et du résultat spécifiques au calcul posé.
Il en est de même lorsque le produit met en jeu des facteurs supérieurs à 10 :
87 × 43 = 87 × 40 + 87 × 3 = (80 + 7) × 40 + (80 + 7) × 3 = 3 200 + 280 + 240 + 21 = 3 741 où l'on utilise plusieurs fois $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_\times\_dist}}$.

$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_\times\_dist}}$ peut aussi être mise en œuvre à partir d'une décomposition arithmétique, non nécessairement additive canonique ; ce ne sont plus les technologies de la numération qui justifient de la décomposition du nombre, mais $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{Dec\_+}}$ comme par exemple :
87 × 99
= 87 × (100 - 1) en décomposant 99 en 100 - 1
= 87 × 100 - 87 × 1 justifié par $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{dist}}$
= 8 700 - 87 en appliquant $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{multPD}}$
= 8 613 en convoquant $\mathbf{T}_{\mathbf{CR\_-}}$

L'exemple précédent montre que $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_\times\_dist}}$ est particulièrement efficace dans les multiplications d'un nombre par 99 (on multiplie ce nombre par 100 puis on retranche le nombre) ; il en serait de même dans un produit par 101 (on multiplie ce nombre par 100 puis on ajoute ce nombre).

- $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_\times\_dec\_epdc}}$ <u>: technique reposant sur la décomposition canonique des nombres en puissance de 10</u>

Cette technique ne concerne que les multiplications dont un des facteurs est un multiple d'une puissance de 10. Par exemple pour multiplier 5 par 700 :
5 × 700
= 5 × (7 × 100) en convoquant $\mathbf{T}_{\mathbf{tec/epdc}}$
= (5 × 7) × 100 justifiée par $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{ass\_\times}}$ ou par la définition de la multiplication en lien avec les espèces d'unités
= 35 × 100
= 3 500 en utilisant $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{multPD}}$

La propriété de commutativité de la multiplication $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{comm\_\times}}$ peut aussi être sous-jacente (par exemple, si on devait calculer 700 × 5).

- $\tau_{CR\_\times\_dec\text{-}arithm\times}$: technique basée sur la décomposition arithmétique multiplicative des nombres

Il s'agit dans cette technique d'utiliser la décomposition d'un des facteurs en produits de facteurs plus petits pour faciliter le calcul des produits ; cette technique est sous-tendue par $\Theta_{dec\_\times}$ et par les propriétés d'associativité et de commutativité de la multiplication.

Par exemple pour multiplier un nombre par 6, on le multiplie par 2 puis par 3. Par exemple :
17 × 6
= 17 × (2 × 3) justifiée par $\Theta_{dec\_\times}$.
= (17 × 2) × 3 justifiée par $\Theta_{ass\_\times}$.
= 34 × 3
= 102 en utilisant $\tau_{CR\_\times\_dist}$

Il en est de même pour multiplier par 4 (on multiplie par 2, puis par 2), par 12 (on multiplie par 3, puis par 4, ou par 2 puis par 6, etc.).

Cette technique permet aussi de décomposer en produit de facteurs un nombre donné pour faire apparaître un produit connu dans le répertoire : par exemple dans le produit 56 × 25, il est judicieux de décomposer 56 en 4 × 14, puisque le produit de 25 par 4 est égal à 100.

Ce qui s'écrit alors :
56 × 25 = (4 × 14) × 25 = 14 × (4 × 25)= 14 × 100 = 1400 en utilisant successivement $\Theta_{dec\_\times}$, $\Theta_{ass\_\times}$, $\Theta_{comm\_\times}$ et τ_{multPD}.

Il serait aussi possible d'écrire les nombres entiers comme quotient ; par exemple, dans l'exemple suivant d'utiliser que 25 est le quart de 100 (plutôt que d'écrire que 4 × 25 = 100), ce qui conduirait à une écriture du type : $56 \times 25 = 56 \times \frac{100}{4} = \frac{56}{4} \times 100 = 14 \times 100 = 1\,400$ et à des règles du type « pour multiplier par 25, on multiplie par 100 et on divise par 4 ». Ce type d'égalité, mettant en jeu des produits avec des quotients, n'apparaît pas dans les différents exemples proposés pour calculer le produit de 48 par 250 dans Durpaire & Mégard (2012, p. 38) et semble par conséquent ne pas être privilégiée en fin d'école.

III.2.4.ii Synthèse des techniques et des éléments technologiques pour $T_{CR\_\times}$ et techniques attendues

Techniques	Éléments technologiques et types de tâches convoqués	Domaine d'efficacité de la technique et attentes institutionnelles
τ_{multPD}	Θ_D et Θ_P	Un des facteurs est une puissance de 10
$\tau_{CR\_\times\_add\_it}$	Convoque T_{CR_+}	Un des facteurs est inférieur à 4
$\tau_{CR\_\times\_dist\_}$	Θ_{dist} - Θ_{dec_+} et convoque $T_{CR\_\times}$ et T_{CR_+} ou T_{CR_-}	
$\tau_{CR\_\times\_dec\_epdc}$	$\Theta_{ass\_\times}$ et convoque $T_{tec/epdc}$ τ_{multPD}	Un des facteurs est un multiple d'une puissance de 10
$\tau_{CR\_\times\_dec\text{-}arithm\times}$	$\Theta_{dec\_\times}$ - $\Theta_{ass\_\times}$ - $\Theta_{comm\_\times}$	Un des deux facteurs n'est pas un nombre premier

Tableau 3 - Techniques et technologies relatives à $T_{CR\_\times}$

Les différentes techniques recensées dans le Tableau 3 sont toutes attendues en fin d'école primaire comme le montrent les exemples figurant dans Durpaire & Mégard (2012, p. 38). Les auteurs soulignent même la possibilité, en revisitant $\mathbf{T_{CP\_\times}}$ de produire une écriture en ligne traduisant la propriété de double distributivité, tout en s'appuyant conjointement sur des grilles ou des tableaux similaires à celui de la Figure 10) :
48 × 250 = (40 + 8) × (200 + 50) = 40 × 200 + 8 × 200 + 40 × 50 + 8 × 50.

III.2.5 $\mathbf{T_{CR\_:}}$: calculer un quotient et un reste de façon réfléchie

III.2.5.i Techniques et technologies sous-jacentes

<u>- τ_{divPD} : technique pour déterminer le quotient et le reste d'une division par une puissance de 10</u>

Dans le cadre de l'OML 2A, nous avons déjà évoqué la technique τ_{divPD} consistant à déterminer le quotient et le reste dans une division par une puissance 10. En effet pour diviser 15 468 par 100, τ_{tronc} conduit à l'écriture : 15 468 = 154 × 100 + 68 unités et détermine le quotient (154) et le reste (68) de la division euclidienne Θ_{max} assurant le fait que le reste est inférieur au diviseur.

τ_{divPD} pourrait alors être formulé de la façon suivante : « dans la division euclidienne d'un nombre à n chiffres par 10^k (k ≤ n), le quotient est le nombre dont l'écriture chiffrée est constituée par les (n - k) premiers chiffres du nombre n et le reste est le nombre dont l'écriture chiffrée est constituée par les k derniers chiffres ».

- $\tau_{CR\_:\_dec\text{-}epdc}$ <u>: technique pour diviser un nombre de la forme a × 10^p (a non nul et p ≥ 1) par un nombre b × 10^n (b non nul et n ≤ p)</u>

Nous utilisons, pour justifier cette technique, la propriété $\Theta_{div\text{-}euc\_mult}$: dans la division euclidienne de *a* par *b* (*b* non nul), le quotient ne change pas quand on multiplie ou quand on divise le dividende (*a*) et le diviseur (*b*) par un entier k non nul et le reste *r* de la division euclidienne de *a* par *b* est multiplié par k. *Nous précisons que le produit du reste de la division de a par b par k ne constitue pas le reste de la division euclidienne de a × k par b × k.*

Par exemple :
- 52 000 : 1 300 = 520 : 13 = 40 (la division est exacte le reste est nul)
- pour diviser 53 100 par 1 300 : on divise 531 par 13, ce qui donne un quotient de 40 et un reste de 11, donc : 531 = 13 × 40 + 11. Le reste de la division de 53 100 par 1 300 est alors de 11 × 100, c'est à dire de 1 100.

- $\tau_{CR\_:\_dec\text{-}arithm\times}$ <u>: technique basée sur la décomposition arithmétique multiplicative des nombres</u>

Il s'agit ici d'utiliser une décomposition en produit de facteurs du diviseur. Par exemple, pour diviser par 6, on divise par 3 puis par 2. Cette technique repose sur $\Theta_{dec\_\times}$ qui assure la décomposition du diviseur s'il n'est pas un nombre premier et sur $\Theta_{div\text{-}par\text{-}prod}$.

Si la division est exacte, $\tau_{CR\_:\_dec\text{-}arithm\times}$ s'arrête à cette étape ; si elle n'est pas exacte, la détermination du reste s'effectue de la même façon que dans $\tau_{CR\_:\_dec\text{-}epdc}$ en mobilisant $\Theta_{div\text{-}euc\_mult}$.

- $\tau_{CR\_dec\text{-}arithm+}$ <u>: technique basée sur la décomposition additive ou soustractive arithmétique du dividende</u>

Il s'agit de décomposer le dividende soit de façon additive (en convoquant $\mathbf{T_{Tec/eapd}}$) mais principalement de façon arithmétique pour faire apparaître des multiples du diviseur. Nous nous plaçons dans des cas où la division est exacte.

Par exemple pour calculer le quotient de 3 577 par 7 :
3577 : 7 = (3500 + 70 + 7) : 7 en décomposant 3 577 grâce à $\mathbf{\Theta_{dec\_+}}$ et en faisant apparaître des multiples du diviseur
= (3500 : 7) + (70 : 7) + (7 : 7) d'après $\mathbf{\Theta_{div\text{-}somme\text{-}diff}}$
= 500 + 10 + 1 d'après $\mathbf{\tau_{divPD}}$
= 511

La détermination par un calcul mental réfléchi du quotient et du reste d'une division est exploitée lors de la décomposition d'une fraction sous la forme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1 ; ce type de décomposition est donc attendu en fin de cycle 3. Par ailleurs, comme nous l'avons souligné dans la description de $\mathbf{T_{CP\_:}}$ la détermination des quotients et des restes partiels dans le calcul posé d'une division peut aussi être réalisée mentalement et dans ce cas relever de $\mathbf{T_{CR\_:}}$.

III.2.5.ii Synthèse des techniques et des éléments technologiques pour $T_{CR\_:}$ et techniques attendues

Si $\mathbf{\tau_{CR\_dec\text{-}arithm+}}$ est citée explicitement comme une technique possible pour calculer un quotient de façon réfléchie dans Durpaire & Mégard (2012, p. 38) et que les techniques de division par 10, 100, 1 000 sont en lien par la suite avec les nombres décimaux, aucune indication n'est donnée quant à $\mathbf{\tau_{CR\_dec\text{-}arithm\times}}$ dans les programmes ou dans les documents ressource. Il n'est pas fait état non plus du principe $\mathbf{\Theta_{div\text{-}euc\_mult}}$ qui correspond à une propriété spécifique de la division euclidienne. Les différentes techniques de calcul réfléchi de la division sont listées dans le Tableau 4 suivant.

Techniques	**Éléments technologiques et types de tâches convoqués**	**Domaine d'efficacité de la technique et attentes institutionnelles**
$\mathbf{\tau_{divPD}}$	$\mathbf{\Theta_P}$ - $\mathbf{\Theta_{max}}$ et $\mathbf{\Theta_D}$	*Non attendue lorsque la division n'est pas exacte*
$\mathbf{\tau_{CR\_:\_dec\text{-}epdc}}$	$\mathbf{\Theta_{div\text{-}euc\_mult}}$	
$\mathbf{\tau_{CR\_:\_dec\text{-}arithm\times}}$	$\mathbf{\Theta_{div\text{-}par\text{-}prod}}$ et $\mathbf{\Theta_{dec\_\times}}$ (éventuellement $\mathbf{\Theta_{div\text{-}euc\_mult}}$)	*Non attendue lorsque la division n'est pas exacte*
$\mathbf{\tau_{CR\_:\_dec\text{-}arithm+}}$	$\mathbf{\Theta_{dec\_+}}$ et $\mathbf{\Theta_{div\text{-}somme\text{-}diff}}$	*Non attendue lorsque la division n'est pas exacte*

Tableau 4 - Techniques et technologies relatives à $\mathbf{T_{CR\_:}}$

En ce qui concerne les techniques de détermination du quotient et du reste de façon réfléchie, elles sont implicitement attendues en fin d'école puisqu'elles interviennent dans le calcul posé d'une division euclidienne lorsque les quotients et les restes partiels sont calculés à partir des dividendes partiels. En revanche, les technologies liées aux propriétés de la division euclidienne qui permettent de justifier les différentes techniques de calcul réfléchi du quotient et du reste d'une division euclidienne sont ignorées dans les programmes.

III.2.6 T_{CR_ODG} : donner l'ordre de grandeur d'un résultat

Le calcul réfléchi ne consiste pas uniquement en la recherche d'un calcul exact ; si le calcul approché ne figure pas explicitement dans les programmes de 2008, « estimer mentalement un ordre de grandeur du résultat » est une capacité relevant du CM1 selon les repères pour les progressions. La pratique du calcul approché doit, par ailleurs, d'être amorcée dès le cycle 2 comme l'indiquent les documents ressources.

> « Calcul exact et calcul approché permettent tous deux mais de manière différente une prise de recul sur le sens des nombres, la numération, le sens des opérations et favorisent également une certaine mise à distance dans la résolution de problèmes. » Durpaire & Mégard (2012, p. 34)

Le calcul approché mobilise les mêmes techniques que celles employées pour le calcul exact, mais en les appliquant à des nombres qui sont des valeurs approchées des nombres de départ ; l'approximation peut dépendre du contexte du problème, mais aussi des habiletés de l'élève que ce soit dans sa maitrise des répertoires (additifs et multiplicatifs) ou des techniques de calcul réfléchi. Par conséquent, le choix des approximations réalisées sur chacun des nombres est difficilement généralisable.

Néanmoins, quelle que soit l'opération, il est généralement plus aisé de calculer avec des nombres qui sont des multiples d'une puissance de 10. Par conséquent, ce type de tâche peut convoquer un premier type de tâche relevant de l'OML 2A, $\mathbf{T_{CNd}}$ (« nombre de... ») afin d'avoir une approximation du nombre de départ par un nombre multiple d'une puissance de 10.

La détermination de l'ordre de grandeur du résultat passe ensuite par un calcul réfléchi à partir des nombres multiples d'une puissance de 10.

III.2.7 Synthèse sur les techniques de calcul réfléchi

Si les techniques de calcul posé sont justifiées principalement par les technologies de la numération et ont une portée indépendante des nombres en jeu, il n'en est pas de même des techniques de calcul réfléchi. Celles-ci mobilisent des propriétés sur les nombres et les opérations beaucoup plus variées que celles de calcul posé. Nous avons d'ailleurs montré que les propriétés qui permettent de justifier certaines de ces techniques, en particulier celles de division euclidienne, sont ignorées par les programmes.

Pour chacune des opérations, nous avons montré qu'il existait différentes techniques de calcul réfléchi. Nous pouvons alors catégoriser l'ensemble de ces techniques de calcul réfléchi, quelle que soit l'opération considérée, selon les technologies qui permettent de les justifier ; nous distinguons alors les techniques :

- justifiées principalement par des éléments de la numération ($\mathbf{\Theta_P}$ - $\mathbf{\Theta_{max}}$ et $\mathbf{\Theta_D}$), comme $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_-\_dec\_eapdc}}$, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_-\_add\_trous}}$;

- reposant sur des décompositions arithmétiques (additives ou multiplicatives) et justifiées uniquement par les propriétés d'associativité ou de commutativité des différentes opérations (sauf la soustraction) ; par exemple : $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_\times\_dec\_epdc}}$, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_\times\_dec\text{-}arithm\times}}$, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_+\_dec\_eapdc}}$ ou encore $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_+\_dec\text{-}arithm+}}$;

- reposant sur des décompositions arithmétiques (additives ou multiplicatives) et justifiées par des propriétés autres des opérations ; par exemple $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_-\_exc\grave{e}s}}$, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_:\_dec\text{-}arithm+}}$ ou $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_\times\_dist}}$.

III.2.8 Place du calcul réfléchi dans les manuels de CM2 et écriture des relations

Ce paragraphe vise à éclairer nos propos quant à l'enseignement du calcul réfléchi tel qu'il est pris en compte dans les trois manuels que nous avons consultés. L'enseignement du calcul réfléchi est mené parallèlement à celui du calcul mental automatisé (tables de multiplication, compléments à 10, 100, etc.). Lorsque les opérations sont introduites à partir d'une situation d'approche, l'enseignant est invité à amener les élèves *via* le calcul réfléchi à faire émerger des techniques de calcul réfléchi pour favoriser les raisons d'être des techniques de calcul posé.

Outre son intérêt pour les calculs au quotidien, en particulier avec le calcul approché, le calcul réfléchi a d'autres fonctions : apporter un élément de contrôle sur le résultat d'une opération en anticipant son ordre de grandeur et « rendre les nombres « familiers » aux élèves » (Peltier & al. 2009b) en les envisageant à partir de différents aspects (décompositions arithmétiques, canoniques, ordre de grandeur, etc.). Par conséquent, les manuels proposent des séances de calcul réfléchi de façon régulière dans leur programmation, que ce soit pour effectuer des calculs (exact ou approché), ou pour reconnaître des propriétés arithmétiques des nombres (ce nombre est-il un multiple de 2 ?).

Enfin, le calcul réfléchi pouvant conduire à l'écriture de calculs intermédiaires sous la forme de relations arithmétiques, nous souhaitions compléter notre propos en observant le type d'expressions arithmétiques figurant dans les manuels. En particulier, nous avons déjà souligné que le calcul réfléchi permet, à travers la réécriture des expressions arithmétiques et l'usage des parenthèses, de faire apparaître des sens différents pour des expressions ayant la même dénotation. Comment cela est-il pris en charge en fin d'école, d'autant que cela n'apparaît pas comme des attentes des programmes ?

Nous constatons d'abord que l'usage des parenthèses pour faire apparaître les différents sens d'expressions correspondant à une même dénotation apparait pour exprimer les réécritures des nombres (Figures 14 et 15).

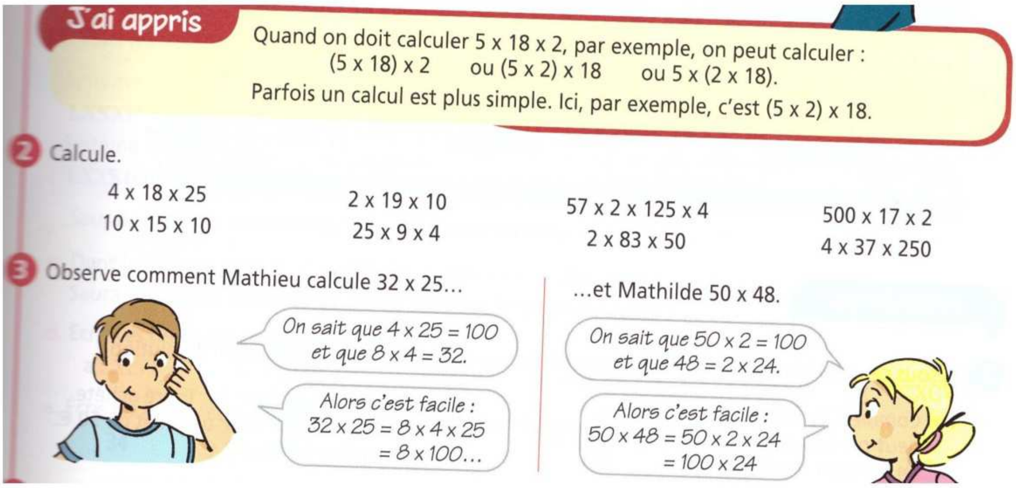


Figure 14 - Extrait de J'apprends les maths CM2 (Brissiaud & al., 2010a, p. 21)

La synthèse menée dans J'apprends les maths (Figure 14) utilise $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{dec\_\times}}$ pour décomposer les nombres sous la forme de produits de facteurs, et de façon implicite $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{ass\_\times}}$, $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{comm\_\times}}$ pour justifier les différentes réécritures. Le signe égal est utilisé comme relation d'équivalence et les parenthèses sont présentées pour montrer la façon dont les nombres sont associés pour faciliter le calcul.

Dans Cap Maths CM2 (Figure 15), il est proposé de faire des synthèses conduisant l'élève à produire des expressions arithmétiques avec parenthèses, comme dans l'exemple ci-dessous illustrant le calcul de 23 × 17:

• **En synthèse :**

➡ Insister sur l'intérêt qu'il y a à **décomposer l'un des nombres**, ce qui peut être trouvé ou illustré en découpant le quadrillage par exemple en 2 rectangles.

➡ Insister sur les **formulations orales** du type : 23 × 17, c'est 23 fois 17, donc 20 fois 17 et encore 3 fois 17 ; c'est aussi 17 fois 23, donc 10 fois 23 et encore 7 fois 23.

➡ Faire produire par les élèves les **écritures à l'aide de parenthèses**, par exemple : 23 × 17 = (20 × 17) + (3 × 17)
23 × 17 = (10 × 17) + (10 × 17) + (3 × 17)
23 × 17 = (23 × 10) + (23 × 7).

• Proposer des illustrations schématisées, par exemple :

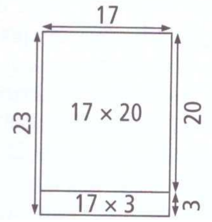


Figure 15 - Extraits du guide l'enseignant Cap Maths CM2 (Charnay & al. 2010 b, p. 10)

Si l'utilisation des parenthèses dans J'apprends les maths permet de montrer la réorganisation des nombres en vue des calculs, elles ont un rôle similaire dans le calcul de 23 × 17 : comme les priorités opératoires ne sont pas enseignées à l'école primaire, les parenthèses employées dans les expressions arithmétiques permettent de préciser les calculs qui seront effectués en priorité. Nous notons que la relation 23 × 17 = (20 + 3) × 17 ne figure pas dans le guide du maître, alors qu'elle permet non seulement de montrer la décomposition additive de 23 en 20 + 3, mais aussi de justifier l'équivalence 23 × 17 = (20 × 17) + (3 × 17) à l'aide de $\boldsymbol{\Theta}_{\text{dist.}}$

Euromaths (Peltier & al. 2009a) utilise les parenthèses en dehors de toute situation de calcul réfléchi et précise même que « dans un calcul entre parenthèses, on calcule d'abord les opérations entre parenthèses » (Figure 16) :

3 Calcule :

a. 3 + (4 × 7)	7 + (6 × 3)	(12 × 3) + 7	(2 × 15) + 10
(3 + 4) × 7	(7 + 6) × 3	12 × (3 + 7)	2 × (15 + 10)
b. 56 – (6 + 24)	5 × (8 – 2)	(45 – 20) – 19	(36 – 6) × 5
(56 – 6) + 24	(5 × 8) – 2	45 – (20 – 19)	36 – (6 × 5)

4 On sait que 23 × 16 = 368.
Calcule sans poser les multiplications. Explique comment tu fais.
a. 23 × 17 b. 24 × 16 c. 23 × 26 d. 33 × 16

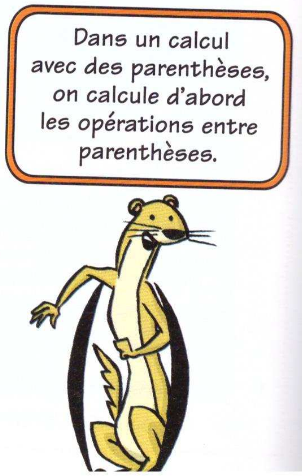


Figure 16 - Extrait d'Euromaths CM2 (Peltier & al. 2010 a, p. 56)

Ces quelques exemples montrent que les parenthèses sont des ostensifs intervenant dans la production d'expressions arithmétiques dès le CM2 ; le signe égal apparaît quant à lui avec un statut de relation d'équivalence lorsqu'il est nécessaire de réécrire une expression.

Nous soulignons enfin la spécificité de la division euclidienne en lien avec l'utilisation du signe égal. La division euclidienne amène à un résultat composé de deux nombres, le quotient et le reste. Par conséquent, l'utilisation du signe = comme annonciateur du résultat ne peut se faire comme pour les autres opérations ; les auteurs des manuels consultés utilisent alors soit l'égalité caractéristique de la division euclidienne ($a = b \times q + r$), soit d'autres ostensifs (Brissiaud & al. 2010 b, p.28) remplaçant le signe égal par un point d'interrogation et conduisant à des écritures du type :

80 : 25 ? $\begin{matrix} q=3 \\ r=5 \end{matrix}$

Dans les manuels consultés, la construction du nombre et des quatre opérations est prise en compte sur l'ensemble de l'année de CM2 avec une articulation permanente entre résolution de problèmes, calcul posé et réfléchi à travers la programmation proposée. Après avoir présenté les différentes praxéologies de l'OM de référence sur le domaine « numération décimale et arithmétique des entiers », nous concluons ce chapitre par une synthèse sur l'évolution des techniques et des technologies à l'école élémentaire et un schéma récapitulatif des techniques et technologies relatives à chacun des types de tâches.

IV SYNTHÈSE

IV.1 Évolution des techniques et technologies à l'école primaire

Ce paragraphe permet de situer les techniques à enseigner en fin d'école au regard de leur évolution depuis l'école maternelle, avec une mise en perspective des éléments technologiques qui les sous-tendent. Il nous permet de dégager des points de rupture durant cette évolution qui permettront, dans le chapitre six, de définir un modèle d'analyse permettant de caractériser les praxéologies apprises en fonction de celles de référence et de définir des cohérences de fonctionnement liées à un usage dominant de technologies.

Nous reprenons dans ce paragraphe le même plan que celui qui a structuré ce chapitre et commençons par traiter de l'évolution dans les modes de représentation d'un problème donné ; pour ce faire, nous nous appuyons sur Peltier & al. (2009b, p.18). Au cycle 2, les modes de représentations des problèmes évoluent pour passer progressivement d'un mode de représentation figurative non opératoire, à un mode de représentation analogique. Au début du cycle 2, les nombres en jeu dans un problème restent associés au contexte : l'élève représente des collections d'objets symbolisant les données du problème avec des dessins faisant apparaître les objets d'une manière de plus en plus simplifiée (avec des traits ou des ronds symbolisant les objets) et permettant de mettre en œuvre des procédures de résolution.

L'entrée dans un mode de représentation symbolique se fait à partir du cycle 2, en même temps que les opérations apparaissent pour résoudre des problèmes ; des représentations schématiques (schémas avec flèches, tableaux, etc.) sont proposées au même moment que s'effectue l'entrée dans le symbolisme arithmétique, la production d'expressions arithmétiques traduisant la modélisation du problème par une opération.

IV.1.1 Du comptage au calcul

Pour résoudre des problèmes de dénombrement mettant en jeu une ou deux collections, la technique de comptage $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{Compt}}$ est enseignée dès l'école maternelle ; elle repose sur un modèle que nous avons appelé « modèle collection » dans lequel les nombres en jeu sont associés à des collections et dépendent donc du contexte dans lequel le problème est formulé. De la même façon, à partir du « modèle collection », la résolution des problèmes de division passe initialement à la maternelle comme au début du cycle 2, par la réalisation de groupements ou de partages à partir de collections.

A l'école maternelle, la détermination du cardinal d'une collection passe par une technique de comptage ; Brissiaud (2013) explique alors l'intérêt à utiliser un « comptage-dénombrement » plutôt qu'un « comptage-numérotage » pour faciliter l'accès au calcul. A partir du cycle 2, l'écriture chiffrée des nombres repose sur les aspects de la numération décimale, à savoir $\mathbf{\Theta_P}$, $\mathbf{\Theta_{max}}$ et $\mathbf{\Theta_D}$; la technique de comptage qui pouvait éventuellement permettre de dénombrer une collection en maternelle évolue vers d'autres techniques, ayant une portée plus importante et mettant en jeu ces technologies nouvelles. L'apparition des technologies de la numération dans les techniques de dénombrement de collections constitue alors un premier point de rupture avec $\boldsymbol{\tau_{Compt}}$ qui est lié au précédent.

Le cycle 2 a pour objectif de construire le sens des opérations à travers la résolution de problèmes additifs ou multiplicatifs ; il s'agit donc de faire évoluer la technique de comptage vers des techniques de calcul (réfléchi ou posé) pour l'addition, la soustraction et la multiplication à un chiffre. L'utilisation des techniques de calcul, pour qu'elles soient efficaces, nécessite la connaissance des répertoires additifs ou multiplicatifs, c'est-à-dire de savoirs automatisés. Comme nous l'avons exposé, les technologies qui sous-tendent les techniques de calcul posé et réfléchi diffèrent de celles du comptage. Si le comptage s'appuie sur les collections, les techniques de calcul reposent sur des propriétés de la numération décimale, des nombres et des opérations pour le calcul réfléchi ; l'évolution de $\boldsymbol{\tau_{Compt}}$ vers les techniques de calcul, posé ou réfléchi, présente donc un second point de rupture.

Nous prendrons en compte ces deux points de rupture pour l'analyse des productions des élèves et chercherons, principalement lors de l'évaluation diagnostique, à identifier par des cohérences de fonctionnement des élèves qui utilisent en fin d'école des techniques de comptage. Par ailleurs, lors de l'analyse *a priori* des tâches des évaluations en vue de l'étude de leur validité, nous observerons si la tâche peut être résolue avec des techniques de comptage ou si elle nécessite effectivement des techniques de calcul. En particulier, nous tiendrons compte de la taille des nombres en jeu pour nous assurer de l'adéquation entre l'objectif d'évaluation (si celui-ci porte sur du calcul) et la tâche proposée.

IV.1.2 Évolution des technologies et des techniques de calcul

L'évolution des techniques de calcul liées à celle de l'enseignement des différentes opérations demande à ce que les répertoires additifs et multiplicatifs soient davantage maitrisés ; si seuls les répertoires additifs sont utilisés en début de cycle 2 pour traiter les additions et les soustractions, la connaissance des répertoires multiplicatifs devient alors nécessaire en fin de cycle 2 et au cycle 3, pour les calculs de multiplication et de division.

Les techniques de calcul posé des quatre opérations n'évoluent guère entre le début de leur enseignement et la fin ; en revanche, les techniques de calcul réfléchi s'enrichissent et se diversifient, mobilisant davantage les technologies des opérations et les décompositions arithmétiques des nombres. Les technologies apparaissant dans les premières techniques de calcul réfléchi sont celles de la numération et la commutativité et l'associativité ($\mathbf{\Theta_{ass\_+}}$, $\mathbf{\Theta_{ass\_\times}}$, $\mathbf{\Theta_{comm\_+}}$ et $\mathbf{\Theta_{comm\_\times}}$) de l'opération considérée et sont en rapport avec les technologies de la technique de calcul posé ; d'autres techniques apparaissent en lien avec des technologies spécifiques aux propriétés arithmétiques des opérations (distributivité de la multiplication $\mathbf{\Theta_{dist}}$, écart constant pour la soustraction $\mathbf{\Theta_{écart}}$, division d'une somme ou d'une différence $\mathbf{\Theta_{div\text{-}somme\text{-}diff}}$).

Il ne s'agit pas ici de pointer une rupture dans l'évolution et l'enrichissement des techniques de calcul réfléchi, mais plutôt d'observer que les technologies qui les sous-tendent évoluent. Les technologies des premières techniques de calcul réfléchi enseignées sont des propriétés de l'opération considérée et des propriétés de la numération, les nombres étant décomposés de façon additive. Les techniques évoluent en mettant en jeu des décompositions arithmétiques des nombres et sont alors justifiées par des propriétés plus complexes des opérations. Nous soulignons alors que les propriétés de ces opérations ne figurent pas explicitement dans les programmes et ne font pas l'objet d'un apprentissage spécifique.

En ce qui concerne la définition des opérations : la division euclidienne apparaît comme une opération spécifique et différente des autres (addition, soustraction, multiplication), puisque le résultat produit est constitué de deux nombres (le quotient et le reste) alors que les trois autres conduisent à un résultat sous la forme d'un seul nombre. La définition même de la division euclidienne, imposant une condition sur le reste et faisant l'objet d'un élément technologique spécifique $\mathbf{\Theta}_{\text{div-euc}}$ témoigne de la complexité de l'opération. L'évolution des techniques de calcul d'une division euclidienne, des soustractions successives à l'encadrement du dividende par des produits, puis à une technique de division posée correspond à une prise en compte de cette spécificité et de cette complexité dans le processus de transposition.

La liste des différentes praxéologies de calcul réfléchi permettra par la suite d'analyser les tâches d'évaluation pour déterminer les différentes techniques de résolution et les technologies qui les sous-tendent ; nous pourrons alors rechercher une progressivité des techniques et des technologies en jeu dans ces tâches et étudier les productions des élèves au regard de cette dernière.

Nous concluons cette partie par un retour sur le chapitre précédent et sur l'évolution des techniques et des transpositions au fil du temps. Nous avons constaté que, mis à part pour la soustraction, les techniques de calcul posé des quatre opérations et les ostensifs qui interviennent dans la disposition avaient peu évolué depuis Bezout et Reynaud. Les techniques de calcul réfléchi enseignées actuellement à l'école élémentaire rejoignent celles présentes dans les manuels d'arithmétique, mais les technologies restent désormais implicites, alors que certaines des propriétés étaient formulées explicitement, en particulier dans André & Haillecourt (1872). Nous observons aussi une évolution importante dans l'utilisation des relations arithmétiques pour symboliser les calculs menés sur les expressions ; les manuels de CM2 actuels utilisent des parenthèses et le signe d'égalité de façon plus importante, non seulement pour annoncer un résultat, mais aussi comme relation d'équivalence.

IV.2 Schéma synthétique de l'organisation des praxéologies dans l'OM de référence

Comme nous l'avons précisé en introduction, les praxéologies définies dans ce chapitre sont exploitées par la suite avec des objectifs différents :
- l'analyse du contenu des évaluations CEDRE (chapitre 5),
- la conception d'un modèle d'analyse multidimensionnelle permettant de construire des profils d'élèves à partir d'une évaluation diagnostique (chapitre 6),
- la conception de l'évaluation diagnostique et l'analyse des réponses des élèves (chapitre 7).

Nous proposons ci-après un schéma récapitulatif des praxéologies, par OMR, faisant apparaître : les types de tâches, les techniques et les technologies attendues en fin d'école ; mais nous ne faisons pas apparaître les techniques et technologies de comptage dans cette synthèse. Les techniques de calcul réfléchi étant assez nombreuses, nous ne les faisons pas apparaitre sous leurs différentes dénominations et renvoyons à la liste figurant en fin de thèse (après la bibliographie et avant les Annexes) pour en avoir une liste exhaustive.

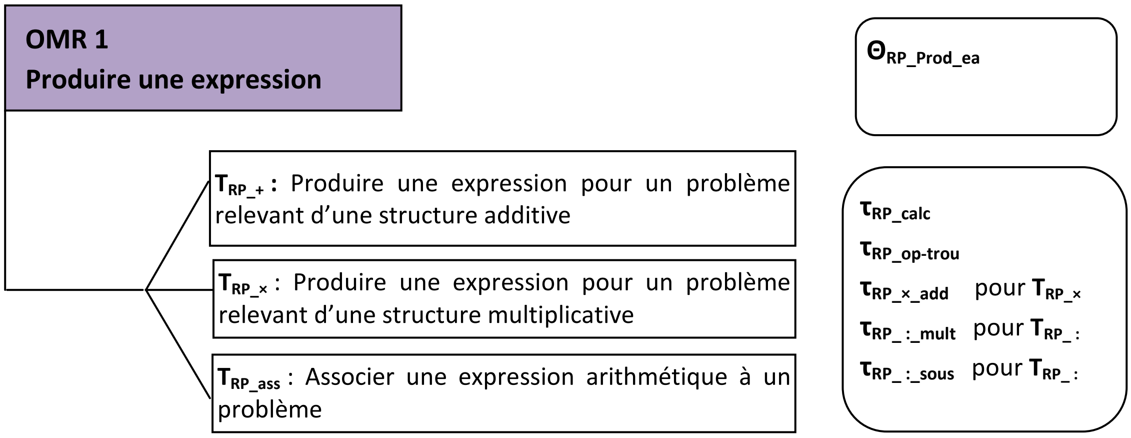


Schéma 5 - Types de tâches, techniques et technologies associées à l'OMR 1

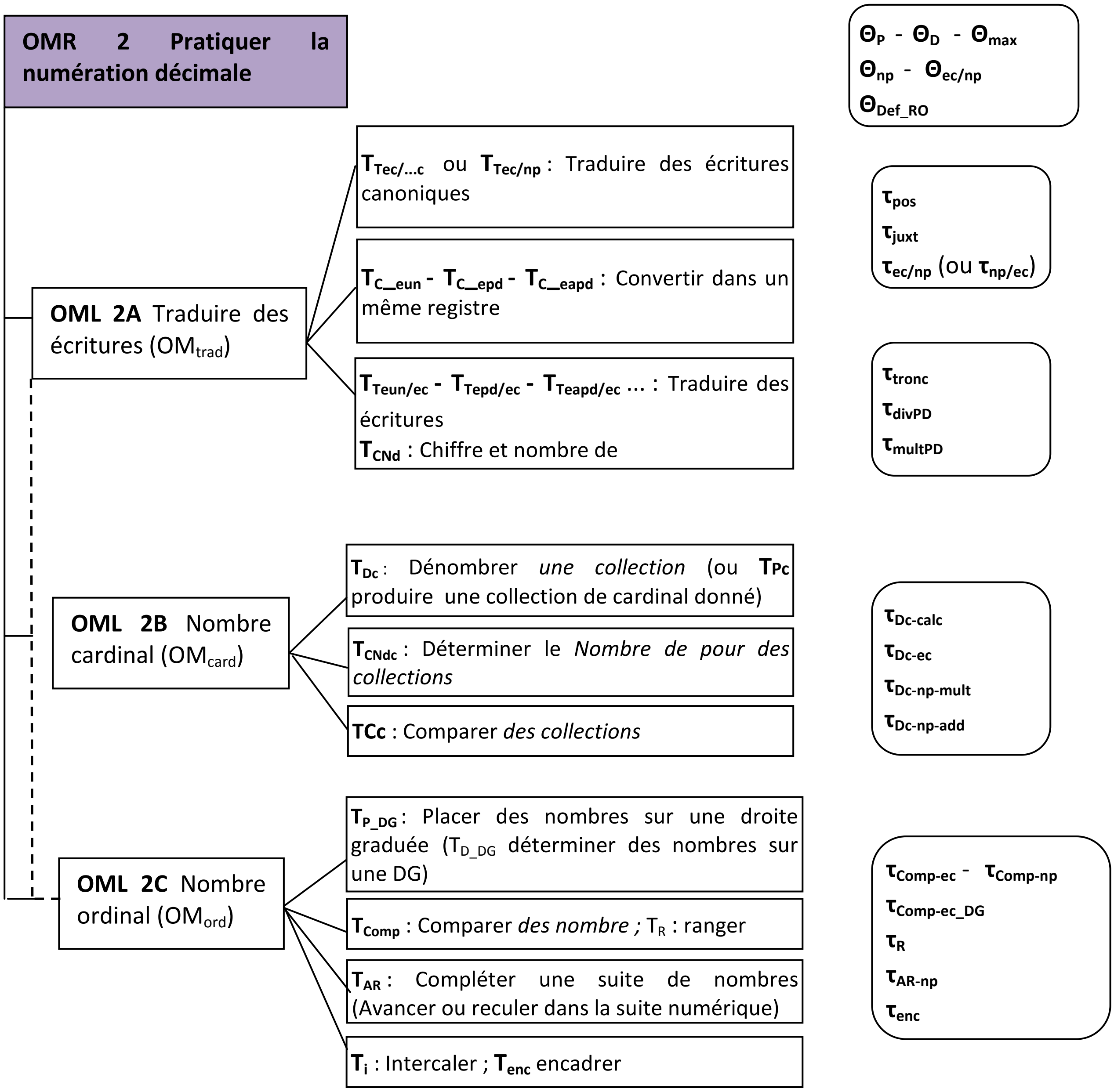


Schéma 6 - Types de tâches, techniques et technologies associées à l'OMR 2

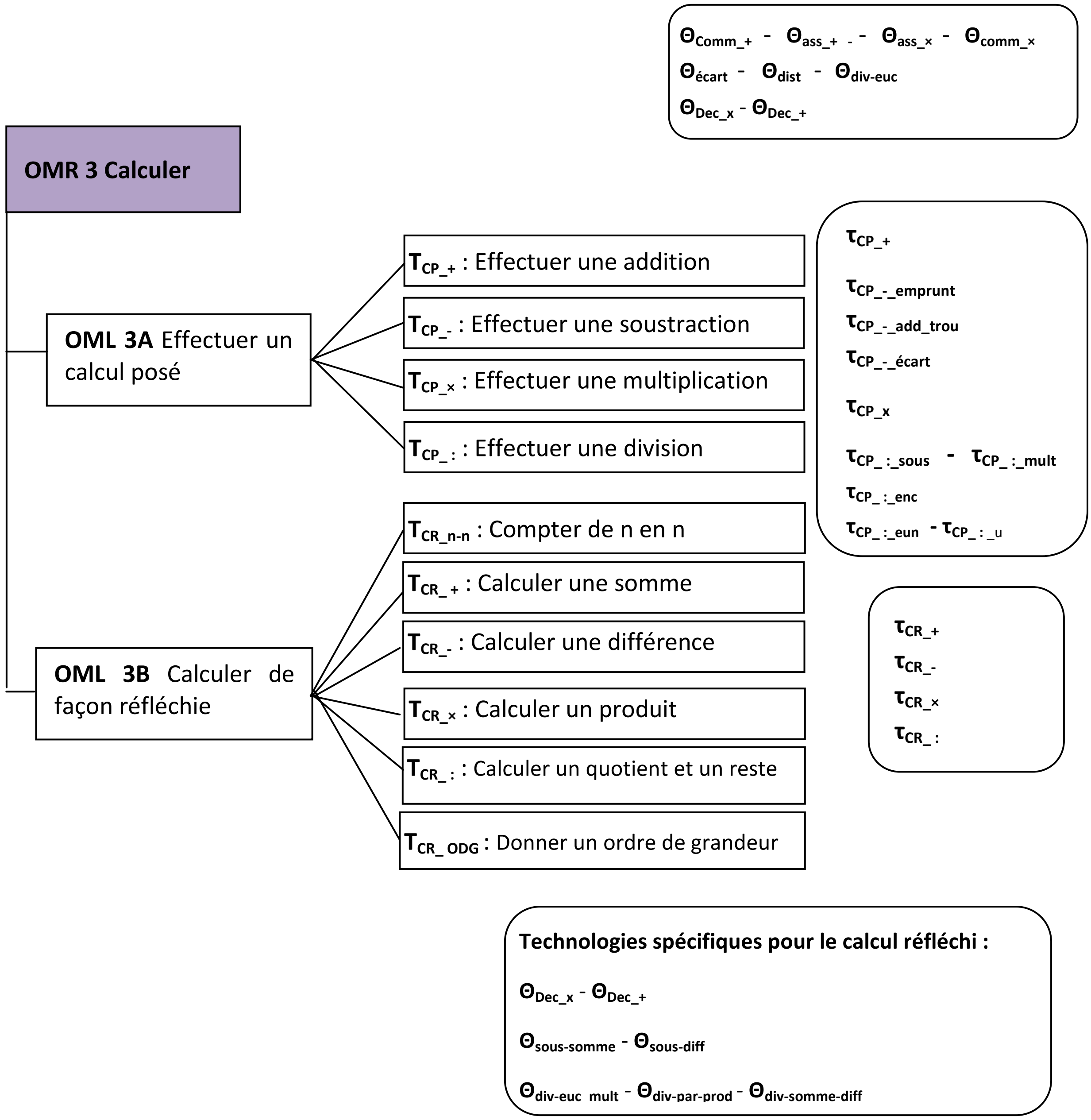


Schéma 7 - Types de tâches, techniques et technologies associées à l'OMR 3

CHAPITRE 4

MÉTHODOLOGIE D'ANALYSE DE DISPOSITIFS D'ÉVALUATION

Dans le premier chapitre, nous avons montré la place importante qu'occupe la psychométrie dans la sélection des items et dans la production des résultats des évaluations externes nationales et internationales. Nous soulignions alors la nécessité de mener des travaux articulant de façon complémentaire une approche didactique et psychométrique pour garantir de la validité de telles évaluations et nous avions formulé le premier axe de la problématique de la thèse par les questions suivantes : comment la définition d'une praxéologie de référence, s'appuyant sur une étude épistémologique, permet-elle d'analyser le contenu d'une évaluation et de rendre compte des résultats des élèves ? En quoi des approches épistémologique, didactique et psycho-didactique permettent-elles, dans une évaluation externe, d'apporter des preuves de validité complémentaires à celles apportées par une approche psychométrique ?

Nous présentons dans ce chapitre une méthodologie d'analyse de dispositifs d'évaluation [1] permettant d'articuler ces trois approches (épistémologique, didactique et psychométrique). Elle se veut assez générale et adaptée pour toute évaluation externe en mathématiques (et pas uniquement sur les évaluations menées en fin d'école ou sur le domaine des nombres entiers). Nous montrons dans ce chapitre la façon dont nous exploitons une praxéologie de référence pour analyser une évaluation ; nous illustrons cette méthodologie à partir de l'OM de référence définie dans le chapitre 3 et d'items extraits des bilans CEDRE de fin d'école sur le domaine spécifique des nombres entiers. Il reviendra à ceux qui souhaitent étudier d'autres évaluations externes en mathématiques, d'adapter cette méthodologie aux domaines mathématiques et niveaux considérés. Ainsi, dans le cadre de l'ANR NéoPraEval, l'analyse de la validité des bilans CEDRE 2008 et 2014 dans le domaine

[1] Ce chapitre s'appuie sur les travaux réalisés dans le cadre de la tâche 1 du projet ANR NeoPraEval (Grugeon-Allys & Grapin 2015a, 2015b). Cette tâche regroupe des chercheurs de différents horizons (didactique des mathématiques, sciences de l'éducation, psychométrie) et a pour objectif de développer une méthodologie d'expertise pour analyser et concevoir des dispositifs d'évaluation et d'être force de proposition pour faire évoluer des dispositifs d'évaluation existant (CEDRE). Dans le cadre de la thèse, nous nous limitons à une première description de cette méthodologie sur notre domaine d'étude, en fin d'école, sans visée prescriptrice.

algébrique en fin de collège est menée avec une méthodologie identique, mais avec des objets d'analyse adaptés au domaine de l'algèbre.

Analyser un dispositif d'évaluation signifie pour nous, non seulement étudier le contenu du test à travers les items proposés et les modalités de codage des réponses, mais aussi observer les résultats produits au regard des enjeux de l'évaluation et plus globalement au regard des objectifs fixés par les programmes (lorsque les enjeux de l'évaluation sont liés aux programmes scolaires). Il s'agit d'apporter des preuves de validité sur le contenu du test et sur les processus de réponses ; nous avons esquissé dans le chapitre 1 l'intérêt d'une approche didactique dans la détermination de ce type de preuves et lui accordons une place centrale dans la méthodologie que nous concevons.

Afin de garantir la validité de contenu d'une évaluation, nous avons montré que, lors de la conception du test (paragraphe III.1.2 du chapitre 1), il convenait de sélectionner les items non seulement pour qu'ils soient représentatifs du domaine évalué et le recouvrent, mais aussi pour qu'ils mettent effectivement en jeu les techniques et les éléments technologico-théoriques que l'on souhaite évaluer.

Si la représentativité des items peut être étudiée au regard de la praxéologie de référence, le deuxième critère de sélection peut être abordé sous deux points de vue :
- à partir d'une approche épistémologique et didactique, en se référant aux techniques et aux technologies de résolution de la tâche définies *via* la praxéologie de référence : quelles sont les techniques qu'il peut être possible de convoquer pour résoudre la tâche ? Quelles sont celles attendues au niveau scolaire où se place l'évaluation ? Y a-t-il d'autres techniques possibles de résolution ? Quelles sont les technologies sous-tendant ces techniques ?, etc.
- à partir d'une approche psychologique, en tenant compte des processus de réponse effectivement mis en jeu par l'élève pour répondre à la question posée au regard de l'analyse *a priori* de la tâche : l'élève met-il effectivement en jeu la (ou les) techniques déterminées *a priori* ? Certains éléments du contexte de la tâche viennent-ils perturber la résolution ? Avec quel impact ? etc.

Ces approches permettent ainsi d'apporter des preuves de validité sur le contenu de l'évaluation, mais aussi sur les processus de réponse ; elles conduisent, par leur complémentarité, à une analyse didactique de la validité de contenu d'une évaluation. Nous distinguons alors deux facettes de cette validité : une épistémo-didactique et une psycho-didactique. Nous consacrons les deux premières parties de ce chapitre à la description de ces deux facettes et expliquons la façon dont nous menons une analyse selon un double niveau : local pour une analyse item par item et global sur l'ensemble du test.

Au-delà de la représentativité et couverture du domaine par les tâches sélectionnées pour l'évaluation, nous avions montré qu'il pouvait être intéressant que ces tâches soient également de complexité variée. La comparaison de la complexité d'un item, déterminée *a priori* didactiquement, avec la difficulté d'un item calculée statistiquement après passation est une des questions que nous avions abordées au cours du chapitre 1 (paragraphe III.1.4), en expliquant qu'une telle comparaison pouvait permettre une ré-interprétation de certains résultats. La troisième partie de ce chapitre propose donc d'aborder la question de la complexité d'une tâche sous un angle didactique.

Nous montrons enfin, dans une quatrième partie, en quoi l'approche didactique de la validité peut se montrer complémentaire à une approche psychométrique, que ce soit en amont de la conception du test pour la sélection des items, lors de la conception du test ou en aval de la passation, lors de l'interprétation des résultats. Nous concluons ce chapitre par une synthèse méthodologique que nous opérationnalisons dans le chapitre suivant pour l'analyse de l'évaluation CEDRE.

I FACETTE ÉPISTÉMO-DIDACTIQUE DE LA VALIDITÉ DE CONTENU : EXPLOITATION DE LA PRAXÉOLOGIE DE RÉFÉRENCE

Apporter des preuves de validité didactiques sur le contenu de l'évaluation demande d'abord à ce que, sur un domaine mathématique et un niveau donnés, les savoirs à évaluer soient définis. Par exemple, si l'évaluation vise à évaluer les connaissances des élèves au regard des programmes (comme pour CEDRE), les savoirs à évaluer sont alors définis par rapport aux programmes et donc par rapport aux praxéologies à enseigner. En situant notre analyse par rapport à l'OM de référence, nous pouvons alors analyser le contenu de l'évaluation au regard des praxéologies à enseigner, mais aussi dégager des caractéristiques des savoirs appris et interroger les praxéologies enseignées.

Nous montrons dans cette partie la façon dont nous exploitons les caractéristiques de l'OM de référence pour apporter des preuves de validité, en nous plaçant successivement à deux niveaux d'analyse : localement d'abord, item par item, en réalisant une analyse *a priori* des tâches selon des éléments didactiques que nous listons dans les premiers paragraphes, puis globalement, sur l'ensemble des items proposés dans l'évaluation.

I.1 Facette épistémo-didactique : étude locale du contenu du test

I.1.1 Analyse *a priori* des tâches

Les éléments que nous retenons pour décrire les tâches de l'évaluation sont ceux qui interviennent usuellement dans le cadre d'une analyse *a priori*, à savoir :

- le caractère *outil* ou objet du savoir,
- les types de tâches, les registres de représentation sémiotique et leur éventuelle congruence,
- la ou les techniques(s) attendue(s) en lien avec les éléments technologico-théoriques qui les sous-tendent,
- le niveau d'intervention des types de tâches (Castela 2008), défini à partir des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances (Robert 1998) et croisant à la fois le niveau de convocation des praxéologies et l'ancienneté des objets de savoir dans l'enseignement (récemment enseignés ou plus anciens, qui ne sont plus enjeu d'enseignement.)

A chaque item de l'évaluation est associé un ou plusieurs types de tâches ; l'analyse *a priori* est alors menée selon les praxéologies locales définies dans l'OM de référence. Nous prenons en compte les programmes scolaires, plus particulièrement dans les évaluations où l'objectif affiché est d'évaluer les savoirs au regard des programmes et de l'enseignement (toutes les évaluations ne s'appuyant pas sur cette approche curriculaire[2]). L'étude locale que nous menons pour chaque item consiste alors à réaliser une analyse *a priori* de chacune des tâches ; nous ré-exploitons ensuite cette analyse dans l'étude globale du contenu.

Par conséquent, au regard de la praxéologie de référence et des programmes, l'analyse *a priori* de chaque tâche permet d'étudier sa pertinence par rapport à l'objectif d'évaluation qui lui est attribué, en lien avec le codage retenu pour le traitement ; il s'agit en particulier de s'assurer que la technique

[2] Le caractère général que nous souhaitons donner à cette méthodologie impose de prendre en compte aussi les évaluations externes qui ne s'appuient pas sur les programmes scolaires en vigueur, comme c'est le cas pour PISA.

mise en jeu dans la résolution de la tâche correspond bien à l'objectif d'évaluation assigné à la tâche[3].

Prenons un premier exemple d'item de calcul mental[4] extrait de l'évaluation CEDRE 2008 fin d'école : la consigne orale était « 30 multiplié par 21 égal ? », l'élève étant invité à écrire le résultat dans la case correspondante. Cette tâche représente le type de tâche de calcul réfléchi $\mathbf{T_{CR\_x}}$ (OML 3B) : sa résolution appelle des techniques qui reposent sur des éléments technologiques liés aux propriétés des opérations. Dans l'exemple choisi, deux techniques sont adaptées : $\boldsymbol{\tau_{CR\_\times\_dist}}$ et $\boldsymbol{\tau_{CR\_\times\_dec\_epdc}}$. Elles sont justifiées respectivement par les éléments technologiques $\boldsymbol{\Theta_{dist}}$ et $\boldsymbol{\Theta_{ass\_x}}$, $\boldsymbol{\Theta_{comm\_x}}$ et conduisent aux calculs suivants :

$30 \times 21 = 30 \times (20 + 1) = 30 \times 20 + 30 \times 1 = 600 + 30 = 630$ avec $\boldsymbol{\tau_{CR\_\times\_dist}}$.

$30 \times 21 = 3 \times 10 \times 21= 3 \times 210 = 630$ ou $30 \times 21 = 3 \times 10 \times 21= 3 \times 21\times 10 = 63 \times 10 = 630$ avec $\boldsymbol{\tau_{CR\_\times\_dec\_epdc}}$.

L'analyse *a priori* de la tâche montre alors deux techniques possibles en fin d'école pour la résoudre, ces techniques mettant en jeu des technologies différentes. Or, seule la première est prise en compte lors de la conception du test et limite l'objectif assigné à cet item. En effet, il est spécifié dans l'analyse des résultats que réussir cet item « nécessite d'utiliser les règles de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition » (Lescure & Pastor 2012, p. 37). Cet exemple illustre la nécessité de confronter une analyse *a priori* de la tâche avec les objectifs assignés aux items pour garantir l'adéquation entre les techniques de résolution et l'objectif d'évaluation de l'item ; il montre aussi la façon dont nous intégrons, dans l'analyse *a priori*, l'étude praxéologique menée dans le chapitre 3. De tels décalages entre les techniques déterminées *a priori* et les objectifs d'évaluation ont pu être aussi établis par Grugeon & Grapin (2015a, 2015b) dans le domaine de l'algèbre pour le bilan CEDRE fin de collège : par exemple, certains items avaient un objectif affiché d'évaluer la résolution d'équations alors qu'ils pouvaient être résolus plus simplement, par une méthode arithmétique.

En plus des techniques de résolution possibles selon les types de tâches, nous prenons en compte des variables didactiques, en particulier liées au champ numérique : la présence ou non de retenues dans les additions ou dans les soustractions[5], le type de répertoire en jeu (simples, avec des nombres inférieurs à 5, ou complexes) ou encore la taille des nombres en jeu. Pour les tâches relevant de l'OMR 1, nous considérons aussi la classe de problèmes (Vergnaud 1986) à laquelle appartient le problème considéré et le type de calcul auquel il conduit : soit le calcul peut être traité par la connaissance des répertoires, soit il convoque l'OML 3A (il nécessite d'être posé pour être résolu), soit il convoque l'OML 3B (il peut être résolu par du calcul réfléchi).

Nous avons montré à travers l'exemple de l'item de calcul réfléchi, la nécessité de mener une analyse *a priori* de la tâche pour déterminer en particulier les techniques qui permettent de la résoudre. Or, déterminer les techniques en jeu en lien avec les éléments technologiques n'est pas un élément suffisant : en effet, si l'objectif de l'item de calcul réfléchi était d'évaluer la disponibilité des savoirs

[3] Dans le bilan CEDRE école, les objectifs des items de l'évaluation sont définis *a priori* pour contrôler qu'ils sont en accord avec les programmes, et exploités *a posteriori* pour interpréter les résultats et caractériser les connaissances des élèves dans chacun des groupes.

[4] Le calcul mental s'est déroulé en 2008 à partir d'un CD audio ; tous les élèves ont donc passé les mêmes items de calcul mental dans les mêmes conditions. Chaque calcul a été répété une fois, et pour celui cité en exemple, les élèves ont eu 15 secondes de réflexion pour écrire leur réponse.

[5] Le terme de retenue dans les soustractions n'est pas adapté : il s'agit ici d'étudier si la soustraction chiffre à chiffre est possible ou non.

relatifs à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, une réponse de la forme : 30 × 21 = 30 × (20 + 1) = 30 × 20 + 30 × 1 = 500 + 30 = 530 devrait permettre de retenir que la démarche est correcte puisque l'erreur ne porte pas sur le savoir évalué (en lien avec l'objectif), mais sur une erreur de calcul.

La question du codage de la réponse intervient alors pour déterminer l'adéquation entre l'objectif affiché et la façon dont sont codées les réponses : elle se pose différemment selon la forme de la question. Pour les questions sous forme ouverte, il s'agit d'étudier comment sont évaluées les réponses et la place attribuée à la prise en compte de la technique dans le codage en lien avec l'objectif d'évaluation de l'item ; pour les QCM, la question se pose différemment, à travers les choix de réponse proposés. Nous abordons alors dans le paragraphe suivant la question du codage des questions ouvertes et par la suite celle du choix des distracteurs dans les QCM.

I.1.2 Codage de la réponse en question ouverte

Dans les évaluations externes pour lesquelles l'enjeu est plutôt d'établir un bilan des connaissances, la question du codage ne se pose pas de la même façon que pour celles qui ont un objectif de diagnostic. Pour ces dernières, nous proposerons dans le chapitre 6 un modèle d'analyse multidimensionnelle avec un codage des productions prenant en compte les techniques et les technologies mises en jeu par les élèves et la recherche des cohérences de fonctionnement. Procéder de cette façon serait aussi intéressant pour établir un bilan ciblé des savoirs mobilisés par des élèves en fonction des techniques apprises à un niveau scolaire donné sur des évaluations externes. Il serait alors nécessaire, pour pouvoir déterminer des cohérences de fonctionnement, d'avoir un nombre suffisant d'items appartenant à un même domaine et traités par un même élève pour pouvoir appliquer directement un modèle tel que nous le définirons ou alors il faudrait inférer d'abord à l'aide d'un modèle probabiliste la technique privilégiée par l'élève et ensuite appliquer le modèle didactique d'analyse. Dans tous les cas, l'intérêt de coder la technique en plus de la réponse est indéniable, mais n'est pas encore prévu dans les évaluations CEDRE.

Dans de telles évaluations, le codage des questions ouvertes est binaire : soit la réponse est exacte, soit elle est fausse. Non seulement la technique mise en œuvre par l'élève pour produire sa réponse n'est pas prise en compte mais, dans la résolution de problèmes, on ne distingue pas non plus les erreurs qui relèvent du choix du modèle de celles qui relèvent du calcul. Il est donc clair que l'on n'observe pas si la réponse est obtenue par une technique attendue à un niveau scolaire donné ou par une technique non attendue. Si ces distinctions sont nécessaires pour la conception d'un modèle diagnostique, elles pourraient l'être tout autant dans le cas d'une évaluation bilan comme CEDRE et conduiraient certainement à repenser les scores de réussite.

Nous considérons ici deux exemples, extraits de CEDRE 2008, pour situer notre propos :

<u>Problème 1 :</u> Monsieur Paul achète 9 rosiers à 4 € et 3 sapins à 17 € pièce. Quel est le montant de sa dépense ?

<u>Problème 2 :</u> Monsieur Jacques achète 8 cahiers et 5 stylos. Le prix d'un cahier est de 3 €. Le prix d'un stylo est de 2 €. Quel est le montant de sa dépense ?

Nous avons pu avoir accès aux réponses scannées des élèves, ce qui nous a permis d'effectuer un recodage des productions. Lorsque nous utilisons un codage binaire (réponse juste - réponse fausse), les réponses des 1 168 élèves ayant résolu les deux problèmes se répartissent de la façon suivante (Tableau 1) et correspondent aux résultats obtenus dans CEDRE.

	Réussite	Échec	Non réponse
Problème 1	57,6 %.	37,3 %	5,2 %
Problème 2	79,1 %	16,4 %	4,5 %

Tableau 1 - Résultats aux deux problèmes 1 et 2 avec un codage binaire

Nous avons ensuite recodé les productions en discernant les modèles mobilisés de façon incorrecte des erreurs de calcul (Annexes 1A et 1B) ; nous synthétisons ces résultats dans le tableau 2. Nous estimons qu'une production présente une technique « correcte » lorsque la production de l'élève permet d'avoir trace d'un ou plusieurs résultats intermédiaires correspondant aux deux produits et à la somme de ces produits, mais aussi à l'addition itérée (par exemple 4 + 4 + 4 + 4 ... + 17 + 17 ...) ; les techniques correctes sont donc identifiées ici comme celles qui mobilisent un modèle mathématique adéquat, même si ce n'est pas celui attendu en fin d'école. L'indication « sans trace » signifiant que seul le résultat est donné et qu'aucune trace de la technique adoptée ne figure sur la production.

	Réussite		**Échec**		
	Sans trace	Modèle adapté, pas d'erreur de calcul	Sans trace	Modèle adapté avec erreur de calcul	Modèle non adapté et/ou erreur de calcul
Problème 1	6,7 %	50,8 %	9,3 %	11,5 %	16,4 %
Problème 2	15,1 %	64 %	6 %	3,6 %	6,3 %

Tableau 2 - Résultats aux deux problèmes 1 et 2 avec un recodage tenant compte des erreurs de calcul

On observe alors que si on s'intéresse uniquement aux modèles choisis (en écartant les erreurs de calcul), les scores de réussite passent de 57,6 % à 69 % pour le premier problème et de 79,1 % à 82,7 % pour le second ; l'écart sur les pourcentages de réussite, particulièrement visible pour le premier problème, montre alors la nécessité de penser le codage relativement à ce que l'on souhaite évaluer pour que l'item soit adapté aux objectifs visés. En particulier, dans la résolution de problèmes, séparer ce qui relève du choix du modèle de l'effectuation du calcul semble nécessaire, mais peut être aussi complété par une analyse de la nature de la technique en jeu.

En effet, sommer les différents nombres plutôt que de passer par un calcul des produits ne relève pas du même modèle mathématique. A la fin de l'école primaire, il est plutôt attendu que l'élève utilise un modèle multiplicatif conduisant à l'écriture de produits, plutôt qu'un modèle additif amenant à l'écriture de sommes. Pour ces problèmes, cette distinction permet de repérer cinq élèves pour le premier problème et huit élèves pour le second (Annexes 1A et 1B) qui utilisent des modèles additifs plutôt que multiplicatifs. Ainsi, prendre en compte de façon générale la nature de la technique lors du codage peut permettre de distinguer des productions relevant d'une technique plus experte ou plus adaptée que d'autres. Ceci peut être particulièrement intéressant lors de l'interprétation des résultats pour mieux caractériser les groupes dans l'échelle des scores ; nous le ré-exploiterons dans la partie IV de ce chapitre.

Le codage de la technique est tout aussi révélateur pour les réponses fausses : si la recherche de cohérences de fonctionnement sur deux items est peu significative, nous signalons cependant que l'erreur consistant à sommer les prix unitaires est réalisée par 17 % des élèves qui obtiennent 21 dans le problème 1, alors qu'ils ne sont que 3,5 % à obtenir 5 dans le problème 2, avec cette même technique. Sur l'ensemble des 1 168 élèves, 2,8 % d'entre eux (soit 33 élèves) utilisent systématiquement une somme dans les deux exercices ; ces élèves présentant alors une cohérence de fonctionnement pour la résolution de ces deux problèmes.

Les résultats du recodage de ces deux problèmes nous permettent d'introduire l'autre facette de la validité de contenu que nous développons par la suite, dans la partie II. L'écart de presque 20 % sur le score de réussite entre ces deux problèmes qui relèvent d'une même structure (problèmes arithmétiques mixtes : problème additif de composition relevant de $\mathbf{T}_{RP\_+}$ et problème multiplicatif relevant de $\mathbf{T}_{RP\_\times}$) et qui mettent en jeu des nombres entiers inférieurs à vingt ne s'explique pas uniquement à partir des nombres en jeu puisque l'écart entre les scores de réussite reste de 15 % si on ne considère que le raisonnement et que l'on écarte les erreurs de calcul. D'autres paramètres semblent donc interférer, comme par exemple le contexte de la tâche (des fleurs ou du matériel scolaire) ou la structure énonciative de l'énoncé (des phrases courtes dans le second problème alors qu'elles sont plus longues dans le premier), etc.; ce sont de tels paramètres que la facette psycho-didactique de la validité de contenu prend en compte et que nous présentons dans la partie II.

I.1.3 Choix des distracteurs dans les QCM

Si la question de l'impact du format QCM sur l'activité de l'élève est prise en compte dans la facette psycho-didactique de la validité de contenu, il s'agit ici d'étudier, sous un angle épistémo-didactique, la qualité des distracteurs. Pour concevoir un QCM, il est préconisé de choisir des distracteurs correspondant à des erreurs repérées d'élèves (Leclercq 1986, Laveault & Grégoire 2014), leur choix pouvant être interprété comme résultant d'une conception erronée ou de la mise en jeu d'une technique non adaptée. Ainsi, la pertinence d'une question d'évaluation sous forme de QCM se juge également par la qualité des distracteurs proposés. Nous illustrons ce fait par l'exemple suivant extrait de CEDRE 2008.

Madame Durand va chez le garagiste pour payer sa facture. La facture est de 236 €. Le garagiste lui rend 14 €. Combien avait-elle donné ? □ 200 euros □ 250 euros □ 300 euros □ 350 euros

Si 250 euros correspond à la bonne réponse, les autres distracteurs ne correspondent pas à des erreurs établies dans la technique de résolution et semblent, par conséquent, peu pertinents même si on peut noter qu'ils sont tous de la même taille (nombres à trois chiffres), rangés dans l'ordre croissant avec un écart de 50 euros entre chacun d'eux. Cette remarque sur la forme des distracteurs permet de préciser que les choix proposés dans un QCM doivent aussi suivre des règles de rédaction (Leclercq 1986, p. 103-107) respectant un aspect formel (par exemple, toutes les propositions ont la même longueur) et un aspect de contenu (toutes les propositions ont le même degré de technicité du vocabulaire, par exemple).

Si la tâche proposée est pertinente pour évaluer les connaissances des élèves en résolution de problèmes, les distracteurs choisis ici par l'évaluateur rendent l'item moins adapté à cet objectif. Par ailleurs, comme pour toute proposition inférieure 236, il est possible d'écarter 200 euros si le problème a été globalement compris par l'élève (la bonne réponse étant nécessairement supérieure à 236 euros).

Il aurait été sûrement plus judicieux de proposer comme distracteurs des nombres correspondant à des choix erronés de modèles (en lien avec l'OML 1) comme par exemple : 222 euros (236 euros – 14 euros) ou 3 304 euros (236 x 14) ou des nombres correspondant à une erreur de calcul identifiée comme 376 euros (calcul de 236 + 14 en alignant les chiffres sur la gauche). De tels distracteurs peuvent ensuite permettre d'inférer la technique utilisée par l'élève pour faire son choix, même si, nous le verrons dans la partie relative à la facette psycho-didactique, l'élève en situation de QCM ne met pas toujours en œuvre des stratégies s'appuyant sur des savoirs mathématiques.

Si d'un point de vue didactique, la proposition 3 304 euros peut s'expliquer parce qu'elle correspond à une modélisation incorrecte, elle peut néanmoins être critiquable si on se réfère aux règles de construction des QCM évoquées précédemment puisqu'elle est la seule réponse à quatre chiffres et qu'elle pourrait aussi être facilement écartée si l'élève raisonne en utilisant les ordres de grandeur.

Ce premier exemple montre ainsi la difficulté à trouver des distracteurs qui soient didactiquement pertinents et qui ne puissent pas être écartés en utilisant une technique autre que celle visée par le problème choisi. Nous y reviendrons lorsque nous étudierons la facette psycho-didactique de la validité des items dans un paragraphe traitant spécifiquement de l'impact du format de question sur l'activité de l'élève ; nous retenons ici la nécessité, lors de l'analyse didactique des items, de spécifier le format de la question et de préciser si l'item permet d'évaluer effectivement le savoir visé et si les distracteurs permettent ou non de rendre compte de conceptions ou de techniques erronées. Cela signifie, pour que l'item soit adapté à l'objectif d'évaluation qui lui est assigné, qu'il n'est pas possible de trouver la (ou une) réponse correcte par d'autres techniques que celles visées par l'objectif et que les distracteurs ont été correctement choisis d'un point de vue didactique.

Pour conclure, l'étude locale du contenu tâche par tâche permet d'étudier la pertinence de chacun des items à travers l'analyse *a priori* de la tâche : c'est à partir de cette dernière qu'il est possible d'analyser le codage des réponses ainsi que le choix des distracteurs proposés et de déterminer s'ils permettent d'évaluer les techniques visées par l'objectif de l'item et de préciser leur nature, en lien avec des éléments technologico-théoriques. L'analyse *a priori* des tâches apparaît donc comme un point de départ incontournable dans la méthodologie d'analyse de la validité de contenu d'une évaluation (Grugeon-Allys & Grapin 2015b) ; elle se révèle alors être un outil adapté pour apporter des preuves de validité « solides » sur le contenu du test, puisqu'elle respecte « une méthodologie rigoureuse », et écarte toute subjectivité. Nous reprenons ici les termes employés par Laveault & Grégoire (2014, p. 166) qui décrivent ce sur quoi les preuves basées sur le contenu d'un test devraient s'appuyer, mais sans donner de méthodologie spécifique ; en ce sens, celle que nous présentons pour les évaluations en mathématiques répond à ce manque.

I.2 Facette épistémo-didactique : étude globale du contenu

L'étude globale du contenu consiste à étudier l'ensemble des items de l'évaluation ; les questions de validité se posent alors sur l'ensemble d'un domaine évalué (pour nous, la numération décimale, le calcul et la résolution de problèmes arithmétique avec des nombres entiers) et portent sur la sélection des tâches. Nous estimons que, d'un point de vue épistémo-didactique, les tâches d'une évaluation couvrent un domaine lorsque :

- tous les types de tâches définis dans l'OM de référence (et figurant dans les programmes si l'évaluation s'appuie sur eux) sont présents et que les conditions sont requises pour que la technique visée par la tâche puisse la résoudre,
- différents niveaux de convocation des types de tâches sont mis en jeu,
- les variables didactiques prennent des valeurs variées.

Nous explicitons ci-après la façon dont nous appréhendons ces critères en lien avec l'analyse *a priori* et avec la définition de la praxéologie de référence, mais nous précisons d'abord qu'il est difficile de remplir toutes ces conditions à la fois. En effet, le temps limité imparti à la passation des épreuves impose, quelque soit l'évaluation considérée, un échantillon représentatif des types de tâches ; c'est pourquoi nous abordons la question de la représentativité des tâches au fil de la description de ces trois critères.

I.2.1 Variété des types de tâches et nature des techniques

Du point de vue de la conception de l'évaluation comme de son analyse, il est assez aisé, une fois l'analyse *a priori* réalisée, de contrôler si les tâches sélectionnées permettent d'évaluer l'ensemble des savoirs devant l'être que ce soit au regard des programmes, qu'au regard de l'OM de référence (ou d'un cadre de l'évaluation qui ne s'appuierait pas sur une approche curriculaire, mais qui listerait des savoirs à évaluer). Mettre en perspective la liste des tâches retenues avec celle des savoirs à évaluer permet, au regard de l'analyse *a priori*, de repérer d'éventuels manques ou redondances, et apporte, une première preuve de validité.

La question que nous posons ici ne porte pas seulement sur la concordance entre les tâches proposées et les savoirs à évaluer, elle interroge aussi la sélection des tâches pour qu'elles soient représentatives du domaine selon les types de tâches et selon la nature des techniques en jeu. Pour y répondre, nous nous appuyons sur la définition de la praxéologie de référence en lien avec des objectifs d'évaluation et dégageons trois principaux critères. L'ensemble des tâches sélectionnées doit alors contenir au moins :

- une tâche appartenant à chacune des OML ;
- une tâche permettant d'évaluer des techniques qui convoquent des éléments technologiques intervenant dans d'autres types de tâches. Par exemple, en numération, il est nécessaire que des tâches évaluent $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{pos}}$ de façon isolée. Plus généralement, la maitrise de certaines techniques relatives à certains types de tâches est nécessaire pour que leur mise en œuvre dans d'autres types de tâches n'empêche pas leur résolution. En procédant de cette façon, il est alors possible de repérer d'éventuels points de rupture et d'expliciter certains échecs sur des tâches données ;
- plusieurs tâches pouvant être résolues avec des techniques de natures différentes pour étudier une éventuelle progression et repérer, là encore, des technologies dominantes ou d'éventuels points de rupture.

Prendre en compte, dans la sélection des tâches, les techniques qui permettent de les résoudre est important pour deux raisons. D'une part, c'est en s'appuyant sur les techniques et sur les éléments technologico-théoriques définis à partir de l'OM de référence qu'il est possible d'interroger les praxéologies apprises au regard de celles à enseigner : cet objectif coïncide alors parfaitement avec celui attribué aux évaluations bilans. D'autre part, si on se place cette fois dans la perspective d'une évaluation diagnostique, c'est en repérant, dans les praxéologies apprises, des techniques inadaptées ou erronées et en inférant les technologies absentes, ou évanescentes dans l'enseignement, qu'il est possible de proposer un enseignement adapté aux besoins d'apprentissage de l'élève. Nous comprenons alors que la sélection des tâches de l'évaluation, pour qu'elles soient représentatives du domaine évalué, doit prendre en compte les techniques et les éléments technologico-théoriques correspondants.

I.2.2 Niveau d'intervention des praxéologies

Nous nous plaçons ici dans le cadre de l'approche anthropologique, mais nous rappelons que les niveaux de convocation des types de tâches sont adaptés des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances et que les expressions « r-convoquée » et « t-convoquée » (Castela 2008) correspondent respectivement aux niveaux de mise en fonctionnement des connaissances « disponible » et « mobilisable » pour Robert (1998).

Nous poursuivons dans ce paragraphe la réflexion menée précédemment sur les techniques de résolution d'une tâche. S'il est nécessaire que l'évaluation contienne des tâches correspondant à des applications directes de la technique, il l'est tout autant de proposer des tâches faisant intervenir des praxéologies à un niveau « t-convoqué » ou « r-convoqué » avec ou sans choix de technique (Castela 2008) : en effet, deux tâches peuvent faire intervenir une même OM, tout en demandant à l'élève une activité différente et par conséquent, elles ne permettent pas d'évaluer le savoir dans les mêmes conditions.

Plus spécifiquement dans notre travail portant sur l'évaluation des apprentissages en fin d'école en partie à travers des évaluations-bilans, il est intéressant, comme Castela (2008) le fait, que nous couplions le niveau de convocation du type de tâche avec le moment où le savoir a été enseigné :

> « Le niveau d'intervention de OM_0 dans une tâche donnée est décrit par un couple dont chaque élément peut prendre trois valeurs :
> - OM t-convoquée, OM r-convoquée sans choix de technique, OM r-convoquée avec choix de technique (la configuration t-convoquée avec choix de technique est impossible par définition)
> - objets anciens, d'enseignement récent, en cours d'enseignement. » Castela (2008, p. 154)

Dans notre travail, nous ne considérons que des objets de savoir ancien et d'enseignement récent (les premiers étant définis comme n'étant plus enjeux d'apprentissage et les seconds correspondant à des savoirs institutionnalisés, mais à consolider). Nous écartons les objets de savoir en cours d'enseignement soit totalement nouveaux, soit en cours d'institutionnalisation puisque nous nous intéressons à l'analyse d'évaluations bilans proposées à la fin du processus d'enseignement ou à des évaluations diagnostiques qui se situent avant le processus d'enseignement, mais qui portent sur des savoirs déjà institutionnalisés.

Six couples peuvent alors être définis et correspondent à six niveaux d'intervention des types de tâche que nous hiérarchisons d'un niveau 1 (OM t-convoquée sur un objet de savoir ancien) à un niveau 6 (OM r-convoquée avec choix de technique sur un savoir en cours d'enseignement) ; nous ajoutons un niveau 0, correspondant aux applications directes de la technique à des objets anciens (Castela 2008). Nous obtenons donc sept couples dont les valeurs sont définies par l'analyse *a priori*.

Le contenu de l'évaluation, pour qu'il soit valide, devrait alors avoir des tâches représentant un même type de tâches mais convoqué à différents niveaux. Il parait néanmoins difficile de pouvoir balayer l'ensemble des niveaux pour une même OM puisque cela conduirait à proposer de multiples tâches dans l'évaluation. En revanche, il serait préférable de ne pas avoir, pour une même OM, trop de tâches qui la convoquent à des niveaux d'intervention « techniques » et aucune qui la convoque à des niveaux d'intervention plus élevés. Si les sept niveaux ne peuvent être représentés, il serait intéressant d'avoir au moins une tâche relevant du niveau le plus pas (niveau technique) pour s'assurer de la maîtrise du savoir en jeu dans des situations d'application directe et une ou plusieurs tâches relevant des niveaux d'intervention plus élevés, sans nécessairement que le niveau 6 (OM r-convoquée avec choix de technique sur un objet de savoir récent) ne soit représenté systématiquement.

I.2.3 Variété des valeurs des variables didactiques

Les variables à prendre en compte sont différentes suivant le type de tâche que l'on considère. En plus des critères précédents, pouvoir proposer des valeurs différentes à une même variable contribue à apporter des preuves de validité relatives au contenu. Il s'agit, par exemple, de proposer des types de représentation sémiotique différents (et pas seulement dans les tâches de conversion), des problèmes relevant de classes de problèmes différentes, des nombres de tailles variées qui conduisent à des opérations mettant en jeu des petites ou des grandes tables, etc.

A la différence des deux critères précédents, qui mènent à une sélection des tâches pour qu'elles soient adaptées aux critères, il s'agit plutôt ici de trouver un équilibre sur l'ensemble des valeurs des variables et d'éviter, pour une variable donnée, d'avoir une valeur sur-représentée alors que d'autres sont absentes. Par exemple, dans les tâches de calcul, de ne pas avoir uniquement des répertoires complexes en jeu ou des additions exclusivement sans retenue, ou encore de proposer des nombres dont l'écriture chiffrée contient des zéros, etc.

Pour conclure, d'un point de vue méthodologique, l'analyse de la validité de contenu selon la facette épistémo-didactique passe par l'analyse *a priori* de chacune des tâches et conduit à une étude à un double niveau : local et global (Grugeon-Allys & Grapin, 2015b). Des preuves de validité de contenu doivent être apportées relativement à chacun des items, mais aussi relativement au contenu du test dans son ensemble, à travers la représentativité des tâches proposées. Nous nous sommes placée ici dans le cas d'une analyse menée après la passation d'un test, mais une telle analyse devrait prendre place au moment de la conception des items.

II FACETTE PSYCHO-DIDACTIQUE DE LA VALIDITÉ DE CONTENU

Comme dans la facette épistémo-didactique, l'analyse *a priori* de la tâche est aussi le point de départ de cette approche, mais elle est exploitée différemment ; il s'agit ici de prendre en compte les processus mis en jeu par les élèves pour produire une réponse et de les mettre en perspective des procédures de résolution déterminées lors de l'analyse *a priori*. Il s'agit également de les interpréter avec des caractéristiques de la tâche différentes de celles définies dans l'analyse épistémo-didactique. Ici, ce sont des variables extra-mathématiques telles que le format de la question, le contexte dans lequel est situé la tâche, la structure énonciative de l'énoncé (place de la question par exemple), les conditions de passation qui sont considérées. Ces variables peuvent être diverses, mais ont potentiellement un impact sur l'activité de l'élève lorsqu'il résout la tâche. A la différence de la facette épistémo-didactique de la validité de contenu, la spécificité de la validité psycho-didactique est « de porter sur les tâches (sur chaque item, chaque question) et non sur le test dans son ensemble » (Vantourout & Goasdoué 2014) ; c'est donc uniquement à un niveau local que nous nous situons.

Dans le cadre de la thèse, nous nous intéressons principalement à la nature du format de question : puisque dans les évaluations externes le format QCM est majoritairement utilisé, étudier les stratégies mises en œuvre par les élèves pour produire une réponse nous semble nécessaire pour décider de la validité psycho-didactique d'un item. Nous reprenons dans cette partie des résultats de travaux portant sur les QCM que nous enrichissons par des conclusions issues d'expérimentations menées antérieurement sur des items du bilan CEDRE.

Nous revenons aussi sur deux autres variables : d'abord, le contexte de la tâche puisqu'il impacte sur les processus de représentation entrant en jeu dans la modélisation lors de la résolution de problèmes et ensuite, nous nous intéressons au support sur lequel l'évaluation est menée (support informatique ou « papier-crayon »). Comme les évaluations sous la forme « papier-crayon » telles qu'elles existent actuellement tendent à évoluer vers des dispositifs exclusivement sur support informatique, des questions sur la validité psycho-didactique des items se posent relativement à cette évolution.

II.1 Facette psycho-didactique : impact du format des questions

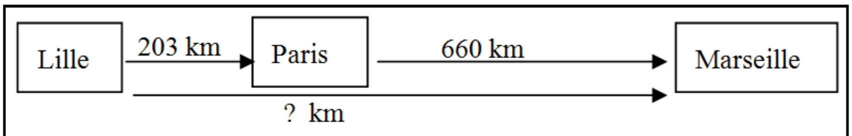
Peu de travaux de recherche actuels en France questionnent le dispositif d'évaluation par QCM pour ce qu'il est et pour ses spécificités, même si Adda (1976), Pluvinage (1979) et Maury (1985), avaient commencé à s'intéresser à ces questions. Du côté anglo-saxon, Bloom & al. (1971) ont été les précurseurs des questions posées par l'évaluation des apprentissages et par l'utilisation des QCM et ont été suivis par de nombreux chercheurs qui ont continué d'explorer ce champ. Par ailleurs, les travaux de recherche qui portent sur les QCM concernent majoritairement des étudiants du supérieur (par exemple, Leclercq (1986), De Landsheere (1979)).

Nous avons mené deux expérimentations en 2013 et en 2014 avec Sayac (Sayac & Grapin 2014a, 2014b) afin d'étudier spécifiquement l'activité d'élèves de fin d'école primaire face à des questions posées sous forme de QCM[6]. [Nous] avons cherché à étudier la validité psycho-didactique d'items en observant les stratégies que les élèves de ce niveau scolaire employaient pour choisir leur réponse, mais aussi à observer le potentiel effet rétroactif provoqué par la présence des choix de réponse.

II.1.1 Constats initiaux

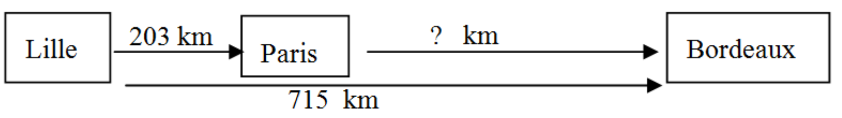
Trois problèmes assez proches, figurant ci-dessous, relevant du champ conceptuel des structures additives et visant à évaluer la capacité d'un élève à résoudre un problème additif de composition de mesure (Vergnaud 1990) ont été proposés dans l'évaluation CEDRE 2008 à la fois sous forme de QCM et sous forme de question ouverte.

Problème 1 :



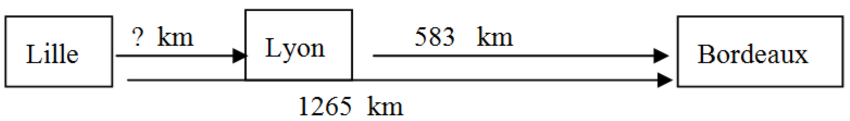
Quelle est la distance entre Lille et Marseille ?
□ 457 km □ 473 km □ 663 km □ 863 km

Problème 2 :



Quelle est la distance entre Paris et Bordeaux ?
□ 512 km □ 518 km □ 912 km □ 918 km

Problème 3 :



Quelle est la distance entre Lille et Lyon ?
□ 682 km □ 1082 km □ 1265 km □ 1848 km

[6] Le texte des différents paragraphes ci-après, décrivant les conclusions générales des expérimentations, est extrait de Sayac & Grapin (2014a, 2014b) ; [nous] correspond au travail mené avec Sayac.

La répartition des réponses des élèves figure en Annexe 2. Un premier constat peut être fait sur le score de non-réponse, beaucoup plus élevé lorsque l'exercice est proposé en ouvert et porte sur la recherche d'une des mesures (17,7 % contre 7,4 % pour le problème 2 et 19,8 % contre 7,6 % pour le problème 3). On peut alors supposer que les élèves s'engagent moins dans la résolution d'un problème « difficile » lorsque ce dernier est proposé en ouvert ou alors que les différentes propositions de réponse dans les QCM « sécurisent » les élèves ou sont exploitées directement par eux pour répondre à la question posée. Ce constat rejoint celui effectué à partir de l'évaluation PISA pour des élèves plus âgés (Monnier 2007, p. 27) à savoir que, sur l'ensemble du test les scores de non réponse sont beaucoup plus élevés pour les questions ouvertes à réponse construite (25,5 %) que pour celles à réponses ouvertes courtes (8,6 %) et surtout que pour les QCM (3,5 %). Le format de question a donc un impact direct sur l'entrée de l'élève dans la résolution de la tâche.

Le deuxième constat porte sur le score de réussite global à chacun de ces exercices : la forme de la question (QCM ou QROC) a peu d'impact sur la réussite dans les deux premiers problèmes (autour de 85% pour le problème 1, autour de 70 % pour le problème 2), alors que la différence est plus grande dans le cas du problème 3 : les scores de réussite diffèrent de 10 % (62,8 % pour la forme QROC, contre 72,7 % pour la forme QCM).

Ce premier constat fait à partir de ces scores de réussite à des items de CEDRE 2008 [nous] a amenées à investiguer de manière plus approfondie les scores de réussite des élèves en étudiant d'abord leurs stratégies de réponse aux QCM et les éventuelles rétroactions permises par les distracteurs, puis en comparant la réussite et les processus mis en jeu pour répondre selon le format de question (QCM et une question sous forme ouverte).

II.1.2 Stratégies de réponse

Nous distinguons le terme de stratégie de celui de procédure en nous référant à Julo (1995) pour qui :

> « la notion de stratégie correspond à un niveau de description assez global et qui cherche à rendre compte de l'orientation générale que prend l'activité de résolution, alors que celle de procédure correspond à l'ensemble des opérations élémentaires que l'on met en œuvre pour atteindre le but proposé». Julo (1995)

Sous le terme de stratégies peuvent apparaître des techniques qui reposent sur des savoirs mathématiques, mais aussi d'autres processus spécifiques au format QCM contingents à la présence de choix de réponses.

On trouve, dans les travaux relatifs aux QCM (Choppin 1975, Leclercq 1987), différentes stratégies, mais toutes pensées pour des étudiants adultes. Voici, par exemple, les 3 modèles retenus par Choppin (1975) :

- Modèle 1 : quand l'étudiant « sait », il choisit la réponse correcte et quand il ne « sait pas », il choisit au hasard parmi les réponses proposées ;
- Modèle 2 : commence comme le Modèle 1, mais au lieu de répondre au hasard quand il « ne sait pas », l'étudiant commence par éliminer les solutions qu'il sait être fausses et choisit au hasard parmi celles qui restent ;
- Modèle 3 : l'étudiant commence par ranger les solutions possibles par ordre de plausibilité décroissante et si la consigne l'oblige à ne fournir qu'une d'entre elles, alors il choisit celle dont la probabilité (subjective) est la plus élevée (à ses yeux).

En complément de ces modèles, d'autres catégorisations existent, comme celle de Katz & al. (2000), qui distinguent des stratégies *« traditional »* et *« non traditional ».* Les premières reposent sur des techniques enseignées et que l'élève utiliserait pour répondre si la question était posée sous forme ouverte ; les autres, spécifiquement associées à des QCM, sont celles où l'élève s'appuie sur les réponses proposées pour faire un choix.

II.1.2.i Liste des stratégies retenues

[Nous] avons listé les stratégies possibles pour des élèves de dix - onze ans car il nous a semblé indéniable qu'elles ne pouvaient être identiques à celles d'étudiants adultes. Cette liste s'est complétée au fur et à mesure de [notre] expérimentation, au plus près des stratégies réelles des élèves, pour arriver à une liste de dix stratégies. Afin de réaliser plus efficacement des études comparatives, [nous] avons effectué des groupements de stratégies par type (la liste des dix stratégies ainsi que ces groupements sont explicités en Annexe 3) :

Stratégies A : stratégies de savoir. L'élève active des connaissances ou des savoir-faire (techniques – raisonnement) pour choisir la réponse qu'il pense être la bonne : soit il résout complètement la tâche (par la procédure de son choix, juste ou fausse), soit il teste les propositions de réponse et choisit celle qui peut convenir. Ces stratégies peuvent s'apparenter aux *« traditional »* stratégies définies par Katz & al (2000), mis à part celle où l'élève teste une à une les propositions de réponse qui est spécifique au format QCM.

Stratégies B : stratégies de substitution ou de repli. L'élève n'utilise pas ses connaissances mathématiques de façon explicite pour faire un choix : son choix ne repose pas de façon assurée sur ses connaissances.

Stratégies C : stratégies mixtes. L'élève a initié un raisonnement pour répondre à la question posée, mais il se sert des différentes propositions de réponse pour finaliser son choix.

II.1.2.ii Stratégies utilisées par les élèves de fin d'école

La première expérimentation (Sayac & Grapin, 2014a) [nous] a permis d'apporter des conclusions relativement aux stratégies employées par les élèves de fin d'école :

Choisir une réponse au hasard : il est important d'abord de distinguer ce qui relève effectivement du hasard (*random-guessing* ou *blind-guessing*) de stratégies permettant de deviner la bonne réponse (*guessing*) : « si un choix aléatoire est aveugle, un choix deviné ne l'est pas » (Leclercq 1987, p. 13). Peu d'élèves (entre 2 % et 10 % selon la complexité de la question) déclarent répondre au hasard, même s'il est difficile, à travers le déclaratif des élèves de discerner véritablement ce qui relève du hasard et ce qui relève du « *guessing* ». Les élèves ont volontiers expliqué qu'ils utilisaient d'autres stratégies correspondant davantage à du « *guessing* » qu'à du hasard ; il semblerait de plus qu'un effet de contrat didactique empêche les élèves de fin d'école primaire à considérer que « répondre au hasard » puisse être envisageable pour répondre.

Stratégies et niveau de connaissance des élèves : les élèves utilisent globalement des stratégies différentes suivant les items auxquels ils sont confrontés, notamment selon la complexité de l'item et selon leur niveau de connaissances. La spécificité du dispositif QCM influence particulièrement les stratégies des élèves lorsqu'ils sont face à un problème difficile à résoudre pour eux : la possibilité de choisir une réponse parmi d'autres modifie apparemment les procédures de résolution (*guessing* ou combinaison des nombres en jeu pour obtenir un des choix proposés) : ce qui a déjà été explicité pour des étudiants, notamment dans Katz & al (2000) et dans des études visant à comparer les effets du format de question (ouvert ou QCM) sur la réussite, telles que celles recensées dans Simkin & Kuechler (2005).

II.1.3 Rétroactions

Résoudre un problème avec une question posée sous forme de QCM apporte à l'élève des éléments de contrôle complémentaires à ceux présents lorsqu'il résout le problème sous une forme ouverte. En effet, s'il obtient un résultat qui ne figure pas parmi les choix de réponse, l'élève sait que ce qu'il a trouvé est faux. Même si dans le cadre d'une évaluation bilan, l'élève n'est pas dans une situation d'apprentissage et si l'enseignant n'intervient à aucun moment, nous considérons tout de même, dans le cas des QCM, que l'énoncé et les différents choix de réponse constituent un milieu (Brousseau 1998) qui provoque des rétroactions et amène l'élève à agir sur la situation et à prendre des décisions (par exemple, changer de stratégie ou de technique de résolution si la réponse ne figure pas parmi les choix).

II.1.3.i Types de rétroactions

Ce type de rétroaction, pour la forme spécifique du QCM, apporte à l'élève « un moyen adéquat [...] pour répondre à ses doutes quant à sa résolution en voie d'élaboration » (Burgermeister & Coray 2008) et en ce sens, lui fournit un élément rétrospectif relevant d'un processus de contrôle. Il vient en complément d'autres éléments de contrôle entrant habituellement dans la résolution de problèmes, comme ceux listés par Houdement (2011) qui s'exercent dans le choix d'un modèle (contrôles pragmatiques, sémantiques et syntaxiques).

Les éléments de contrôle prospectifs et rétroactifs (Burgermeister & Coray 2008) ne sont pas sans influence sur la façon dont l'élève oriente son choix de réponse *in fine*. La question ne se pose guère lorsque le résultat qu'il trouve coïncide avec un choix de réponse ou lorsque l'élève ne s'est pas engagé dans une stratégie de savoir (s'il a répondu au hasard par exemple). En revanche, lorsque ce n'est pas le cas, l'élève doit prendre une décision. Trois cas sont alors possibles :

- D1 : l'élève reste dans une stratégie de savoir et vérifie ses calculs et/ou modifie éventuellement sa procédure de résolution pour trouver une réponse figurant parmi les choix ;
- D2 : l'élève utilise une autre stratégie (de repli ou mixte). Plusieurs possibilités s'offrent alors à lui : il peut choisir le nombre le plus proche du résultat qu'il a obtenu par ses calculs ou choisir le nombre pour lequel l'ordre de grandeur correspond à ce qu'il avait anticipé prospectivement (ou qu'il détermine rétrospectivement) ou encore combiner les nombres en présence pour retrouver une des propositions de réponse (Stratégie B4, décrite en Annexe 3), ou répondre au hasard.
- -D1&D2 : même après avoir repris ses calculs, l'élève ne retrouve pas sa réponse parmi celles proposées et de ce fait, il utilise une stratégie autre qu'une stratégie de savoir.

L'observation d'élève en situation de résolution et la possibilité de le questionner, comme [nous] l'avons fait lors de nos deux expérimentations, permettent d'avoir accès aux rétroactions provoquées par le QCM et de mieux étudier l'impact du format de question sur l'activité de l'élève.

II.1.3.ii Effets des rétroactions

Dans le cadre de notre deuxième expérimentation, nous avons analysé les effets rétroactifs de deux QCM portant sur la résolution de deux problèmes (Problème 1 QCM et problème 2 QCM figurant en

Annexe 4)[7] : le premier est un problème additif alors que le second, plus complexe, est un problème de proportionnalité avec un coefficient de proportionnalité décimal (0,75). Dans les deux cas, l'effet rétroactif du QCM a été observé pour un nombre semblable d'élèves, environ 18 % de l'ensemble de notre échantillon. En revanche, les décisions prises par les élèves sont très différentes d'un problème à l'autre : les élèves prennent majoritairement (72 %) une décision de type 1 (D1) pour le problème 1, plus simple, en reprenant leurs calculs ou en changeant d'opération alors qu'ils sont 86 % à prendre une décision de type 2 (D2) dans le problème 2.

Si on observe ensuite la qualité de la réponse choisie après cette décision, on constate, que pour le problème 1, un peu plus de la moitié des élèves trouve ensuite la bonne réponse alors qu'ils ne sont que un sur cinq pour le problème 2.

Nous observons donc, concernant la résolution de ces problèmes, un effet « QCM » lié aux éléments de contrôle apportés par les choix de réponse. Notre expérimentation tendrait à montrer que, du point de vue des scores de réussite, l'effet «QCM » est finalement très limité pour les problèmes complexes (comme pour le problème 2) dans le sens où l'élève ne sait pas comment modifier sa procédure pour trouver la bonne réponse.

II.1.4 Impact du format de question

Les deux paragraphes précédents ont montré que le format QCM impliquait une activité spécifique liée à la présence de choix de réponse ; nous nous intéressons dans ce paragraphe à comparer l'activité de l'élève selon s'il répond à une question sous forme ouverte ou sous forme de QCM. Nous avons donc proposé aux mêmes élèves, successivement, des tâches similaires sous forme de questions ouvertes, puis de QCM et avons observé les techniques et les stratégies mises en œuvre pour répondre.

II.1.4.i Reconnaissance et production

Naturellement, si en question ouverte, l'élève doit produire une réponse, il est amené à la reconnaitre dans un QCM, ce qui ne fait pas nécessairement appel aux mêmes techniques. Nous avons pu observer, dans une tâche de traduction d'écriture $\mathbf{T}_{\mathbf{Tnp/ec}}$, où l'élève doit écrire en chiffres un nombre dont il connaît l'écriture en lettres, qu'en format QCM, plus de la moitié des élèves utilisant une stratégie de savoir procédaient en comparant chiffre par chiffre ou classe par classe, mais n'étudiaient pas l'écriture chiffrée du nombre en entier.

Par ailleurs, nous avons constaté qu'aucune erreur produite à la question ouverte ne correspondait aux types de choix proposés dans le QCM[8], ce qui remet en cause le choix des distracteurs proposés et peut aussi expliquer l'écart important de réussite entre les deux formats de questions.

---

[7] Il ne s'agit pas ici uniquement de problèmes arithmétiques relevant du domaine étudié dans la thèse ; en particulier un problème de proportionnalité impliquant un coefficient de proportionnalité non entier a été proposé dans l'expérimentation.

[8] QCM proposé extrait de CEDRE 2008 : deux-millions-deux-cent-vingt-cinq-mille-six s'écrit :

□ 2 225 600 □ 2 522 006 □ 2 225 006 □ 2 225 060

Les distracteurs sont conçus comme des permutations des chiffres entrant en jeu dans l'écriture du nombre mais ils ne correspondent pas à des erreurs établies sur ce type de tâches.

II.1.4.ii Impact sur la réussite

Réussir en question ouverte n'implique pas forcément réussir au QCM et réciproquement. Si les scores de réussite sont tous supérieurs lorsque la question est sous forme de QCM, lorsque nous étudions plus finement élève par élève, [nous] constatons que des élèves peuvent réussir, pour une tâche similaire, une question sous forme ouverte et échouer lorsqu'elle lui est présentée sous forme de QCM. Nous l'avons particulièrement observé en situation de résolution de problèmes arithmétiques, lorsqu'un des distracteurs correspond à un résultat d'étape intermédiaire : certains élèves réussissant en question ouverte arrêtent leur résolution en QCM dès qu'ils trouvent un résultat intermédiaire. Ce type de résultat interroge, par conséquent, la nature des distracteurs proposés et leur impact sur la réussite.

Les constats que [nous] avons pu établir sur l'écriture des nombres décimaux tendent à confirmer ce que Laveault & Grégoire (2014, p. 37) établissent, à savoir que le QCM n'est pas adapté pour évaluer un savoir au début de son enseignement : non seulement l'élève risque de mémoriser une réponse fausse, mais le format QCM peut également impliquer une surévaluation des connaissances de l'élève (en début d'apprentissage, un élève peut être capable de reconnaitre une réponse, mais pas de la produire).

II.2 Facette psycho-didactique : nature du contexte de la tâche

Nous désignons par « contexte de la tâche» ce que Julo (1995, p. 31), dans la résolution de problèmes, qualifie de « contexte sémantique » et définit comme un ensemble d'éléments contenant à la fois des données sur le contenu du problème, mais aussi sur la tâche à réaliser. Nguala (2005) précise que différents supports sont alors possibles : les situations vécues dans un cadre scolaire, l'évocation de la réalité ou les mathématiques (nous parlons dans ce cas de contexte intra-mathématique). Le processus d'interprétation permettant de conduire à la représentation du problème passe par une sélection des données du problème qui apparaissent comme essentielles ; ce sont alors les connaissances dont l'élève dispose de la situation qui permettent de repérer les données importantes et d'en écarter d'autres. Des variations dans les caractéristiques de la situation peuvent ainsi modifier la représentation que l'on se fait du problème (Ibid, p. 58). Julo qualifie alors d'effet de contexte « l'influence que peut avoir une variation du contexte sémantique sur la résolution de problèmes » (Ibid, p. 113). Cette influence peut être exploitée pour aider les élèves ayant des difficultés en résolution de problèmes, comme l'a montré Nguala (2005) en exploitant un dispositif de multi-présentation comme outil d'aide à la représentation.

La question du contexte est spécifiquement prise en compte dans le cadre de l'évaluation PISA : en définissant la culture mathématique comme « l'aptitude d'un individu à formuler, employer et interpréter des mathématiques dans un éventail de contextes soit de se livrer à un raisonnement mathématique et d'utiliser des concepts, procédures, faits et outils mathématiques pour décrire, expliquer et prévoir des phénomènes » (OCDE 2014). C'est en proposant des problèmes dans des contextes variés que l'on peut évaluer la capacité d'un élève à mobiliser ses savoirs et savoir-faire. Quatre catégories de contexte sont alors définies :

> « - le contexte personnel, en rapport avec la vie des individus et de leur famille au quotidien ;
>
> - le contexte sociétal, en rapport avec la communauté – locale, nationale ou mondiale – dans laquelle les individus vivent ;
>
> - le contexte professionnel, en rapport avec le monde du travail ;
>
> - le contexte scientifique, en rapport avec l'utilisation des mathématiques en science et en technologie. » OCDE (2014)

Les compétences des différents groupes déterminées dans l'échelle des scores de PISA 2012 font alors apparaître une certaine progressivité selon la nature du contexte (OCDE 2014, p. 89-96), ce qui confirme l'existence d'un effet de contexte, tel qu'il a été défini par Julo.

Ces différents éléments justifient ainsi de prendre le contexte comme variable dans la description des tâches lorsque l'on étudie la validité de contenu avec la facette psycho-didactique ; à la différence de la variable « format de question », il semble que l'effet de contexte soit plus simple à déterminer, la familiarité du contexte influençant positivement la capacité de l'élève à se représenter le problème et par conséquent à le réussir.

II.3 Facette psycho-didactique : impact du support

Demander à un élève de réaliser un exercice de mathématiques sur support informatique plutôt qu'en « papier-crayon » implique nécessairement des différences dans les processus qu'il va engager pour résoudre la tâche : en effet, pour une tâche identique donnée avec le même format de réponse, le travail sur support informatique va induire des changements dans la façon dont l'élève gère son environnement de travail, en particulier dans l'utilisation du brouillon (il lui faut gérer à la fois un brouillon papier et un travail sur écran) ou encore dans celle des instruments en géométrie.

Le choix du support impacte aussi sur la présentation des questions à l'élève. Dans une évaluation papier-crayon, les items sont parfois regroupés sur une même page, les uns à la suite des autres, notamment lorsque plusieurs questions correspondent à un même énoncé de problème ; ce n'est pas forcément le cas sur support informatique où les contingences techniques imposent souvent que chaque item corresponde à une page différente. Les élèves doivent alors naviguer sur un environnement informatique dans les différentes pages pour pouvoir éventuellement se référer à l'énoncé. Ces premiers constats interrogent alors l'impact du support (informatique ou papier-crayon) sur les processus mis en jeu par l'élève pour répondre et de fait, questionnent la validité psycho-didactique des items.

Si ces questions font l'objet de nombreuses recherches en psychométrie, les résultats dans ce cadre sont divergents en ce qui concerne le lien entre le support et la difficulté (Bessoneau & al. 2015) : la difficulté du test sur support informatique est parfois plus élevée, ou plus basse voire identique à celle sur support papier. Les études menées récemment à partir des évaluations CEDRE école et collège tendent à montrer que les items demandant une lecture longue ou induisant différentes étapes de raisonnement ou des calculs intermédiaires sont moins bien réussis sur support informatique ; à l'inverse, lorsqu'il s'agit de prélever directement une information sur un document (graphique ou tableau), le support informatique conduit à des scores de réussite plus élevés que le papier. Il est intéressant de constater que les items qui relèvent du calcul automatisé ont des taux de réussite équivalents sur les deux supports (ibid.).

Encore une fois, l'analyse faite ici ne repose que sur la difficulté calculée statistiquement des items et ne prend pas en compte une étude des techniques s'appuyant sur une analyse *a priori* ou des processus mis en jeu pour répondre[9]. La question de l'impact du support reste néanmoins ouverte et mérite, selon nous, d'être considérée dans un cadre didactique et pas uniquement psychométrique, comme nous avons pu le faire pour étudier l'impact du format de question. Nous ne l'évoquons ici que pour illustrer une des variables entrant en jeu dans la validité psycho-didactique et ne la traitons pas dans le cadre de la thèse.

---

[9] Une telle analyse est menée actuellement dans le cadre de l'ANR NéoPraéval.

II.4 Facette psycho-didactique : étude locale des items

Dans la facette épistémo-didactique, il est possible de déterminer *a priori* l'effet des valeurs des variables didactiques sur les techniques de résolution. S'il est assez simple, dans l'approche psycho-didactique, de lister différents paramètres pouvant modifier les processus de réponses mis en jeu, il est plus difficile de déterminer *a priori,* de façon précise, leur impact. Différents travaux menés dans le cadre de la psychologie cognitive, mais hors du contexte de l'évaluation, comme ceux de Julo (1995), peuvent éclairer les choix réalisés lors de la conception d'items de résolution de problèmes, mais pour comprendre et pouvoir anticiper l'impact de ces paramètres, il est nécessaire de mener des analyses basées sur des observations d'élèves.

Nous citons ci-dessous différentes méthodologies qui peuvent être mises en place pour mener ce type de travaux : toutes se basent sur une analyse *a priori* de la tâche, mais diffèrent selon la façon dont on accède aux processus de réponse des élèves :

- à partir de l'observation des productions des élèves, du codage de leurs procédures :
    - et d'une répartition en pourcentage (Nguala 2005) ;
    - et de l'utilisation de coefficients de corrélation (Maury 1985), tous les élèves n'ayant pas reçu le même énoncé ;
- à partir de l'observation de productions d'élèves et d'entretiens individuels (Sayac & Grapin 2014a, 2014b), suivis de l'exploitation de coefficients de corrélation.

<u>En conclusion,</u> l'effet des variables didactiques ou de paramètres extra-mathématiques est pris en compte pour apporter des preuves didactiques garantissant la validité de contenu d'une évaluation. L'étude de cette dernière sous une facette psycho-didactique est menée à une échelle locale et vient en complément de l'étude réalisée dans un cadre épistémo-didactique, item par item et globalement sur l'ensemble du test, à partir de l'analyse *a priori*. Les études épistémo et psycho-didactiques s'appuient ainsi sur des éléments descripteurs des tâches d'évaluation et des critères de sélection des items ; parmi ces critères, celui de la complexité des items est spécifique. En effet, si les autres critères évoqués précédemment sont définis de façon indépendante les uns des autres, la complexité d'un item relève de différents facteurs qu'il s'agit de lister. Quelle définition alors retenir de la complexité ? Comment la déterminer didactiquement ? Quelle exploitation en faire dans l'analyse des évaluations ?

Nous abordons ces questions spécifiques dans la partie suivante avant de montrer la complémentarité entre les approches didactiques et psychométriques dans l'analyse des évaluations externes.

III APPROCHE DIDACTIQUE : COMPLEXITÉ DES ITEMS

Si l'on se réfère à Brousseau (2010) :

> « L'étude de la complexité des situations a pour objet de prévoir et de comparer les variations de performances des élèves en fonction des variations de certaines caractéristiques ou variables de ces situations. Les études de la complexité des situations conjuguent autant que possible deux méthodes : la modélisation *a priori* et la mise à l'épreuve expérimentale des modèles théoriques, ou l'observation et l'explication *a posteriori* par des modèles empiriques ». Brousseau (2010)

Même si nous ne nous situons pas ici dans une analyse des situations, mais plutôt dans une analyse de tâches, nous retenons que la notion de complexité est liée à celle de performance et devrait, par conséquent, être cohérente avec celle de difficulté calculée statistiquement. Par ailleurs, l'étude de la complexité se doit de considérer les caractéristiques de la tâche, listées précédemment. Nous présentons alors dans cette partie la façon dont nous définissons *a priori* la complexité d'un item et dont nous l'exploitons dans l'analyse des évaluations ; nous nous plaçons ici dans le contexte d'une évaluation, mais l'étude de la complexité que nous menons est transférable dans un autre cadre.

III.1 Tâches complexes

Dans le Socle commun de connaissances et de compétences (2006), en lien avec les programmes de collèges, une tâche complexe est définie comme suit :

> « une tâche mobilisant des ressources internes (culture, capacités, connaissances, vécu...) et externes (aides méthodologiques, protocoles, fiches techniques, ressources documentaires...). Elle fait donc partie intégrante de la notion de compétence. Dans ce contexte, complexe ne veut pas dire compliqué. » (Extrait de Eduscol : http://eduscol.education.fr/)

Selon cette définition, les compétences sont donc liées à la notion de tâche complexe ; ce qui rejoint les caractères inédits ou complexes des situations évoquées par Rey & al. (2010) caractérisant les degrés de compétence. Nous observons que ces définitions, liant tâches complexes et compétences, sont définies de façon transversale aux différentes disciplines et par conséquent, ne font pas référence à des éléments didactiques. Il nous semble alors difficile de nous appuyer uniquement sur ces définitions pour caractériser la complexité d'une tâche.

Nous avons aborderons aussi la question de la complexité cognitive d'une tâche lorsque nous avons définirons le modèle d'analyse (chapitre 6) ; les taxonomies construites à partir de celle de Bloom permettent ainsi de hiérarchiser les énoncés mathématiques selon une complexité cognitive (Gras 1979, Bodin 2010b). Si pour ce dernier, la notion de complexité est aussi liée à celle de compétences, il en donne néanmoins une définition qui s'appuie sur une approche prenant en compte la dimension cognitive directement issue de cette taxonomie :

> « La complexité concerne l'enchaînement et les interrelations des processus mentaux à mettre en œuvre pour résoudre la situation. Théoriquement la complexité d'une situation à résoudre se mesure à la taille du plus petit algorithme susceptible d'en produire une solution (d'après la définition de Kolmogorov). À coté des situations à résoudre, il y a aussi les situations à appréhender, à décrire, mais la définition proposée est facilement transposable à ce cas. Traduit au niveau de l'enseignement, cette définition doit être réduite pour tenir compte du groupe concerné. La complexité d'une situation à résoudre décroit en effet en fonction des outils disponibles. » Bodin (2010b)

L'auteur précise ensuite que la complexité apparaît dès lors que l'on sort du domaine des connaissances ; il se réfère ici à la taxonomie des énoncés mathématiques (Annexe 1 du chapitre 6) et inclut sous le terme de « connaissances », la « compréhension et capacité à reconnaître ou appliquer dans les cas ne demandant pas une mobilisation personnelle » (ibid). On peut interpréter cette définition en la mettant en lien avec le niveau « technique » de convocation des types de tâches : à ce niveau, la tâche ne serait pas considérée comme complexe, alors qu'elle le serait dans les niveaux supérieurs. Nous remarquons aussi dans cette définition que la complexité d'une tâche dépend des outils disponibles pour la résoudre : cette remarque fait alors écho à la façon dont Castela (2008) a défini les couples correspondant aux niveaux d'intervention des OM, en prenant en compte à la fois le niveau de convocation des types de tâches et l'ancienneté de l'objet de savoir. Nous retrouverons ces éléments dans la description de la complexité d'une tâche que nous menons dans le paragraphe suivant, mais ce ne sont pas les seuls ; en effet, nous avons déjà souligné à partir de Brousseau (2010) que ce sont plus généralement les caractéristiques de la tâche qui doivent être pris en compte dans l'étude de la complexité.

Par ailleurs, lorsque nous avons décrit les différentes classes de problèmes relevant des structures additives ou multiplicatives, nous avons évoqué les trois facteurs de la complexité cognitive déterminés par Vergnaud (1990) : la structure des problèmes, les valeurs numériques, les domaines d'expérience. Nous retrouvons ces facteurs comme permettant de décrire la complexité ci-après ; les deux premiers sont identifiés comme des éléments à part entière, le domaine d'expérience est rattaché à l'ancienneté de l'enseignement de l'objet de savoir. Si le savoir considéré fait l'objet d'un enseignement récent, nous considérons que le domaine d'expérience de l'élève, relativement à ce savoir, est restreint.

III.2 Décrire la complexité d'une tâche

Si les échelles de complexité cognitive donnent des éléments assez transversaux pour hiérarchiser les énoncés, nous constatons qu'elles ne sont pas directement liées aux éléments que nous avons pris en compte pour décrire la tâche dans l'analyse *a priori* (mis à part les niveaux de mise d'intervention des types de tâches). Dans leur définition de compétences, Rey & al. (2010) insistent aussi sur le caractère inédit[10] de la tâche à réaliser. Par exemple, comme l'ont montré Tempier (2013) et Chambris (2008), les tâches de conversion avec des unités de numération sont peu présentes dans les manuels et dans l'enseignement, par conséquent elles ont un caractère inédit qui leur confère une certaine complexité.

Au-delà du caractère inédit de la tâche sur lequel nous revenons dans le premier point, différents éléments peuvent influencer la complexité de la tâche :

a. les types de tâches et la ou les techniques(s) de résolution : le caractère inédit du type de tâche (comme dans l'exemple précédent avec les tâches de conversion) peut augmenter la complexité de la tâche. En lien avec l'OM à enseigner, et le niveau scolaire où on se place, un type de tâche mobilisant des savoirs tout juste enseignés peut se révéler plus complexe qu'un autre mobilisant des savoirs plus anciens et qui ont été réactivés dans d'autres types de tâches.

b. les types de représentation : il s'agit dans ce cas d'observer s'il y a congruence sémiotique ou non (Duval 1996) entre les types de représentation lors des tâches de conversion de registres. Certains d'entre eux sont, par ailleurs, moins présents que d'autres dans les manuels et confèrent aussi un caractère inédit à la tâche ; ils peuvent être pris en compte dans la définition des types de tâche de traduction (comme nous l'avons fait pour la numération avec les types de tâches $\mathbf{T}_{\mathrm{T}\ldots/\ldots}$) et par conséquent cette caractérisation de la complexité rejoint celle décrite dans (a), mais nous n'avons pas identifié pour chaque praxéologie, des types de tâches spécifiques selon les types de représentation en jeu.

c. le niveau d'intervention des types de tâches (en lien avec le niveau de mise en fonctionnement des connaissances) : la complexité de la tâche sera d'autant plus élevée que les initiatives à prendre pour la résoudre seront plus importantes. Une tâche de niveau technique, considérée comme application directe de connaissances ne sera pas complexe à la différence, par exemple, d'une tâche demandant

[10] Nous rappelons qu'une tâche est considérée comme inédite si l'élève ne l'a pas rencontrée au cours de sa scolarité ; pour déterminer les tâches, voire les types de tâches qui sont effectivement inédits pour les élèves il faudrait étudier les praxéologies enseignées, en plus des manuels, pour analyser les pratiques enseignantes. Il s'agit d'une perspective de recherche qui nous semble pertinente et nous l'évoquerons dans la conclusion mais nous ne menons pas une telle étude dans le cadre de la thèse.

à l'élève d'identifier le type de tâche et de choisir une technique de résolution sur un savoir d'enseignement ancien ou récent.

<u>d. les nombres en jeu :</u> la taille du nombre, mais aussi la composition arithmétique des nombres interviennent sur la complexité. En fin d'école primaire un calcul peut s'avérer plus complexe s'il y a des retenues ou s'il mobilise la connaissance des répertoires multiplicatifs complexes (7 et 8) plutôt que d'autres, plus simples (tels que 2 et 3).

<u>e. la structure et la classe de problèmes à laquelle appartient le problème considéré :</u> dans un problème de transformation d'état, la recherche de la transformation ou de l'état initial est plus complexe que la recherche de l'état final (Vergnaud 1986) et cela peut s'avérer encore plus complexe si la transformation est négative. Une hiérarchie existe aussi entre les classes de problèmes, les problèmes de compositions de mesures étant plus simples que ceux de compositions de relations.

<u>f. le format de question :</u> si les recherches montrent que le format influe sur la complexité, on ne peut pas totalement affirmer que le QCM rend systématiquement la tâche moins complexe. Il semblerait cependant que certains distracteurs soient plus attractifs que d'autres, surtout lorsqu'ils correspondent à des erreurs reconnues ou à des résultats d'étapes intermédiaires. Par conséquent, s'il est important de prendre en compte cette variable, son influence sur la complexité du problème est délicate à anticiper.

<u>g. le contexte de la situation</u> : nous avons souligné dans un paragraphe précédent l'« effet de contexte » (Julo 1995) mais, comme pour le format de question, il est délicat de déterminer *a priori* l'impact qu'il peut avoir sur la réalisation de la tâche et donc sur la complexité de cette dernière.

<u>h. la structure énonciative du problème et le langage :</u> Julo (1995, p. 156) explique par exemple que placer la question avant l'énoncé du problème (et non après) implique, chez de jeunes enfants, une meilleure réussite du problème. Houdement (2003) évoque aussi l'ordre et la présentation des informations dans l'énoncé comme influençant la réussite au problème. La question de la congruence entre la langue naturelle et le langage mathématique est prise en compte dans (b), mais la présence d'expressions telles que (« en plus », « de plus », « fois plus »...) induisent une certaine modélisation du problème qui peut se révéler fausse lorsqu'il n'y pas congruence.

<u>i. ... :</u> la liste que nous donnons ici des différents éléments pouvant modifier la complexité d'une tâche ne peut pas être exhaustive, en particulier si l'on prend en compte les paramètres extra-mathématiques qui relèvent de la facette psycho-didactique.

Nous nous limitons ici à ne lister que les éléments pouvant avoir un impact sur la complexité d'une tâche dans le domaine numérique ; les variables didactiques seraient donc différentes dans une étude relative à un autre domaine.

Nous concluons, par conséquent, qu'une tâche est d'autant plus complexe que :

- le type de tâche auquel elle correspond est inédit,
- il n'y a pas congruence entre les registres de représentation sémiotique,
- le niveau de convocation des types de tâches est élevé, avec un objet de savoir récent,
- les nombres en jeu sont grands et impliquent des calculs avec retenues, avec des grandes tables, etc.,
- le problème appartient à une classe de problèmes considérée comme plus complexe que d'autres,
- le format de question peut perturber l'activité de l'élève,
- le contexte de la situation peut rendre l'interprétation du problème difficile pour l'élève,

- la structure énonciative du problème ou le langage employé peuvent perturber la modélisation,
- ...

Nous rappelons que nous avons décrit la complexité d'une tâche pour deux raisons : vérifier, lors de l'analyse du contenu de l'évaluation, que des tâches de complexités différentes sont proposées pour apporter des preuves didactiques de validité, mais aussi, après la passation de l'épreuve, pouvoir mettre en perspective, pour chacune des tâches, la complexité avec l'indice de difficulté calculé statistiquement et repérer d'éventuelles incohérences. Il s'agit aussi de cibler des items qui seraient peu complexes de notre point de vue, mais très difficiles d'un point de vue statistique, ou inversement, des items très complexes qui seraient faciles (indice de difficulté bas).

Comme chacun des éléments descripteurs de la tâche permet de donner une vision de la complexité relativement aux valeurs qu'il peut prendre, indépendamment des valeurs prises par les autres éléments, il est alors difficile de définir la complexité d'un item, englobant l'ensemble des éléments qui décrivent la tâche. Par conséquent, il devient délicat de mettre en perspective l'indice de difficulté calculé statistiquement, avec des éléments indépendants qui décrivent, pour chacun d'eux une certaine complexité. La comparaison complexité-difficulté serait alors facilitée si chaque item pouvait être aussi caractérisé par un indice de complexité, défini théoriquement et permettant une certaine hiérarchie : un item qui aurait un indice de complexité élevé serait alors plus complexe qu'un autre, la définition de cet indice reposant sur les éléments décrivant la complexité d'une tâche. Pour ce faire, nous avons choisi d'exploiter les « facteurs de complexité et niveaux de compétences » que nous avons développés avec Sayac (Sayac & Grapin 2013, 2015). Si [nous][11] avons conçu cet outil initialement pour analyser le contenu de l'évaluation CEDRE 2008, nous le revisitons dans le cadre de la thèse pour le situer dans une étude plus générale de la validité de contenu telle que nous l'avons définie et pour l'exploiter dans des comparaisons complexité-difficulté.

III.3 Étude de la complexité des items - un outil : les facteurs de complexité et de compétences

Dans les premiers travaux menés avec Sayac (2013) sur l'analyse de l'évaluation CEDRE, [nous] avions étudié les items aux regards des programmes scolaires pour déceler des manques éventuels et interroger la complexité des items afin de déterminer si l'évaluation permettait, comme annoncé, d'évaluer effectivement des compétences et pas seulement des connaissances. Nous commençons ce paragraphe en présentant les « facteurs de complexité et niveaux de compétences » (Sayac & Grapin 2013, 2015), puis en expliquant à partir d'exemples, la façon dont nous cotons la complexité des items ; nous poursuivons par une discussion autour de l'outil pour montrer ses intérêts et ses limites en vue des analyses que nous souhaitons mener par la suite.

III.3.1 Description et contextualisation de l'outil

III.3.1.i Définition de l'outil

Nous reprenons d'abord les objectifs que [nous] avons assignés à l'outil et la façon dont [nous] l'avons conçu :

> « Les items des évaluations nationales sont principalement catégorisés par domaines de connaissances mathématiques, en rapport avec les programmes en cours, mais cette

[11] [nous] correspond au travail réalisé avec N. Sayac.

catégorisation se fait généralement de façon très globale ne permettant pas de rendre compte, précisément, de l'état des connaissances des élèves dans un domaine donné. Pour analyser les items dans une perspective de repérage des connaissances réellement en jeu pour les réussir, nous avons conçu un outil faisant la synthèse des différents travaux présentés ci-dessus et adapté à la forme et la nature des items. Pour chaque item, nous avons cherché ce qui pouvait impacter la réponse des élèves, au-delà du savoir en jeu et des connaissances mathématiques nécessaires à sa réussite ; ce qui nous a amenées à élaborer un outil d'analyse intégrant des paramètres extra-mathématiques rentrant en compte dans la compréhension, pour l'élève, de la tâche à réaliser tels que les éléments relatifs au contexte, à l'énoncé, à la forme de la question, etc. » Sayac & Grapin (2015, p. 109)

Si [nous] ne l'avons pas formulée dans les mêmes termes, la volonté que [nous] avions de caractériser les tâches par des éléments didactiques relatifs aux savoirs en jeu et par des paramètres extra-mathématiques rejoint la description des tâches selon les deux facettes de la validité didactique telles que nous les avons définies dans les paragraphes précédents, mais avec un objectif différent : il ne s'agissait pas, avec cet outil d'étudier la couverture du domaine ni même la cohérence des tâches par rapport aux objectifs d'évaluation, mais de chercher dans quelle mesure les items proposés relèvent de différents niveaux de complexité et de déterminer s'ils permettent ou non d'évaluer des compétences. [Nous] avions alors défini une compétence comme :

> « une capacité d'agir de manière opérationnelle face à une tâche mathématique qui peut s'avérer inédite, en s'appuyant sur des connaissances que l'élève mobilise de façon autonome. » Sayac & Grapin (2015, p. 113)

A la différence de ce que nous développons dans la thèse, [nous] ne [nous] situions pas explicitement dans le cadre de la TAD pour l'analyse didactique des tâches, ni dans celui des APDE (Vantourout & Goasdoué 2014), mais [nous] nous appuyions déjà sur certains travaux en didactique (l'approche sémiotique de Duval (1996), les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances de Robert (1998), etc.) que nous explicitons ci-après.

Pour séparer les caractéristiques relevant des savoirs en jeu de celles relevant de paramètres extra-mathématiques, [nous] avons décliné l'outil en deux facteurs : un premier relatif à ce que [nous] avons appelé « le contexte de l'énoncé » et qui reprend des éléments relatifs à la facette psycho-didactique de la validité de contenu et un second, « les savoirs mathématiques en jeu », qui correspond davantage au point de vue local sur les tâches de la facette épistémo-didactique.

> « Facteur de complexité 1 : le contexte de l'énoncé
>
> Dans ce facteur, le niveau de langue de l'énoncé ainsi que la nature des informations à traiter (texte, graphique, schéma, etc.) nous semblent importants à considérer. Ce qui importe dans ce facteur, c'est d'évaluer comment l'élève est amené à comprendre, aisément ou de façon plus alambiquée, la tâche qu'il doit réaliser. Nous estimons également que la nature de l'item et le type de réponses à produire ne sont pas sans incidence sur l'engagement de l'élève dans la tâche : une question ouverte ou fermée, un QCM, un vrai/faux confrontent les élèves à des stratégies de réponse différentes. Le contexte d'un énoncé, permettant ou non une représentation opérationnelle du problème posé, peut également se révéler pertinent pour ce facteur. […]
>
> Facteur de complexité 2 : les savoirs mathématiques en jeu
>
> Ce facteur est directement lié au savoir mathématique en jeu. De ce point de vue, la tâche à réaliser peut être plus ou moins simple, nous nous référons aux divers travaux effectués en didactique des mathématiques dans les différents domaines concernés par l'évaluation pour

> évaluer ce facteur de complexité. Dans ce facteur, sont également pris en compte les variables didactiques, ainsi que les distracteurs proposés dans les items car ils peuvent avoir une influence non négligeable sur la réussite des élèves, dans un sens positif ou négatif. […]
> Ce facteur est donc directement en lien avec les savoirs mathématiques en jeu dans les items et requiert donc des connaissances didactiques selon les domaines concernés. » Sayac & Grapin (2015, p. 110-111)

Par conséquent, [nous] avions considéré que la complexité d'un item pouvait provenir d'éléments du « contexte de l'énoncé » et/ou des savoirs mathématiques en jeu. L'objectif de cet outil étant de pouvoir déterminer dans quelle mesure un item est complexe, [nous] avions choisi d'attribuer à chacun de ces deux facteurs un nombre de points selon leur niveau de complexité : 0 - 1 ou 2 points pour le premier et 1 - 2 ou 3 points pour le second (plus le nombre de points est élevé plus la complexité est importante). [Nous] avions donné la possibilité d'attribuer 0 à certains items pour le contexte de l'énoncé puisque pour les tâches très usuelles à ce niveau scolaire ou totalement explicites du point de vue de la tâche à réaliser, l'item ne présente aucune complexité.

[Nous] avions aussi attribué à chaque item « un niveau de compétences » que nous avions défini en nous référant d'abord aux niveaux de mises en fonctionnement des connaissances (Robert, 1998) et aux adaptations listées par Robert (2008). Parmi celles-ci, [nous] n'avions retenu que celles [nous] semblant à la fois adaptées au niveau scolaire considéré (fin d'école) et à la forme même des items d'une évaluation externe, à savoir :

> « A1. Les reconnaissances (partielles) des modalités d'application des connaissances (notions, théorèmes, méthodes, formules, etc.) [...]
> A2. L'introduction d'intermédiaires – notations, points, expressions, etc. [...]
> A3. Les mélanges de plusieurs cadres ou notions, les changements de points de vue, les changements ou jeux de cadres, les mises en relation ou interprétations, etc. [...]
> A4. L'introduction d'étapes, l'organisation des calculs ou des raisonnements [...]. Les étapes peuvent être classiques [...] ou à imaginer. » Robert (2008, p. 49)

[Nous] avions écarté en particulier les adaptations liées à « l'utilisation des questions précédentes dans un problème », ainsi que celle correspondant à « un manque de connaissance nouvelle », puisque dans une telle évaluation les questions se doivent d'être indépendantes et de porter sur des savoirs qui ont déjà été enseignés.

[Nous] avions également pris en compte les travaux sur les compétences que nous avions listés dans le premier chapitre de la thèse, la notion de compétence étant également liée au caractère inédit de la situation.

Trois niveaux de compétences sont alors définis :

> « Niveau 1 : pour les tâches qui amènent à des applications immédiates des connaissances, c'est-à-dire simples (sans adaptation) et isolées (sans mélange), où seule une connaissance précise est mise en œuvre sans aucune adaptation, mis à part la contextualisation nécessaire. Ces tâches sont, par ailleurs, généralement usuelles.
> Niveau 2 : pour les tâches qui nécessitent des adaptations de connaissances qui sont en partie au moins indiquées. Ces tâches peuvent être plus ou moins usuelles.
> Niveau 3 : pour les tâches qui nécessitent des adaptations de connaissances qui sont totalement à la charge de l'élève. Ces tâches sont souvent inédites. » Sayac & Grapin (2015, p. 114)

Par conséquent la complexité d'un item est déterminée par trois nombres :

- le facteur de complexité 1 (FC 1) correspondant au contexte de l'énoncé coté 0 - 1 ou 2 points ;
- le facteur de complexité 1 (FC 2) correspondant aux savoirs mathématiques en jeu coté 1 -2 ou 3 points ;
- le niveau de compétences prenant pour valeurs 1 - 2 ou 3.

Avant d'expliciter comment nous pouvons exploiter cet outil pour analyser le contenu d'une évaluation et comparer la complexité (déterminée *a priori*) avec la difficulté (calculée statistiquement) d'un item, nous montrons à partir de quelques exemples, la façon dont nous cotons les facteurs et les niveaux de compétences.

III.3.1.ii Exemples d'utilisation

Les items que nous avons choisis sont extraits de l'évaluation CEDRE 2008 et de TIMSS[12] ; ils relèvent du domaine de la numération et de l'arithmétique des nombres entiers que nous étudions. Ils sont choisis pour être de complexité variée et pour convoquer des types de tâches relevant des OMR 1, OMR 2 et OMR 3.

1er exemple

Item 1 : huit-cent-dix-mille s'écrit :			
□ 800 100	□ 801 000	□ 810 000	□ 810 100

Analyse des facteurs de complexité et niveaux de compétences pour l'item 1 :

FC 1 : l'énoncé de la tâche à réaliser est simple à comprendre et le format QCM engage l'élève dans la tâche. Il s'agit du plus bas niveau de complexité que l'on peut avoir sur ce facteur ; nous le cotons donc 0 sur 2.

FC2 : il s'agit ici d'une tâche de reconnaissance d'écriture chiffrée d'un nombre entier à partir de son écriture en lettres représentant $\mathbf{T}_{\mathbf{Tnp/ec}}$; le nombre considéré est de l'ordre des centaines de mille alors qu'en fin d'école, les nombres entiers sont enseignés jusqu'au million et ce, depuis le CM1 (grade 4). Même s'il n'y a pas congruence entre les deux types de représentation, les distracteurs proposés ne correspondent pas à des erreurs reconnues qui pourraient, par conséquent, influencer de façon négative l'élève. On estime alors que cette tâche de traduction qui s'apparente davantage à de la reconnaissance (au vu du format de la question) n'est pas source d'erreurs, d'autant plus qu'elle est proposée en fin de CM2 (grade 5) ; nous cotons donc ce facteur : 1sur 3.

NC : il s'agit ici d'une tâche usuelle, ne demandant aucune adaptation à l'élève. Elle relève donc du niveau 1 de compétences.

2ème exemple

		3	2	4
Item 2 : complète chacun des points par un chiffre :	×			.
	2	.	9	2

[12] Item libéré extrait de TIMSS released items (2013)

Analyse des facteurs de complexité et niveaux de compétences pour l'item 2 :

FC 1 : l'énoncé de la tâche à réaliser est simple à comprendre, mais posée sous forme ouverte et non sous forme de QCM, les élèves peuvent être amenés à compléter chacun des trous par plusieurs chiffres, s'ils ne comprennent pas la consigne ou encore, ne compléter qu'un trou sur les deux (ce qui est insuffisant et correspond à une réponse fausse selon le codage utilisé, même si un des chiffres est correct). Nous cotons ce premier facteur de complexité 1 sur 2.

FC2 : cette tâche représente $\mathbf{T}_{CP\_\times}$; les éléments technologico-théoriques en jeu sont donc ceux associés à $\boldsymbol{\tau}_{CP\_\times}$, technique de calcul de la multiplication posée et éventuellement à ceux relatifs aux ordres de grandeur d'un produit. Néanmoins, il s'agit ici de dépasser l'aspect uniquement algorithmique de la technique $\boldsymbol{\tau}_{CP_\times}$et d'identifier la façon de trouver le chiffre des unités du produit à partir des chiffres des unités des deux facteurs pour ensuite contrôler avec le chiffre des dizaines du produit : comme $4 \times 3 = 12$, on peut penser que 3 convient comme multiplicateur, mais il est écarté soit en raisonnant avec les ordres de grandeur soit en observant que dans ce cas, le chiffre des dizaines ne serait pas 9, mais 7 ; ensuite, seul le produit de 4 par 8 conduit à un chiffre des unités égal à 2. Il s'agit ensuite de déterminer le chiffre manquant (5) dans l'écriture chiffrée du produit en effectuant la multiplication. Nous cotons alors ce facteur 2 sur 3.

NC : la tâche n'est pas usuelle, les multiplications à trous n'étant pas proposées régulièrement dans les manuels de CM2[13]. L'élève reconnaît facilement la situation (celle du calcul d'un produit par une multiplication posée), mais il doit adapter les connaissances qu'il a de la technique de ce calcul et éventuellement avoir recours à l'utilisation d'un ordre de grandeur pour déterminer le facteur manquant. Sans recours aux ordres de grandeur, il doit alors procéder par essais pour déterminer le facteur. L'item relève donc d'un niveau de compétences 2.

3ème exemple

Item 3 : On veut transporter 185 voitures par le train. On charge 9 voitures par wagon. Combien faut-il de wagons pour transporter toutes ces voitures ?

Analyse des facteurs de complexité et niveaux de compétences pour l'item 3 :

Nous avons reviendrons sur ce problème dans le chapitre 6 de la thèse lors de la définition du modèle d'analyse multidimensionnelle pour illustrer des technologies dominantes dans la production d'expressions arithmétiques. La résolution convoque différents types de tâches, particulièrement $\mathbf{T}_{RP\_\times}$ et $\mathbf{T}_{CP\_:}$.

FC 1 : l'énoncé est assez simple à comprendre : les phrases sont courtes, mais le contexte évoqué n'est pas proche du quotidien des élèves, ce qui peut induire des difficultés d'interprétation et de choix du modèle. Ce facteur est coté 1.

FC2 : les savoirs mathématiques en jeu relèvent du choix du modèle et du calcul d'une division. Le modèle attendu est celui d'une division, mais nous avons déjà montré que d'autres modèles étaient possibles, même si ce ne sont pas ceux qui sont attendus. Les modèles de division sont enseignés depuis le CE2.

[13] Dans les manuels Cap Maths CM2 (Charnay & al. 2009a, p. 28) et Euromaths CM2 (Peltier & al. 2009 a, p. 25) figurent des exercices similaires à l'item d'évaluation ; ils sont néanmoins peu nombreux (trois et quatre multiplications à trous) par rapport à l'ensemble des exercices proposés.

Les nombres choisis permettent un calcul réfléchi du quotient assez simplement en constatant que 9 × 20 = 180. En utilisant la technique de la division posée, en plus des erreurs de calcul liées à la méconnaissance des tables, le fait d'avoir un zéro comme dernier chiffre du quotient peut être une autre source d'erreurs. Comme la technique de la division posée avec un diviseur à un chiffre est enseignée depuis le CM1 (grade 4), nous estimons ce niveau de complexité à 1.

NC : il s'agit d'un problème de division-partition classique similaire à ceux que l'on trouve dans les manuels de CM2. L'interprétation du reste qui demande d'ajouter 1 au quotient pour donner la bonne réponse est à la charge de l'élève, mais n'est pas inédite (de tels exercices sont proposés dans les manuels de CM2). Cet item est donc de niveau de compétences 2.

Nous avons cherché à présenter des items de niveaux de complexité et de compétences variés extraits de CEDRE, mais n'avons pas trouvé d'item de niveau de compétence 3 dans cette évaluation, sur notre domaine d'étude. Pour illustrer ce niveau de compétence, nous proposons ci-dessous un quatrième exemple d'item, extrait de TIMSS 2011.

4ème exemple

Item 4 : Tournoi de foot Dans un tournoi de foot, chaque équipe gagne: 3 points pour une victoire, 1 point pour un match nul, 0 point pour une défaite. La Zedland a 11 points. Quel est **le plus petit nombre**[14] de match que la Zedland a pu jouer ?

Analyse des facteurs de complexité et niveaux de compétences pour l'item 4 :

FC 1 : le contexte de la tâche est familier des élèves de ce niveau. Il s'agit de prendre en considération toutes les informations données dans l'énoncé et de comprendre la question posée (la mise en gras d'une partie de la question permet d'insister sur ce que l'on cherche). Nous cotons ce facteur 1.

FC2 : les savoirs mathématiques en jeu relèvent principalement du choix d'un modèle et de la traduction du problème par un schéma ou en langage mathématique. D'un point de vue mathématique, ce problème revient à décomposer de façon additive 9 avec 3 et 1, mais avec une contrainte supplémentaire, le moins de termes possibles. Ici l'élève peut procéder par additions successives de 3 pour se rapprocher le plus possible de 11 ou éventuellement procéder par essais-erreurs. Nous observons donc que les savoirs mathématiques en jeu (modèles et calculs additifs puis comparaison de nombres inférieurs à vingt) sont des savoirs de base, même si le choix du modèle du problème est quant à lui plus compliqué. Ce facteur est par conséquent coté 1.

NC : ce type de problèmes n'est pas proposé usuellement dans les classes et ne s'apparente pas aux problèmes arithmétiques classiques tant par sa forme que par les techniques de résolution possibles ; c'est dans ce facteur que nous prenons en compte la complexité du choix du modèle. Nous considérons alors que le niveau de compétences de cet item est 3.

L'item 4 est un exemple d'item permettant d'évaluer des compétences dans une tâche que l'on peut considérer comme complexe si l'on s'en réfère au niveau de compétences, mais qui pour autant ne mobilise que des savoirs mathématiques « de base ». Il nous permet aussi de montrer l'intérêt de

[14] En gras dans l'énoncé original de l'item.

dissocier, dans l'analyse de la complexité, ce qui relève de savoirs mathématiques (facteur de complexité 2) de la mobilisation de connaissances (niveau de compétences).

III.3.1.iii Conclusions

Nous synthétisons dans le Tableau 3 ci-dessous les différents facteurs de complexité et niveaux de compétences attribués à chacun des items

	Facteur de complexité 1	Facteur de complexité 2	Niveau de compétences
Item 1	0	1	1
Item 2	1	2	2
Item 3	1	1	2
Item 4	1	1	3

Tableau 3 - Cotation des différents items selon les facteurs de complexité et niveaux de compétences

En regroupant les cotations dans un même tableau, nous constatons que des items peuvent avoir des facteurs de complexité avec une même cotation sans que la complexité ne soit due à des paramètres identiques. Nous percevons aussi qu'en procédant de cette façon sur l'ensemble des items d'un test, il est possible à la fois de s'assurer que les items de l'évaluation présentent des niveaux de complexité et de compétence variés et de repérer les items ayant un indice de difficulté (calculé statistiquement) décalé par rapport aux niveaux de complexité définis *a priori.*

III.3.2 Discussion sur l'outil

Nous précisons que l'outil que [nous] avons développé est une façon de rendre compte de la complexité d'une tâche et qu'il n'est pas destiné à étudier la représentativité des tâches par rapport à un domaine ; pour ce faire, l'approche anthropologique, comme nous l'avons montré dans la première partie de ce chapitre, est particulièrement bien adaptée. Nous montrons ci-après les intérêts et les limites de cet outil dans l'étude de la complexité des items et la complémentarité qu'il peut avoir par rapport aux approches épistémo-didactique et psycho-didactique que nous avons présentées précédemment.

<u>Intérêts et limites de l'outil pour étudier la complexité des items :</u>

Les cotations des niveaux de complexité et de compétences se font après avoir réalisé une analyse *a priori* de l'ensemble des items du test et sont déterminées, bien souvent, de façon arbitraire par rapport :

- aux autres items de l'ensemble du test pour le premier facteur de complexité, puisque les éléments qui le décrivent sont transversaux à l'ensemble des items du test, et ne dépendant pas des savoirs mathématiques,
- à des items qui mettent en jeu un même savoir mathématique, pour le second facteur de complexité.

Par conséquent, pour être significative, la comparaison entre items peut être réalisée sur l'ensemble du test pour le premier facteur, mais uniquement sur un même domaine pour le second. Par ailleurs, les cotations peuvent légèrement varier d'une personne à l'autre, la cotation des facteurs de complexité pouvant être parfois subjective[15] ; cet outil ne prétend pas déterminer une valeur absolue, mais simplement une valeur relative par rapport à un ensemble de paramètres considérés.

L'utilisation d'une cotation pour les facteurs et les niveaux de compétences permet d'attribuer un triplet à chaque item conduisant alors à une certaine hiérarchisation des items selon leur complexité et leurs niveaux de compétences. L'utilisation de cet outil sur les items de l'évaluation bilan CEDRE 2008 fin d'école a ainsi permis de montrer :

> « qu'un peu plus des trois quarts des items relevaient d'un bas niveau de compétences, c'est-à-dire qu'ils correspondent à des applications immédiates de connaissances, et qu'ils ne permettent pas d'évaluer la résistance de ces connaissances dans des situations plus complexes ». Sayac & Grapin (2015, p. 120)

Par contre, si l'outil amène à ce type de conclusion, il ne permet pas de déterminer directement les éléments sur lesquels porte la complexité.

<u>Lien entre les deux facteurs de complexité et le niveau de compétences</u> :

Lorsque [nous] avons utilisé cet outil pour l'analyse de CEDRE 2008, [nous] avons montré que les items ayant un niveau de compétences élevé avaient, pour plus de la moitié d'entre eux, des niveaux de complexité élevés et par conséquent :

> « En termes d'évaluation, il est donc difficile de déterminer si l'échec de l'élève relève d'un manque de compréhension de l'énoncé, d'un manque de connaissance mathématique ou d'un manque de compétences adaptées (ou les trois). » Sayac & Grapin (2015, p. 120)

Nous retrouvons ici, en termes de validité de contenu, l'intérêt d'avoir des items de niveaux de complexité et de compétence variés, sans que la complexité et le niveau de compétences ne soient dépendants : c'est-à-dire, avoir des items de niveaux de compétence élevé tout en ayant des niveaux de complexité bas et inversement. Ce que nous avons illustré avec l'exemple de l'item 4, extrait de TIMSS, dans le paragraphe précédent.

<u>Mise en perspective de l'outil avec l'analyse épistémo-didactique et psycho-didactique</u>

Si attribuer des points à chacun des facteurs et des niveaux de compétences permet de comparer la complexité des items entre eux et de savoir sur quelle caractéristique globale elle repose, en revanche, on ne peut pas savoir, à partir des cotations uniquement, les caractéristiques de l'énoncé ou de la tâche sur lesquelles la complexité porte ; ce que nous avons montré avec le Tableau 3 réalisé à la fin de l'analyse des quatre exemples. Pour retrouver ces informations, il est alors nécessaire de se référer à l'analyse *a priori* de la tâche. Inversement, la complexité telle qu'on peut l'appréhender en ne tenant compte que des éléments décrivant la tâche permet difficilement de rendre compte, sur un domaine donné, d'un équilibre sur la complexité des tâches de l'évaluation, à moins de procéder variable par variable, puis de croiser selon différentes valeurs de variables : ce qui rend l'analyse fastidieuse et difficilement interprétable, surtout lorsque le nombre d'items est élevé.

Par conséquent, ce que l'on perd en précision avec les facteurs de complexité et niveaux de compétences peut être gagné en fonctionnalité par rapport à l'analyse *a priori* habituelle. D'un point

[15] Si cet outil a été développé au départ pour analyser des items d'évaluations externes, il est aussi exploité pour analyser la complexité d'exercices proposés dans les évaluations internes (Sayac, recherche en cours). [Nous] avons montré aussi la pertinence de son utilisation en formation initiale et continue (Sayac & Grapin 2013) ; la différence de cotation entre les personnes les amène à s'interroger sur leurs pratiques, leurs élèves et les représentations qu'elles en ont ainsi que sur les évaluations qu'elles proposent.

de vue méthodologique, cela signifie que l'analyse *a priori* des tâches est menée d'abord et que les cotations s'effectuent ensuite pour chaque item. Une analyse ensuite de l'ensemble des items d'un domaine selon ces indicateurs permet de savoir, avant passation du test, si les items présentent différents niveaux de complexité ; cela permet en particulier de repérer si trop d'items sont peu complexes ou au contraire s'il y en a trop de complexes. Cette étude globale peut ensuite être affinée par des observations plus ciblées sur les éléments qui décrivent les tâches, en particulier pour les items de niveau de complexité ou de compétences élevés afin de s'assurer que la complexité est bien répartie entre les savoirs mathématiques et le contexte de l'énoncé. Il est aussi possible d'exploiter les facteurs de complexité et les niveaux de compétence pour comparer l'indice de difficulté avec la complexité ; la comparaison peut être effectuée item par item, mais aussi selon une hiérarchie des items selon leur complexité ou leur difficulté. Cette dernière étant calculée statistiquement, il s'agit alors de croiser une approche didactique (qui détermine *a priori* la complexité) avec une approche psychométrique (qui calcule l'indice de difficulté).

Ainsi, en termes d'analyse, dans la méthodologie que nous décrivons, il reste à mettre en perspective l'analyse didactique de la validité de contenu avec les caractéristiques psychométriques des items. Le paragraphe suivant explicite alors comment ces deux approches, didactique et psychométrique, peuvent se révéler complémentaires dans la conception d'une évaluation, mais aussi dans l'analyse des résultats.

IV APPROCHES DIDACTIQUES ET PSYCHOMÉTRIQUES

Comme pour l'analyse menée sur la validité de contenu, deux points de vue peuvent être adoptés : localement, selon les différentes caractéristiques statistiques de chacun des items et globalement, pour l'ensemble des items appartenant à un même domaine à partir des résultats de l'évaluation, en particulier à partir de l'échelle des scores. Nous exposons dans ce paragraphe les potentialités qu'offrent la complémentarité des deux approches, didactique et psychométrique et les conditions pour qu'elle soit fructueuse.

IV.1 Localement : par item

Comme nous l'avons explicité dans le premier chapitre, chaque item de l'évaluation est caractérisé par son indice de difficulté statistiquement calculé et son pouvoir de discrimination. Dans une approche locale, il s'agit de s'intéresser aux items présentant des caractéristiques statistiques particulières pour *a minima* les interroger et rechercher d'éventuelles causes de ces particularités.

<u>Difficulté des items :</u> si la cohérence entre chaque item et l'objectif d'évaluation qui lui est assigné doit être étudiée indépendamment de la difficulté, une analyse plus précise des items ayant l'indice de difficulté le plus faible (les items réussis par de nombreux élèves) ou le plus élevé (ceux les plus échoués) peut être menée afin d'observer si ces items permettent d'évaluer, sans biais, ce qu'ils sont sensés évaluer. Par exemple, un item peut se révéler beaucoup plus simple si les distracteurs proposés dans le QCM sont mal choisis et permettent des stratégies autres que celles mobilisant des connaissances mathématiques pour trouver la bonne réponse. Il en est de même pour un item déterminé statistiquement comme difficile.

Il s'agit finalement ici d'étudier plus spécifiquement les items permettant de caractériser les groupes des bas et haut niveaux, ou encore des items qui sont hors de l'échelle (items dont la probabilité de réussite est inférieure à 0,5 pour les élèves du groupe de plus haut niveau).

Difficulté et complexité : quelle complémentarité ? Une première analyse peut permettre de confronter la difficulté calculée avec les facteurs de complexité et niveaux de compétence attribués *a priori*. Des items caractérisés avec des niveaux de complexité ou de compétence élevés (resp. bas) qui ont des indices de difficultés bas (resp. élevés) sont particulièrement intéressants à étudier. Sans remettre en cause la validité de l'item, les raisons de ce décalage méritent d'être recherchées. Si l'analyse *a priori* de la tâche permet de garantir la validité et la pertinence des items d'un point de vue épistémo-didactique, une étude psycho-didactique peut alors être menée spécifiquement sur ces items pour observer si les processus de réponses mis en jeu par les élèves sont ceux attendus ou non : par exemple, un effet de contexte ou une mauvaise compréhension de l'énoncé peuvent expliquer un indice de difficulté élevé sans qu'ils aient pu être anticipés lors de l'analyse *a priori*.

Il est aussi possible de questionner, relativement à l'OM de référence et aux programmes, l'OM enseignée lors de tels décalages et de mener des études complémentaires (analyse de manuels, études de pratiques enseignantes), en particulier si ces décalages portent sur des items relevant d'un même type de tâche ou mettant en jeu un même type de représentation. Par exemple, dans le cadre de la numération, il est établi que les types de tâches de conversion sont peu présents dans les manuels (Chambris 2008, Tempier 2013), ce qui pourrait expliquer les indices de difficulté élevés des items qui les évaluent. La psychométrie et la didactique interviennent alors de façon complémentaire ; la première pour repérer d'éventuels décalages et la seconde pour en déterminer les causes.

Pouvoir de discrimination : si le faible pouvoir de discrimination (R_{bis}) d'un item peut être expliqué par l'ambigüité de la question ou des réponses proposées (Rocher & al. 2008), d'autres explications sont peut être possibles. Une analyse *a priori* de la tâche devrait permettre d'écarter des items qui présentent de tels biais avant la passation, en particulier, pour les QCM construits avec des distracteurs peu pertinents. Par ailleurs, comme le R_{bis} est corrélé avec l'indice de difficulté, les items fortement réussis ou fortement échoués sont par conséquent peu discriminants ; la détermination de la complexité *a priori* peut permettre d'anticiper le faible pouvoir de discrimination de tels items. Dans les autres cas, il n'existe pas de critère didactique pour déterminer *a priori* les raisons pour lesquelles des items seraient plus discriminants que d'autres.

Comme nous l'avions expliqué dans le premier chapitre de la thèse, les items qui n'ont pas un R_{bis} satisfaisant (par convention lorsqu'il est inférieur à 0,2) sont écartés de l'échelle des scores. De telles décisions peuvent remettre en cause des critères de validité de contenu qui avaient été respectés lors de la conception au niveau de la couverture du domaine ou de la variété de la complexité ; cela peut également conduire à écarter de l'échelle des scores des items particulièrement bien réussis et qui permettent de décrire les connaissances des groupes de bas niveaux dans l'échelle. Il faudra alors non seulement étudier les items écartés pour ces raisons, mais aussi observer l'impact de ces choix sur le contenu global du test.

Items avec un fonctionnement différentiel : lorsqu'une évaluation est reproduite pour faire des comparaisons temporelles, des items peuvent aussi être écartés parce qu'ils présentent un fonctionnement différentiel (défini dans le paragraphe II.3.2 du chapitre 1) ; si Rocher (2008) évoque des raisons relatives aux changements de programmes, d'autres causes sont peut-être à rechercher, en particulier dans les praxéologies enseignées en lien avec celles à enseigner, sans se limiter aux changements de programmes, mais en tenant compte aussi du contenu des manuels, des évaluations institutionnelles existantes et de leur éventuel impact sur les pratiques des enseignants.

IV.2 Globalement - par domaine

Dans ce paragraphe, nous nous situons sur un domaine donné et exploitons l'échelle des scores (définie dans le chapitre 1) construite statistiquement et l'interprétation des résultats faite par les concepteurs de l'évaluation : nous ne considérons plus la difficulté item par item, mais plutôt le classement des items selon leur difficulté calculée *a posteriori* et les groupes définis à partir de l'échelle des scores. Comment interroger cette échelle et l'interprétation qui en est faite à partir de l'analyse des tâches ?

Cette question peut être traitée par deux types d'analyse, à partir :

- des groupes de l'échelle des scores : pour chacun des groupes, il s'agit de caractériser didactiquement les tâches réussies à partir des éléments qui les caractérisent.
- des éléments qui décrivent les tâches en particulier, le type de tâches et le niveau d'intervention des types de tâches ou encore le niveau de compétence. Pour un des éléments décrivant les tâches, nous étudions la répartition des items dans l'échelle des scores.

Quelle que soit la perspective dans laquelle nous nous plaçons, ce sont les éléments de l'analyse *a priori* des tâches qui servent de point d'appui à l'étude.

IV.2.1 Analyse par groupe de l'échelle des scores

En se plaçant relativement à un groupe donné de l'échelle ou relativement à un ensemble d'items possédant des indices de difficulté proches, il s'agit de rechercher des caractéristiques didactiques communes pour caractériser, de façon plus précise, les connaissances des élèves appartenant à ce groupe. Ces caractéristiques peuvent être déterminées à partir des variables, mais aussi à partir des techniques apprises, à condition de passer par un recodage des productions des élèves quand cela est possible. Une partie de ce travail est déjà menée par les concepteurs lorsqu'ils caractérisent les groupes de l'échelle (Annexe 7 du chapitre 1) ; il s'agit ici de l'approfondir en précisant, par exemple, les techniques employées pour résoudre les tâches selon les différents groupes.

IV.2.2 Analyse par éléments descripteurs des tâches

Nous nous intéressons ici à la répartition des tâches selon différents éléments qui les décrivent, en particulier le type de tâches et les éléments technologico-théoriques visés et le niveau d'intervention des types de tâches ou encore le niveau de compétences. Pour certaines variables que nous ne détaillons pas ici (le caractère *outil* ou *objet*, les types de représentations, etc.) cette analyse peut également s'avérer pertinente, à condition qu'il y ait suffisamment d'items qui les mettent en jeu, elle revêt peu d'intérêt pour des variables telles que la taille des nombres qui interviennent dans de nombreux items sans forcément influencer la technique de résolution ou la complexité de l'item.

<u>Type de tâches et niveau de convocation des types de tâches :</u> la répartition dans l'échelle des différents types de tâche par OML permet de dresser un état des lieux des connaissances des élèves à un niveau donné ; en revanche, nous ne pouvons pas conclure directement sur les techniques apprises puisque, nous n'avons pas accès aux techniques mises en jeu par les élèves dans la résolution de la tâche[16].

[16] Nous analysons dans ce paragraphe l'échelle des scores ; les données qui sont en notre possession sont uniquement l'indice de difficulté de l'item et les scores des élèves. Nous verrons par la suite qu'il est possible d'avoir accès aux techniques apprises à condition de faire un travail spécifique sur les réponses des élèves.

Par ailleurs, le niveau de convocation d'un même type de tâche peut varier selon les items : il peut alors être intéressant d'étudier si ce niveau de hiérarchie est respecté dans l'échelle des scores, c'est-à-dire si les items qui convoquent des types de tâches à un niveau r-convoqué appartiennent à des groupes de plus haut niveaux que ceux qui convoquent ce même type de tâche à un niveau t-convoqué. Plus largement, il s'agit de confronter la hiérarchie dans les niveaux d'intervention des praxéologies définis *a priori* avec la difficulté calculée statistiquement *a posteriori* et d'étudier s'il y a d'éventuelles discordances.

Difficulté et complexité : si nous avons pu montrer l'intérêt d'une étude à partir des facteurs de complexité pour étudier la variété des tâches de l'évaluation selon ce critère, il peut aussi se révéler pertinent d'observer comment les items se répartissent dans l'échelle de score selon leur complexité et leurs niveaux de compétence. En effet, on peut constater un basculement d'un niveau de compétence à un autre selon les groupes de l'échelle (par exemple, les élèves des groupes 3 maitrisent des items de niveau de compétences 2, alors que ceux du groupe 4 commencent à maitriser des items de niveau de compétences 3). Le caractère englobant des niveaux de complexité permet de pointer un tel basculement, mais c'est en s'appuyant sur l'analyse *a priori* des tâches que l'on pourra éventuellement déterminer l'élément sur lequel se joue ce basculement.

IV.2.3 Analyse complémentaire avec exploitation secondaire des données

Nous avons montré, lors de la description de la méthodologie d'analyse, l'intérêt qu'il y aurait à avoir accès aux techniques ou aux éléments technologico-théoriques mis en œuvre par les élèves pour produire leur réponse, à condition que la tâche soit pertinente par rapport aux objectifs visés. Quelle que soit la façon dont on y accède, que ce soit en les inférant à partir des distracteurs de QCM (avec toutes les précautions et réserves que cela suppose) ou à partir d'un recodage des productions d'élèves, pouvoir observer pour un même type de tâche la répartition des différentes techniques dans l'échelle des scores apporte un complément quant à la caractérisation des OM apprises. Une telle analyse est réalisable à condition de recoder les productions d'élèves selon les techniques définies à partir de l'OM de référence et de repositionner l'item dans l'échelle des scores : un nouveau score est alors attribué à l'item selon la technique employée pour le résoudre, grâce à l'application du MRI. Il devient alors possible d'étudier, dans l'échelle des scores, une certaine progressivité des éléments technologico-théoriques selon les différents groupes. De telles analyses relèvent davantage d'une exploitation secondaire des données que de l'interprétation des résultats, mais montrent, encore une fois, comment didactique et psychométrie peuvent s'enrichir l'une et l'autre.

Un recodage selon les techniques et éléments technologico-théoriques peut aussi conduire localement à déceler des techniques inattendues au niveau scolaire où l'on se place ou incorrectes (dues à des technologies incomplètes, ou encore des conceptions erronées). Ce travail de recodage peut alors s'appuyer sur les indicateurs pris pour évaluer les technologies impliquées dans chacune des dimensions dans la définition du modèle (chapitre 6) et peut être mené aussi bien sur les QCM (à condition que les distracteurs soient correctement choisis) que sur des questions ouvertes. Une telle analyse peut être particulièrement intéressante pour les items présentant des caractéristiques statistiques non attendues (R_{bis} non satisfaisant ou présentant un décalage complexité - difficulté) et peut venir questionner les technologies apprises au regard de praxéologies absentes ou de technologies évanescentes dans les OM à enseigner et dans celles enseignées. Il est dès lors possible, après recodage, d'étudier localement une hiérarchie de techniques apprises et de l'interpréter au regard des éléments technologiques en jeu dans les techniques. Ce procédé rejoint celui qui sera adopté dans la définition du modèle multidimensionnel d'analyse, mais ne se situe que localement (sur un item) et non sur la recherche de cohérences de fonctionnement.

Repérer ainsi des décalages entre la difficulté calculée d'un item et sa complexité déterminée *a priori* ou relever des hiérarchies selon des techniques soulève alors des questions didactiques pour interpréter ces observations : quelles sont les causes de ces décalages ? Sont-ils dus à des obstacles épistémologiques liés au savoir en jeu ? Sont-ils dus aux praxéologies à enseigner ou enseignées ? La hiérarchie des techniques peut-elle être interprétée par rapport aux éléments technologico-théoriques qui les sous-tendent ? Que peut-on en déduire quant aux praxéologies à enseigner ou enseignées ?

Nous reviendrons sur ces questions lorsque nous procéderons à l'analyse de l'évaluation CEDRE dans le chapitre suivant en opérationnalisant la méthodologie d'analyse ; nous la synthétisons pour la rendre plus fonctionnelle sous la forme d'un organigramme dans la partie suivante.

V MÉTHODOLOGIE D'ANALYSE

Nous avons défini deux étapes pour étudier le contenu d'une évaluation et interpréter les résultats produits :

- la première pouvant se situer en amont de la passation du test : elle permet d'apporter des preuves didactiques de la validité de contenu. L'analyse *a priori* des tâches joue un rôle central dans cette étape et est exploitée de deux façons :

  - avec un point de vue épistémo-didactique : il s'agit principalement de contrôler que chaque item est cohérent avec l'objectif d'évaluation qui lui est assigné (localement) non seulement par son énoncé, mais aussi par le codage de sa réponse et de s'assurer ensuite que globalement, l'ensemble des items retenus soit représentatif du domaine évalué et le recouvre ;

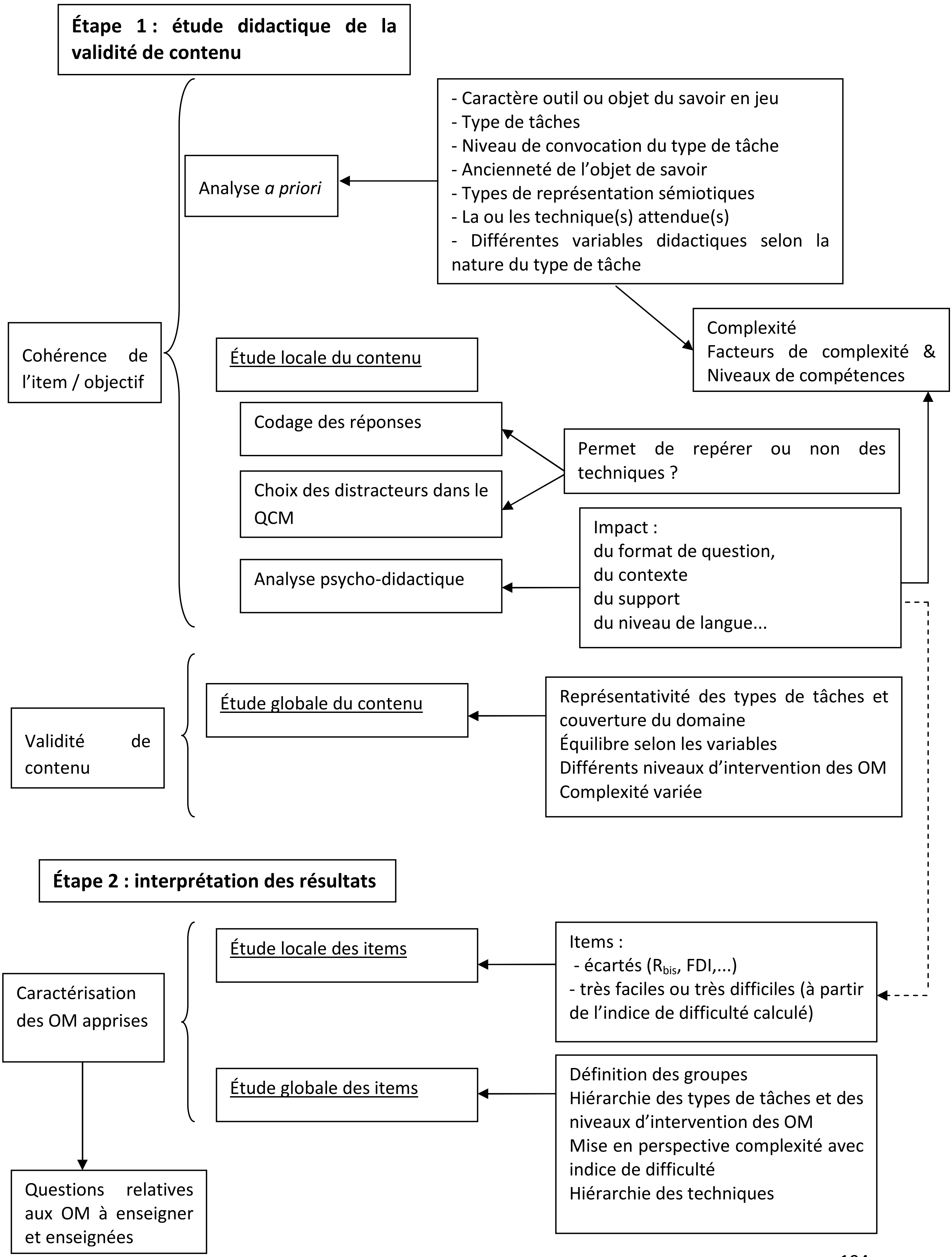
  - une facette psycho-didactique : les processus de réponse mis en jeu par les élèves doivent correspondre à ceux attendus (déterminés par l'analyse *a priori*).

- la seconde se situe après la passation : elle porte principalement sur des items présentant des caractéristiques spécifiques et sur l'interprétation des indices de difficulté, de discrimination, et de l'échelle des scores.

Dans les deux étapes, une observation spécifique de productions d'élèves peut être réalisée que ce soit pour analyser la validité psycho-didactique d'un item ou pour avoir accès aux techniques mises en jeu par les élèves : il s'agit alors d'un processus d'exploitation secondaire des données qui permet de préciser certains des résultats obtenus.

Enfin, l'analyse des items écartés mais aussi les scores de réussite obtenu et une analyse complémentaire de productions d'élèves permettront de renseigner les praxéologies apprises, mais aussi d'interroger les praxéologies enseignées au regard de celles à enseigner et de référence.

L'organigramme page suivante récapitule les différentes étapes de cette méthodologie et fait apparaître les éléments didactiques et psychométriques sur lesquelles elle s'appuie.


Étape 1 : étude didactique de la validité de contenu
Cohérence de l'item / objectif
Analyse *a priori*
- Caractère outil ou objet du savoir en jeu
- Type de tâches
- Niveau de convocation du type de tâche
- Ancienneté de l'objet de savoir
- Types de représentation sémiotiques
- La ou les technique(s) attendue(s)
- Différentes variables didactiques selon la nature du type de tâche
Complexité
Facteurs de complexité & Niveaux de compétences
Étude locale du contenu
Codage des réponses
Choix des distracteurs dans le QCM
Permet de repérer ou non des techniques ?
Analyse psycho-didactique
Impact :
du format de question,
du contexte
du support
du niveau de langue...
Validité de contenu
Étude globale du contenu
Représentativité des types de tâches et couverture du domaine
Équilibre selon les variables
Différents niveaux d'intervention des OM
Complexité variée
Étape 2 : interprétation des résultats
Caractérisation des OM apprises
Étude locale des items
Items :
- écartés (R_{bis}, FDI,...)
- très faciles ou très difficiles (à partir de l'indice de difficulté calculé)
Étude globale des items
Définition des groupes
Hiérarchie des types de tâches et des niveaux d'intervention des OM
Mise en perspective complexité avec indice de difficulté
Hiérarchie des techniques
Questions relatives aux OM à enseigner et enseignées

CHAPITRE 5

ANALYSE DE L'ÉVALUATION CEDRE

La méthodologie d'analyse que nous avons développée dans le chapitre précédent est appliquée ici aux évaluations CEDRE 2008 et 2014 sur le domaine de la numération et de l'arithmétique des nombres entiers, pour étudier la validité de contenu de ces évaluations et interpréter les résultats obtenus. Nous consacrons une première partie à la place attribuée au domaine d'étude relativement à la globalité de l'évaluation, puis nous étudions, par la suite, sa validité en suivant les étapes décrites dans la méthodologie :

- une étude locale de la validité didactique reposant sur une analyse *a priori* de chacune des tâches selon une approche épistémologique et psycho-didactique ;
- une analyse de la validité de contenu de façon globale ;
- un retour sur les items écartés de l'évaluation parce que statistiquement non valides ;
- un travail sur l'interprétation des résultats à partir de l'échelle des scores afin de caractériser les praxéologies apprises, mais aussi d'étudier la validité des résultats produits au regard du contenu de l'évaluation ;
- une exploitation secondaire de données pour préciser certains des résultats obtenus et les interroger au regard des programmes et des pratiques.

D'un point de vue méthodologique, nous avons travaillé à partir de fichiers fournis par la DEPP desquels nous avons extrait les données dont nous avions besoin sur notre domaine d'étude ; les items utilisés à titre d'exemples sont pour la plupart issus des évaluations CEDRE 2008 ou 2014, dans le cadre d'une convention avec la DEPP réalisée au sein du projet ANR NéoPraéval. La majorité des items des évaluations CEDRE n'étant pas libérés, il n'est pas possible d'illustrer systématiquement notre propos avec un item issu de l'évaluation ; dans certains cas, nous proposons donc, en le précisant, des items similaires à ceux présents dans l'évaluation.

I DESCRIPTION ET ÉVOLUTION DU CONTENU DE CEDRE 2008 ET 2014

Les items relevant du domaine de la numération et de l'arithmétique des nombres entiers sont issus de trois champs définis par le cadre[1] de l'évaluation : la connaissance des nombres entiers naturels (portant principalement sur la numération), le calcul et l'exploitation de données numériques incluant, en 2008, la résolution de problèmes. Les items relevant de la résolution de problèmes ont été intégrés en 2014 dans le champ du calcul. Nous retenons pour la description globale du contenu uniquement les items exploités pour l'échelle de scores et nous reviendrons, dans un paragraphe spécifique, sur ceux écartés car considérés comme non pertinents d'un point de vue statistique.

Les supports utilisés pour l'évaluation 2014 sont différents de ceux de 2008, ce qui influe sur la configuration de l'évaluation globale et sur son contenu : tout d'abord, des items de l'évaluation « 1987-2007 »[2] ont été intégrés dans l'évaluation 2014 sous la forme de deux blocs ne contenant que des calculs et de la résolution de problèmes arithmétiques.

Ensuite, une partie de l'évaluation 2014 contenant, entre autres, les items de calcul mental a été réalisée sur support numérique alors qu'en 2008, la partie relative au calcul mental l'avait été à partir d'un CD audio et sur papier : ce qui change non seulement les modalités de passation, mais aussi les types de représentation sémiotique en jeu (numération parlée en 2008 et écriture chiffrée des nombres en 2014) et les modes de réponse (papier-crayon en 2008 et sur support numérique en 2014). Au moment où nous rédigeons la thèse, nous n'avons pas en notre possession l'ensemble des résultats des items passés sur support numérique, mis à part ceux relatifs au calcul mental (automatisé et réfléchi) ; comme l'échelle des scores en 2014 ne prend pas en compte les items passés sur ce support, nous avons choisi de les considérer dans l'étude globale de façon séparée. Nous présentons donc, dans ce paragraphe, le poids du domaine étudié relativement à l'ensemble des items[3] de l'évaluation.

La répartition globale des items entre 2008 et 2014 (Tableau 1) montre d'abord une baisse importante du nombre d'items entre les deux évaluations (environ 140 en moins), mais aussi une évolution dans leur répartition : la passation d'une partie des items de 2014 sur support informatique et le changement de qualification des items de résolution de problèmes (inclus dans le domaine « exploitation de données numériques » en 2008 puis « calcul » en 2014) expliquent l'augmentation du nombre d'items de calcul en 2014 et la baisse en exploitation de données numériques.

[1] Nous n'exploitons pas les compétences telles qu'elles sont définies par le bilan CEDRE (traiter, identifier, produire, etc.) dans notre travail, même si elles caractérisent, pour les concepteurs de l'évaluation, chacun des items ; nous avons montré dans le premier chapitre que ces compétences ne correspondaient pas à des critères didactiques ou à une hiérarchie de complexité cognitive et par conséquent il n'est pas pertinent de les exploiter dans l'analyse.

[2] Évaluation décrite dans le chapitre 1 et permettant de repérer l'évolution dans le temps des connaissances des élèves sur la lecture, l'écriture et le calcul en fin d'école.

[3] Le terme d'item en psychométrie correspond à une prise d'information, c'est-à-dire au codage d'une réponse. Par exemple, dans une suite de trois questions sous la forme de vrai-faux successifs, chacune des questions correspond à un code (vrai ou faux) et donc à un item. Or, dans le cas de tels exercices, les trois réponses des élèves sont regroupées et renvoient une seule information : réussi ou échoué selon le seuil de bonnes réponses attendu, par exemple, deux réponses sur trois. Nous qualifions donc dans ce chapitre d' « item » l'objet pris en compte pour le calcul des scores : il peut s'agir d'une seule question (dans le cas de question ouverte ou de QCM) ou du regroupement de plusieurs questions (une succession de vrai-faux par exemple, est considérée comme un seul item).

	Exploitation de données numériques	Connaissances des nombres entiers naturels	Fractions et nombres décimaux	Calcul	Espace et géométrie	Grandeurs et mesures	Total
2008	61 16 %	64 16 %	48 12 %	128 34 %	47 12 %	37 10 %	385 100 %
2014 (papier)	18 7 %	39 16 %	33 13 %	110 44 %	15 6 %	33 13 %	248 99 %[4]
2014 (numérique)	20 items de calcul mental (incluant du calcul automatisé et du calcul réfléchi) 38 autres items						

Tableau 1 - Répartition des items de CEDRE en 2008 et en 2014 (nombre d'items et répartition en pourcentage)

La répartition en pourcentage des items reste sensiblement identique pour les domaines *grandeurs & mesures* et *fractions & décimaux*, mais diminue de moitié pour *espace & géométrie*, passant de 12 % à 6 % des items.

Notre domaine d'étude (numération décimale et arithmétique des entiers) représente une part importante du contenu de l'évaluation puisqu'il est représenté par 180 items en 2008 (soit 47 % des items de l'évaluation) et 99 items en 2014 (soit 40 % des items). Si les savoirs relatifs aux nombres entiers (numération - calcul - résolution de problèmes) représentent un enjeu important en termes d'apprentissage à l'école primaire, la part qui leur est accordée dans l'évaluation est néanmoins très importante, notamment au regard des autres domaines (nombres décimaux et fractionnaires, grandeurs et mesures et géométrie). Nous n'approfondissons pas la question de cette répartition dans le cadre de la thèse, mais nous soulignons tout de même qu'elle n'est ni anodine, ni sans incidence sur les résultats. Non seulement elle pose la question de la validité de l'évaluation dans son ensemble et pas uniquement sur un domaine (les programmes de mathématiques accordant une importante place à la résolution de problèmes que nous ne retrouvons pas dans l'évaluation), mais de plus, en ciblant autant les apprentissages sur les entiers, on peut se demander si les résultats globaux de l'évaluation seraient identiques si une répartition renforçant le poids des autres domaines était proposée. Il est difficile de déterminer les raisons des choix opérés et dans quelle mesure ils relèvent d'une négociation institutionnelle, mais ils ne sont pas neutres quant aux résultats obtenus.

Pour ce qui relève de notre domaine d'étude, les items du champ « calcul » occupent une place importante : 47 % des items du domaine en 2008 et 61 % en 2014 (Tableau 2).

	Exploitation de données numériques	Connaissances des nombres entiers naturels	Calcul	Total
2008	34 (19 %)	62 (34%)	84 (47 %)	180 (100 %)
2014 (papier)	2 (2 %)	37 (37 %)	60 (61 %)	99 (100 %)
2014 (numérique)	12		20	

Tableau 2 - Répartition des items du domaine selon les champs des évaluations CEDRE 2008 et 2014 (nombre d'items et répartition en pourcentage)

[4] Les pourcentages calculés sont arrondis à des valeurs entières ce qui peut expliquer que leur somme ne soit pas égale à 100 % de façon systématique. Nous le précisons uniquement sur ce tableau et n'y revenons pas par la suite.

Nous observons que le poids accordé à la connaissance des nombres entiers naturels est identique entre les deux évaluations et précisons, à nouveau, qu'en 2008 le champ calcul ne contenait pas la résolution de problèmes alors qu'il l'intègre en 2014 ; ce qui peut expliquer l'évolution de la répartition entre 2008 et 2014 pour les deux champs mathématiques (exploitation de données numériques et calcul). La comparaison du contenu à partir de cette seule répartition est donc difficile à réaliser ; or, pour pouvoir exploiter les résultats de la comparaison temporelle entre 2008 et 2014, une description commune de la répartition des items est nécessaire pour comparer le poids de chacun des domaines dans la répartition. Ce poids n'est pas sans incidence sur les scores obtenus ; par conséquent, l'évolution de la répartition des items peut influencer les comparaisons qui pourraient être menées et interroge la validité de l'interprétation qui en serait faite.

Comme prévu dans la méthodologie d'analyse, nous débutons l'analyse de la validité de contenu par une étude locale des items en menant une analyse *a priori* de chacune des tâches.

II VALIDITÉ DE CONTENU : ÉTUDE LOCALE

II.1 Analyse *a priori*

II.1.1 Éléments descripteurs des tâches

Les praxéologies définies dans le chapitre 3 permettent de mener l'analyse *a priori* des tâches de l'évaluation et de les décrire selon les caractéristiques que nous avons listées dans la méthodologie d'analyse ; nous les reprenons ici et les précisons en vue de notre étude :

- caractère outil ou objet du savoir en jeu : il s'agit de déterminer si le nombre ou les expressions arithmétiques interviennent en tant qu'*outil* ou *objet*. La production d'expressions arithmétiques en résolution de problèmes conduit à les considérer comme outil de résolution et le calcul de ces expressions, comme objet.
- type de tâches convoqué et le nombre de types de tâches convoqués : nous exploitons ici l'étude praxéologique menée dans le chapitre 3. Plusieurs types de tâches peuvent être convoqués, notamment dans la résolution de problèmes, avec différents niveaux de convocation.
- ancienneté de l'objet de savoir : nous nous référons pour cela aux programmes en cours au moment du bilan et aux tableaux de progression par niveau les accompagnant. Nous rappelons que nous considérons un savoir « ancien » comme un savoir ne faisant plus l'objet d'un enjeu d'enseignement au niveau auquel nous nous plaçons (qui a donc été enseigné et institutionnalisé au niveau précédent celui de l'évaluation) ; un savoir en cours fait encore objet d'enjeu d'enseignement.
- types de représentation sémiotique : nous distinguons les différents ostensifs de la numération (chapitre 2, paragraphe II.3.4) et ajoutons la langue naturelle, des schémas, des représentations iconiques (dessin ou photo) et des écritures arithmétiques. Toutes les consignes étant formulées par écrit dans la langue naturelle (sauf pour le calcul mental audio en 2008), nous ne considérons ce type de représentation dans l'analyse *a priori* uniquement lorsque des données (autres que la consigne) sont fournies en langue naturelle (par exemple lors de l'énoncé d'un problème). Nous précisons, en particulier pour les tâches qui demandent une conversion, les types de représentations de départ et ceux d'arrivée et leur éventuelle congruence.
- la (ou les) technique(s) attendue(s) : définies à partir des praxéologies de l'OM à enseigner et en cohérence avec les attentes des programmes.
- niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche : nous reprenons pour ce faire la classification de Castela (2008), présentée dans le chapitre 4 et définissons neuf niveaux à partir du

niveau de convocation de la praxéologie et de l'ancienneté de l'objet de savoir en jeu : 0 = technique ; 1 (t-convoqué sans choix de technique ; objet de savoir ancien) ; 2 (t-convoqué sans choix de technique ; objet de savoir nouveau) ; 3 (t-convoqué avec choix de technique ; objet de savoir ancien) ; 4 (t-convoqué avec choix de technique ; objet de savoir nouveau) ; 5 (r-convoqué sans choix de technique ; objet de savoir ancien) ; 6 (r-convoqué sans choix de technique ; objet de savoir nouveau) ; 7 (r-convoqué avec choix de technique ; objet de savoir ancien) ; 8 (r-convoqué avec choix de technique ; objet de savoir nouveau).

- les différentes variables didactiques : elles sont relatives à la tâche analysée ; nous les récapitulons, selon les praxéologies convoquées par les tâches, de façon synthétique dans le Tableau 3 suivant.

	Variables didactiques retenues
OMR 1	- types de problèmes - le nombre et la taille des nombres en jeu : si les nombres sont petits, une technique de comptage peut se révéler efficace pour traiter la tâche, alors qu'elle n'est pas attendue en fin d'école.
OMR 2	- la taille des nombres en jeu - l'organisation des collections ou la nécessité de faire une conversion (écritures non canoniques)
OMR 3	- le nombre et la taille des nombres en jeu - présence de zéros à une des étapes de calcul ou de retenues - répertoires en jeu (petits ou grands par exemple)

Tableau 3 - Liste des variables didactiques retenues pour l'analyse *a priori* des items

L'analyse de chacun des items prend en compte la tâche, mais aussi les consignes de codage ou les choix de distracteurs afin de déterminer en priorité si l'item est valide ou non au regard des objectifs qui lui ont été assignés dans l'évaluation ; nous étudions aussi localement s'il permet de repérer, à partir d'erreurs anticipées, des techniques non attendues à ce niveau scolaire ou qui sont utilisées en dehors de leur domaine de validité. Nous nous référons alors à la synthèse du chapitre 3 montrant l'évolution des techniques et des technologies sur le domaine mathématique étudié à l'école élémentaire.

II.1.2 Exemples d'analyse d'items

Nous montrons à travers différents exemples la façon dont nous avons réalisé l'analyse *a priori* des tâches de l'évaluation à partir de la liste des critères précédents; nous concluons à la fin de l'analyse si ces items sont ou non pertinents au regard de leur objectif d'évaluation. Pour l'évaluation CEDRE école, l'objectif d'évaluation assigné à chaque item n'a pas été établi lors de la conception des items ; les concepteurs le définissent *a posteriori* et l'exploitent lorsqu'ils caractérisent les connaissances des groupes dans l'échelle des scores.

L'ensemble des éléments intervenant dans l'analyse *a priori* ne contribue pas à justifier de cette pertinence, mais ils sont exploités par la suite dans l'analyse globale du contenu.

Afin de mieux illustrer notre propos, nous avons choisi des exemples de tâches relevant des différents types de tâches décrits dans le chapitre 3 ; nous terminons la liste d'exemples par un item relevant de la résolution de problèmes et convoquant des types de tâches relevant de plusieurs OMR. Les analyses *a priori* des autres tâches sont données sur l'ensemble des items par des tableaux récapitulatifs en Annexe 1.

II.1.2.i Item relevant de la résolution de problèmes (OMR 1)

L'OMR 1 est liée directement à la résolution de problèmes ; nous avons choisi un premier exemple (item 1) où ce n'est pas une réponse sous la forme d'un résultat qui est attendue, mais l'expression arithmétique qui permettrait de le calculer :

Item 1 : Martin a 24 ans. Il a 5 ans de plus que son frère Jacques. Pour calculer l'âge de Jacques, on peut faire :

□ 19 + 5	□ 24 - 5	□ 24 + 5	□ 24 - 19
			Extrait de CEDRE 2008

Analyse *a priori* de l'item 1 :

Caractère *outil* ou *objet* du savoir en jeu :	Objet : l'expression arithmétique produite intervient en tant qu'objet en vue de la résolution du problème.
Type de tâches convoqué et le nombre de types de tâches convoqués	Il s'agit d'une tâche d'association entre un problème additif donné et une expression arithmétique ; elle convoque uniquement $\mathbf{T}_{\mathbf{RP\_ass}}$ puisque le résultat du calcul n'est pas demandé.
Ancienneté de l'objet de savoir	La résolution de problème additif de comparaison avec recherche de l'état initial est un savoir considéré comme ancien en fin d'école, puisque ce type de problème doit être traité dès le cycle 2. Durpaire & Mégard (2010, p. 58)
Types de registres de représentation sémiotique	- de départ : langue naturelle & écriture chiffrée ; - d'arrivée : écriture arithmétique. Non congruence entre les deux registres (« *de plus* » induisant une addition alors que le calcul numérique est une soustraction).
La (ou les) technique(s) attendue(s)	$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_calc}}$ justifiée par $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{RP\_Prod\_ea}}$. Pour reconnaître l'expression arithmétique correcte, l'élève doit choisir le modèle mathématique adéquat conduisant à une écriture arithmétique (modèle soustractif attendu ici).
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche	Le problème étant un problème additif de comparaison avec recherche de l'état initial et puisqu'il faut traduire « de plus » figurant dans l'énoncé par une soustraction, nous considérons que $\mathbf{T}_{\mathbf{RP\_ass}}$ est t-convoqué sans choix de technique sur un objet de savoir ancien. Niveau d'intervention 1 selon le classement de Castela (2008).
Les différentes variables didactiques	- type de problème : problème additif de comparaison avec recherche de l'état initial ; - taille des nombres en jeu : nombres à 1 et 2 chiffres

Pertinence de l'item par rapport à son objectif d'évaluation :

L'item étant sous forme d'un QCM, nous étudions les distracteurs pour déterminer la pertinence de l'item : la présence des deux expressions contenant 19 n'est pas anodine et peut conduire à écarter ces distracteurs parce que 19 n'apparaît pas dans les données du problème ; en ce sens, ils ne sont pas pertinents. Par ailleurs, il est possible de modéliser le problème à l'aide de $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_op\text{-}trou}}$ et d'obtenir des expressions du type : .... + 5 = 24 ou 24 - ... = 5 dans lesquelles 19 est le nombre manquant, et qui peuvent être réécrites sous la forme de l'égalité 24 - 5 = ...

Une fois le nombre 19 trouvé, ces égalités à trous peuvent aussi conduire à des réécritures du type *(19)* + 5 = 24 ou 24 - *(19)* = 5 s'apparentant alors aux propositions 1 et 4 du QCM ; ces propositions étant considérées comme fausses dans le traitement de la question dans l'évaluation CEDRE, alors qu'elles ne le sont pas d'un point de vue mathématique.

Puisqu'il s'agit d'une tâche d'association, la question de la nécessité de produire une expression arithmétique ne se pose pas. Si l'objectif assigné à l'item est de reconnaître l'expression arithmétique permettant de résoudre un problème additif, le choix de deux des distracteurs se révèle peu adapté ; nous concluons alors que cet item est peu cohérent avec l'objectif d'évaluation qui lui est assigné, c'est-à-dire associer une expression arithmétique à un problème additif.

II.1.2.ii Items relevant de la numération (OMR 2)

Nous avons choisi d'analyser trois items relevant de cette OMR, chacun relevant d'un des types de tâches de chacune des OML :

Item de traduction relevant de $\mathbf{T}_{\mathbf{Teun/ec}}$ (OML 2A) : l'item 2 est un des rares items du bilan CEDRE 2014 mettant en jeu des écritures en unités de numération.
Cet item porte sur une traduction d'écriture non canonique :

Item 2 : le nombre composé de 5 unités, 12 dizaines et 1 centaine s'écrit :
□ 125 □ 225 □ 1 125 □ 1 215
Extrait de CEDRE 2014

Analyse *a priori* de l'item 2 :

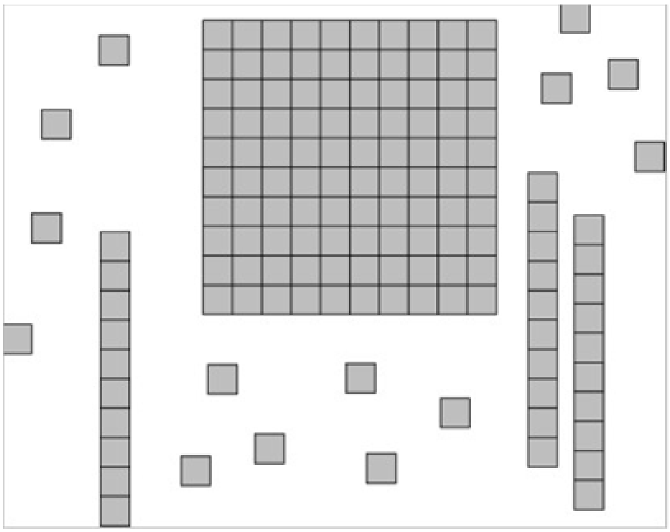
Caractère outil ou objet du savoir en jeu :	Objet
Type de tâches convoqué et le nombre de types de tâches convoqués	$\mathbf{T}_{\mathbf{Teun/ec}}$
Ancienneté de l'objet de savoir	Objet de savoir ancien : fin de cycle 1, début de cycle 2.
Types de registres de représentation sémiotique	- de départ : EUN - d'arrivée : EC
La (ou les) technique(s) attendue(s)	$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{juxt}}$: l'EUN n'étant pas canonique, la technique $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{pos}}$ ne peut être employée.
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche	De tels types de tâches ne sont pas proposés régulièrement à l'école ; cette tâche ne peut donc pas être considérée comme relevant d'un niveau technique. Elle demande, par ailleurs, la mise en œuvre de $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{juxt}}$ pour la conversion de 12 dizaines en 1 centaine et 2 dizaines : $\mathbf{T}_{\mathbf{Teun/ec}}$ est t-convoqué sans choix de technique sur un objet de savoir ancien. Niveau d'intervention 1
Les différentes variables didactiques	Nombre à 3 chiffres Écriture non réduite, non canonique.

Pertinence de l'item par rapport à son objectif d'évaluation :

La technique permettant de résoudre cet item est $\boldsymbol{\tau}_{juxt}$ qui est une généralisation de $\boldsymbol{\tau}_{pos}$. L'utilisation de $\boldsymbol{\tau}_{pos}$ sur cet item conduit directement à la réponse 3 et éventuellement à la 1 ; la réponse 4 correspondant à une méconnaissance de $\boldsymbol{\Theta}_p$. 1 125 et 1 215 correspondent à la concaténation des chiffres présents dans les données de l'énoncé ; 125 correspond au nombre formé en considérant qu'il n'y a que 2 dizaines et non 12. Les différents distracteurs permettent donc de repérer l'usage de la technique $\boldsymbol{\tau}_{pos}$ en dehors de son domaine de validité. Nous concluons que cet item est cohérent avec l'objectif d'évaluation qui lui est assigné.

Item de dénombrement de collection relevant de $\mathbf{T}_{Dc}$ (OML 2B) :

Item 3 : Une barre contient dix petits carrés. Une plaque contient cent petits carrés.



Sur le dessin ci-dessus, il y a _ _ _ petits carrés.

Extrait de CEDRE 2014

Nous notons que le « peigne » choisi pour la réponse indique implicitement le nombre de chiffres qui composent l'EC du résultat, ce qui n'est pas sans incidence sur les réponses fournies par les élèves, mais ne remet pas en cause la pertinence de cet item et son adéquation à l'objectif d'évaluation qui lui est assigné, à savoir donner le cardinal d'une collection, mais surtout en regroupant dix unités en une dizaine.

Analyse *a priori* de l'item 3 :

Caractère outil ou objet du savoir en jeu :	Objet
Type de tâches convoqué et le nombre de types de tâches convoqués	Tâche de dénombrement de collection relevant de $\mathbf{T_{Dc}}$
Ancienneté de l'objet de savoir	Objet de savoir ancien : fin de cycle 1, début de cycle 2.
Types de registres de représentation sémiotique	- de départ : NP et EMN - d'arrivée : EC
La (ou les) technique(s) attendue(s)	$\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}calc}}$ consiste à calculer : 1 × 100 + 3 × 10 + 14 × 1 = 100 + 30 + 14 = 144 $\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}ec}}$ demande de réaliser un groupement de 10 unités pour ensuite coder le cardinal de la collection avec une écriture chiffrée (en passant éventuellement par une écriture en EUN ou en EAPD ou EPD). Les deux techniques suivantes passent par la numération parlée, une fois que les groupements maximaux sont réalisés : elles nécessitent ensuite la convocation du type de tâche de traduction $\mathbf{T_{Tnp/ec}}$ pour produire l'écriture chiffrée du nombre. $\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}np\text{-}mult}}$ consiste à compter « *cent* », « *un, deux, trois, quatre* » dizaines, « *un, deux, trois, quatre* » unités : *« cent-quarante-quatre »* ; $\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}np\text{-}add}}$ consiste à compter « *cent », « cent-dix, cent-vingt », « cent-trente », « cent-quarante », « cent-quarante-et-un », « cent-quarante-deux », cent-quarante-trois », « cent-quarante-quatre ».*
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche	t-convoqué avec choix de technique avec un objet ancien Niveau d'intervention 3 selon le classement de Castela (2008).
Les différentes variables didactiques	Nombre à 3 chiffres Collection non organisée de façon maximale.

Pertinence de l'item par rapport à son objectif d'évaluation :

Comme pour toutes les questions ouvertes, la réponse est considérée comme correcte si le résultat est juste et fausse sinon. Dans le cas de cet item, il est difficile de déterminer la technique employée par l'élève ; un recodage des productions ne permettrait pas, non plus, de discerner la technique employée, puisqu'il n'est pas nécessaire d'écrire des calculs (qui interviendraient potentiellement dans $\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}calc}}$), les raisonnements pouvant s'effectuer mentalement (aussi bien avec la numération parlée qu'avec les écritures chiffrées). La technique de comptage $\boldsymbol{\tau_{Compt}}$, unité par unité n'est pas attendue à ce niveau scolaire et se révèle peu efficace.

Suite de nombres à compléter relevant de $\mathbf{T}_{AR}$ (OML 2C) :

Item 4 : Complète par le nombre qui convient : 228 - 218 - 208 - ...... *Extrait de CEDRE 2008*

Analyse *a priori* de l'item 4 :

Caractère outil ou objet du savoir en jeu :	Objet
Type de tâches convoqué et nombre de types de tâches convoqués	$\mathbf{T}_{AR}$
Ancienneté de l'objet de savoir	Les nombres sont de l'ordre de la centaine, les objets de savoirs en jeu sont enseignés en fin de cycle 2 (CE1).
Types de registres de représentation sémiotique	EC
La (ou les) technique(s) attendue(s)	τ_{juxt} : il est nécessaire de déterminer la raison de la suite, puis de soustraire 10 à 208, c'est-à-dire d'enlever une dizaine à 20 dizaines et d'obtenir 198.
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche	t-convoqué sans choix de technique avec un objet de savoir ancien (nous estimons qu'il ne s'agit pas d'un niveau technique puisque la raison de la suite est à déterminer par l'élève). Niveau d'intervention 1 selon le classement de Castela (2008).
Les différentes variables didactiques	- nombres à 3 chiffres ; - passage à une unité de rang supérieur pour déterminer le terme manquant.

Pertinence de l'item par rapport à son objectif d'évaluation :

Les conclusions relatives au codage de cet item sont similaires à celles de l'item 3 et l'item est considéré comme adapté à l'objectif d'évaluation qui lui est assigné.

Par conséquent, ces trois items se révèlent pertinents au vu de leurs objectifs d'évaluation ; nous notons aussi le fait que dans les trois, la technique de position et la connaissance du principe de position $\mathbf{\Theta}_P$ ne suffisent pas pour répondre correctement ; en effet, le principe décimal apparaît comme sous-jacent à travers les trois techniques qui sont adaptées pour répondre au problème posé. Nous observons aussi que ces trois items mettent en jeu des objets de savoirs anciens, enseignés au cycle 2 ; par conséquent, ils ne sont pas représentatifs des savoirs enseignés au cycle 3.

D'un point de vue global, il est complémentaire d'avoir des tâches ne relevant que de la technologie $\mathbf{\Theta}_P$ et pouvant être résolues avec τ_{pos} ou avec $\mathbf{T}_{AR}$ sans forcément qu'il y ait un passage à une unité de rang supérieur ou inférieur ou encore des tâches de dénombrement avec des collections qui sont totalement organisées pour étudier comment ces items se répartissent dans l'échelle des scores selon les techniques et les éléments technologiques sous-jacents. De la même façon, il est nécessaire d'avoir des items portant sur des objets de savoir d'enseignement ancien ou nouveau. L'analyse *a priori* que nous menons localement permet d'établir l'adéquation ou non entre l'item et son objectif d'évaluation, et nous illustrerons la nécessité d'exploiter cette analyse d'un point de vue global, pour étudier la représentativité des tâches sélectionnées sur le domaine en entier (paragraphe III).

II.1.2.iii Items de calcul (OMR 3)

Nous analysons deux items classiques, mais néanmoins emblématiques, des tâches de calcul posé (item 5) et réfléchi (item 6).

Item 5 : effectuer 759 × 109 *Extrait de CEDRE 2014*	Item 6 : donner le résultat de : 540 + 905 *Extrait de CEDRE 2014 - support numérique*

Analyse *a priori* des items 5 et 6 :

	Item 5	Item 6
Caractère outil ou objet du savoir en jeu	Objet	
Type de tâches convoqué et nombre de types de tâches convoqués	$\mathbf{T_{CP\_\times}}$	$\mathbf{T_{CR\_+}}$
Ancienneté de l'objet de savoir	Savoirs anciens : l'apprentissage de $\boldsymbol{\tau_{CP\_\times}}$ comme celui des techniques de calcul additif réfléchi sur des nombres à trois chiffres débute en CE2	
Types de registres de représentation sémiotique	Opération posée & écritures chiffrées	Expression arithmétique & écritures chiffrées
Techniques attendues	$\boldsymbol{\tau_{CP\_\times}}$	$\boldsymbol{\tau_{CR\_+\_posé}}$ - non attendu $\boldsymbol{\tau_{CR\_+\_dec\_eapdc}}$: 540 + 905 = 500 + 900 + 40 + 5 = 1400+ 40 + 5 = 1445
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche	niveau technique	t-convoqué avec choix de technique avec objet ancien. Niveau d'intervention 1
Variables didactiques selon la nature du type de tâche	Nombres à 3 chiffres Répertoires multiplicatifs complexes Avec présence de zéros	Nombres à 3 chiffres & 3 chiffres Répertoires additifs complexes Sans retenue

Dans les deux cas, la réponse est considérée comme juste si le résultat est correct. Aucun calcul intermédiaire en ligne n'est attendu pour justifier la réponse à l'item 6.

Pertinence de l'item par rapport à son objectif d'évaluation :

L'item 5, en faisant intervenir un multiplicateur avec un nombre dont l'EC contient un zéro, permet d'évaluer la maitrise de $\boldsymbol{\tau_{CP\_x}}$; il serait possible d'évaluer l'éventuelle simplification des écritures en codant différemment les productions qui contiennent des lignes de zéros de celles qui n'en contiennent pas. En revanche, comme le codage ne porte que sur la qualité de la réponse, il ne permet pas de discerner les erreurs dues à une méconnaissance de la technique de calcul $\boldsymbol{\tau_{CP\_x}}$ de celles liées à la maitrise des répertoires multiplicatifs. L'objectif assigné à l'item ne portant pas uniquement sur la maitrise de la technique, mais plus globalement sur l'effectuation d'une multiplication posée, l'item 5 est alors pertinent par rapport à cet objectif.

L'item 6 vise quant à lui à évaluer la capacité des élèves à calculer de façon réfléchie une somme de deux termes. $\tau_{CR\_+\_posé}$ consistant à effectuer mentalement la technique de calcul posé de l'addition peut se révéler efficace puisqu'aucune retenue n'intervient dans le calcul, mais ce n'est pas une technique attendue puisqu'elle ne relève pas spécifiquement du calcul réfléchi. La technique adaptée selon les nombres en jeu dans ce calcul ($\tau_{CR\_+\_dec\_eapdc}$) repose sur des décompositions canoniques et ne mobilise pas de décomposition arithmétique. Par contre, $\tau_{CR\_+\_excès}$ menant à un calcul du type : 540 + 905 = 540 + 910 - 5 = 1 450 - 5 = 1445 n'est pas vraiment adaptée.

Cet item se révèle pertinent par rapport à l'objectif qui lui est assigné ; nous soulignons néanmoins (comme pour les items de numération) qu'il serait intéressant d'avoir d'autres items de calcul réfléchi de sommes, pour lesquels $\tau_{CR\_+\_posé}$ ne se révèle pas efficace et $\tau_{CR\_+\_excès}$ adaptée. Une telle variété dans les items permettrait alors d'étudier une certaine progressivité selon les techniques dans l'échelle des scores.

II.1.2.iv Item convoquant des types de tâches relevant de plusieurs OMR

Classiquement, les items de résolution de problèmes convoquent un ou plusieurs types de tâches relevant de l'OMR 1 (produire une expression) et de l'OMR 3 (calculer) puisqu'il est généralement demandé une réponse sous forme numérique (et pas uniquement une expression arithmétique comme pour l'item 1). Nous avons choisi de montrer ici l'analyse *a priori* du problème des wagons (item 7) que nous ré-exploiterons dans la suite de la thèse.

Item 7 : « On veut transporter 185 voitures par le train. On charge 9 voitures par wagon. Combien faut-il de wagons pour transporter toutes ces voitures ? » *Extrait de CEDRE 2014*

Analyse *a priori* de l'item 7 :

Caractère outil ou objet du savoir en jeu :	L'arithmétique apparaît ici comme un outil pour modéliser le problème et par la suite comme objet dans l'effectuation du calcul et la production d'un résultat.
Type de tâches convoqué et le nombre de types de tâches convoqués	Types de tâches convoqués : $\mathbf{T}_{RP\_+}$ pour choisir un modèle et produire une expression arithmétique permettant la résolution du problème. $\mathbf{T}_{CP\_:}$ ou $\mathbf{T}_{CR\_:}$ pour effectuer le calcul ; ce dernier pouvant être posé, mais aussi réalisé mentalement de façon réfléchie
Ancienneté de l'objet de savoir	La résolution de problèmes de division-quotition avec un dividende à un chiffre apparaît en même temps que l'enseignement de la technique opératoire de la division posée ; les problèmes de groupements ou de partage motivant l'introduction de la division sont proposés dès le CE1. D'après les tableaux de progression, la technique de la division posée est enseignée, avec un diviseur à un chiffre, dès le CE2. Par conséquent, il s'agit d'objets de savoir ancien.

Types de registres de représentation sémiotique	Le problème est formulé en langue naturelle et une première conversion amène à le formuler soit dans le registre des écritures arithmétiques, des schémas ou de dessin ; le résultat doit être produit sous la forme d'une écriture chiffrée.
La (ou les) technique(s) attendue(s)	En plus de la technique τ_{RP_calc} menant à la production d'une écriture correspondant à une division euclidienne, la technique $\tau_{RP\_op\_trou}$ peut elle aussi être attendue. D'autres techniques sont possibles : $\tau_{RP\_:\_mult}$ relevant de modèle multiplicatif, envisageable en fin d'école $\tau_{RP\_:\_sous.}$ relevant de modèle soustractif ou additif, non attendue en fin d'école La technique de calcul attendue est une technique de calcul posé $\tau_{CP\_:\_eun}$ ou $\tau_{CP\_:\_u}$, même s'il est possible de calculer facilement le quotient et le reste de façon réfléchie.
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche	- $T_{RP\_\times}$ est t-convoqué avec choix de technique sur des objets de savoirs anciens : nous estimons qu'il s'agit ici de problèmes de groupements classiques pour lesquels l'élève n'a pas à sa charge de déterminer la praxéologie qui serait à convoquer et que par conséquent $T_{RP\_\times}$ est convoquée par la tâche et non par l'élève. Comme nous l'avons étudié dans le chapitre 3, différentes techniques permettent d'aboutir à la production d'une expression modélisant le problème ce qui explique le niveau d'intervention choisi. - $T_{CP\_:}$ ou $T_{CR\_:}$ sont t-convoqués avec choix de technique, aussi bien pour $T_{CP\_:}$ que pour $T_{CR\_:}$: le quotient et le reste peuvent être déterminés mentalement selon différentes techniques et comme les modèles rattachés à $T_{RP\_\times}$ peuvent conduire à des écritures différentes (multiplications, soustractions ou additions successives), les techniques de calcul peuvent être aussi différentes.
Les différentes variables didactiques	- le type de problème : problème de groupement avec recherche du nombre de parts nécessitant une interprétation (q+1). C'est par le biais de cette variable que nous prenons en compte le fait que l'opération ne conduit pas directement à la réponse du problème. - le nombre et la taille des nombres en jeu : 2 nombres dont un à 3 chiffres pour le dividende et à un chiffre pour le diviseur - le calcul peut être traité mentalement par des techniques relevant de l'école primaire ; le calcul posé n'est pas nécessaire. - présence de zéros à une des étapes de calcul de la division posée.

- codage de la réponse : la réponse attendue est 21 ; nous avons montré dans le chapitre 4 l'impact d'un codage ne prenant en compte que la bonne réponse sur le score de réussite et avons soulevé plus globalement la question du codage de la résolution de problèmes dans CEDRE lorsque la question est sous forme ouverte. Nous montrerons dans le chapitre 6 des extraits de réponses d'élèves à ce problème, pour décrire les différentes technologies impliquées dans la résolution du problème. Un recodage des réponses permettrait donc de distinguer les réponses produites grâce à des techniques et des technologies attendues de celles reposant sur des techniques et des technologies relevant d'un niveau scolaire inférieur. Nous soulignons à nouveau la limite d'un codage sous la forme réussite-échec, mais considérons cet item comme pertinent pour évaluer la résolution de problèmes de division-quotition.

Analyse d'items de résolution de problèmes : l'analyse *a priori* menée sur cet item nous amène à donner quelques éléments méthodologiques supplémentaires adoptés pour analyser, entre autres, les items de résolution de problèmes :

- nous ne considérons, comme type de registres de représentation d'arrivée, uniquement celui de l'écriture chiffrée, puisque la phrase accompagnant le nombre obtenu n'est pas demandée explicitement. Dans la résolution de problèmes, en plus des types de représentation de départ et d'arrivée, des représentations intermédiaires peuvent intervenir comme par exemple des écritures arithmétiques, des schémas, des dessins, etc.

- nous précisons aussi que nous n'avons pas fait apparaître des types de tâches d'association, dues à la spécificité du format QCM, sauf pour l'OMR 1 ; pour les types de tâches de conversion de registre (traduction) de l'OMR 2, nous n'avons pas fait cette distinction. Elle se retrouve néanmoins facilement en croisant le type de tâche avec le format de l'item.

II.2 Analyse épistémo-didactique locale

L'analyse *a priori* de chacune des tâches est réalisée avec les mêmes éléments que ceux décrits dans les paragraphes précédents ; en vue du traitement global et pour des raisons de présentation et de lecture de résultats, nous avons regroupé en Annexe 1 les éléments d'analyse de chacun des items de l'évaluation en les regroupant selon les trois OMR. Le premier type de tâche convoqué pour la résolution de la tâche caractérise l'OMR à laquelle l'item est rattaché ; par exemple, même si des types de tâches de calcul sont convoqués dans la résolution de problèmes, nous avons considéré ces items comme relevant de l'OMR 1.

Les tableaux de synthèse figurant en Annexe 1 permettent par la suite d'étudier la pertinence de chacun des items par rapport à l'objectif d'évaluation qui lui est assigné ainsi que leur représentativité par rapport au type de tâche qu'il représente et au niveau scolaire où nous nous plaçons. Nous y revenons à la fin de cette partie et présentons d'abord quelques items spécifiques tant par les types de tâches qu'ils convoquent que par les questions de pertinence qu'ils soulèvent.

II.2.1 Des items évaluant des savoirs déclaratifs

Lors de l'analyse des praxéologies nous n'avons pas fait apparaître de type de tâche spécifique autour des savoirs déclaratifs ; de tels types de tâches figurent dans l'évaluation CEDRE sous deux formes :

- une question portant directement sur la connaissance du vocabulaire (item 8):

Item 8 : Un produit est le résultat d'une :

□ addition □ soustraction □ multiplication □ division

Extrait de CEDRE 2008

- une question portant indirectement sur le vocabulaire (item 9), mais visant néanmoins à l'évaluation de sa connaissance :

Item 9 : Quel est le double de 60 ?

□ 12 □ 30 □ 120 □ 600

Extrait de CEDRE 2008

L'item 8 évalue uniquement la maitrise d'un savoir déclaratif relatif à la signification du terme « produit ». Les tâches similaires figurant dans l'évaluation CEDRE évaluent toujours des savoirs relatifs au vocabulaire des opérations ; par conséquent, nous les faisons apparaître dans l'OMR 3, sous la dénomination « savoirs déclaratifs », une catégorie spécifique en dehors des OML 3A et OML 3B. Les objectifs d'évaluation assignés à de tels items sont définis en termes de « connaissance du vocabulaire relatif aux opérations » et en ce sens, ces items sont pertinents.

L'item 9 diffère de l'item 8 puisqu'il évalue à la fois la connaissance du terme « double » et la capacité calculer mentalement le double d'un nombre. Dans cet item, les distracteurs proposés ne reposent pas sur des erreurs en lien avec le calcul du double de 60, mais portent sur la confusion double-moitié (distracteur 30) ou décuple (600) ou cinquième (12). Nous considérons ainsi que l'item 9 relève du calcul réfléchi : il convoque $\mathbf{T}_{\mathbf{CR\_\times}}$ et demande une connaissance du vocabulaire spécifique à l'arithmétique. Nous faisons apparaître le vocabulaire en jeu dans la colonne « variables didactiques » des tableaux récapitulatifs figurant en Annexe 1.

Plus globalement, la présence de tâches de *vocabulaire* nous interpelle quant à leur place dans l'évaluation. D'une part la maitrise du vocabulaire liée aux résultats des opérations ne figure pas dans les programmes (aussi bien de 2002 que de 2008), ce qui interroge leur présence dans l'évaluation et d'autre part, de tels items n'évaluent pas une compétence mathématique dans le sens où nous pouvons l'entendre (il s'agit ici de savoirs déclaratifs) ; par conséquent ils ne mesurent pas la même dimension que celle mesurée par les autres items du test. Il est donc possible qu'ils ne soient pas bien corrélés avec l'ensemble des items du test.

II.2.2 Pertinence d'items liée à divers paramètres

Nous avons aussi rencontré différents items s'avérant peu pertinents par rapport à l'objectif d'évaluation qui leur est assigné.

Si des items classiques de calcul posé ou de calcul réfléchi, semblables aux items 5 et 6, sont proposés dans l'évaluation, nous avons aussi repéré des items moins usuels pour lesquels l'étude de l'adéquation avec leur objectif d'évaluation était plus complexe. Nous avons extraits deux de ces items (items 10 et 11), mais ils sont représentatifs d'autres items similaires (formulés à l'identique, mais avec des opérations différentes).

II.2.2.i <u>Pertinence de la tâche</u>

<u>Item 10</u> : Marc effectue des opérations. Pour chaque opération, quel chiffre des unités obtient-il ?

1891 × 9 455 × 25 2077 × 57 400 × 12 919 × 6

Item posé sous une forme ouverte contenant les 5 opérations - Extrait de CEDRE 2008

De telles tâches sont proposées avec l'addition et avec la soustraction ; nous avons considéré ces tâches comme relevant du calcul réfléchi même s'il ne s'agit pas de donner le résultat exact et permettant d'évaluer principalement la connaissance des répertoires. Comme elles ne sont pas usuelles dans l'enseignement en cycle 3, en particulier, pour l'item 10 nous avons alors considéré la convocation de $\mathbf{T}_{\mathbf{CR\_\times}}$ à un niveau t-convoqué, sans choix de technique.

L'objectif d'évaluation assigné à ces tâches n'est pas déterminé spécifiquement par les concepteurs ; par conséquent, il est difficile de considérer l'adéquation ou non de ces items avec leur objectif.

II.2.2.ii Formulation de la question

La formulation de la consigne de l'item peut aussi remettre en cause la pertinence de l'item par rapport à son objectif d'évaluation, comme c'est le cas pour l'item 11 suivant.

Item 11 : sans effectuer la division, écris combien de chiffres aura le résultat :				
6783 : 5	3956 : 9	67231 : 6	563 : 3	4875 : 4
Item posé sous une forme ouverte avec ces cinq calculs - Extrait de CEDRE 2008				

L'objectif d'évaluation de cet item porte sur la détermination du nombre de chiffres du quotient dans une division euclidienne. Or, la formulation de la question demande d'écrire le nombre de chiffres du résultat et par conséquent, le nombre de chiffres du quotient de la division ; cela suppose alors que l'on considère le quotient exact et dans ce cas la tâche devient très complexe. En effet, s'il est aisé de déterminer le nombre de chiffres du quotient d'une division euclidienne en procédant par encadrement, il n'est pas possible de procéder ainsi dans le cas où le quotient est décimal ; il est donc nécessaire de calculer mentalement le quotient pour donner le nombre de chiffres qui composent son écriture chiffrée. La question devient même inadaptée lorsque le quotient est rationnel non décimal.

D'une part il est difficile pour un élève de CM2 de constater que le quotient n'est pas décimal pour les trois divisions par 9, 6 et 3 et il est impossible de répondre à la question posée ; le nombre de chiffres permettant d'écrire le quotient décimal de 563 par 3 étant infini. De plus, pour la division de 4 875 par 4, le nombre de chiffres du quotient entier est 4, alors que le quotient exact s'écrit avec 6 chiffres ; un élève qui ne respecterait pas la consigne et poserait la division pour répondre à la question posée en donnant comme réponse de 6 verrait sa réponse considérée comme fausse alors qu'elle est correcte.

Nous supposons que le choix d'une telle formulation s'explique par la volonté de ne pas utiliser le terme de quotient (ni même de quotient entier ou de division euclidienne) au profit du terme de résultat. Si tel est le cas, il aurait suffi, pour enlever toute ambigüité, de proposer des divisions exactes pour lesquelles le quotient était entier : un tel choix n'enlevait rien à l'objectif de la tâche et rendait cet item pertinent au regard de son objectif d'évaluation avec une formulation de la consigne correcte d'un point de vue mathématique et sans ambigüité. L'item, tel qu'il est formulé précédemment, ne se révèle donc pas pertinent au regard de son objectif d'évaluation ; il est néanmoins difficile de déterminer l'impact d'une telle formulation sur la réussite à l'item. Pour ce faire, il serait nécessaire d'interroger et d'observer des élèves et par conséquent d'étudier la pertinence de cet item dans le cadre d'une approche psycho-didactique de la validité.

Si, dans l'ensemble, les items proposés correspondent aux objectifs d'évaluation qui leur sont assignés, une analyse *a priori* de chacune des tâches permet de cibler plus précisément les techniques qui peuvent être employées pour les résoudre et les technologies sur lesquelles elles reposent ; nous exploiterons ce travail lors de l'analyse globale du contenu (partie III) et lors de l'interprétation des résultats (partie IV).

II.3 Étude de la validité psycho-didactique

L'analyse de la validité psycho-didactique des items est une analyse locale qui prend en compte d'autres éléments, que ceux mathématiques et épistémologiques, mais qui peuvent influencer les processus de réponse. Comme nous l'avons signalé lors de la méthodologie d'analyse, il est difficile de déterminer uniquement à partir de ces seuls éléments la pertinence de l'item par rapport à son objectif, mais il est néanmoins possible de repérer certains biais qui interrogent cette dernière ; en plus des éléments descripteurs des items, nous abordons dans ce paragraphe un aspect technique lié à la répartition des items dans les cahiers.

II.3.1 Choix des éléments descripteurs des items

Nous repérons pour chaque item son format de question (QCM, vrai-faux, réponse ouverte courte et réponse ouverte), le contexte de l'énoncé et le support sur lequel il a passé (Annexe 1). Pour le format de questions, nous distinguons en particulier la question à réponse ouverte courte (QROC), de la question à réponse courte (QRC) où le nombre de chiffres du résultat est indiqué que ce soit sous la forme de peigne, de points ou de tirets ; ce qui donne à l'élève un élément de contrôle sur sa réponse. Nous avons aussi identifié les items correspondant à des questions regroupées, comme les suites de vrai-faux, en indiquant le nombre de questions qui composent l'item ; nous reviendrons spécifiquement sur ce point dans le paragraphe suivant.

Nous n'analysons pas de façon spécifique, item par item, le niveau de langue des énoncés parce que tous les items proposés dans l'évaluation relèvent globalement d'un même niveau de langue : les phrases sont courtes, le vocabulaire employé est usuel, sans complexité majeure.

II.3.2 Pertinence des items relativement à une approche psycho-didactique

II.3.2.i Format de question

Jusqu'à présent, nous avons principalement abordé la question du format à travers les QCM et le choix des distracteurs ; nous soulevons ici une autre question liée à la succession de vrais-faux et aux questions regroupées. Il s'agit de questions semblables, dans la forme, à celles de l'item 12 et pour lesquelles un seuil de nombre de bonnes réponses est fixé (ici trois sur trois) pour déclarer l'item réussi :

Item 12 : indiquer vrai ou faux pour chaque ligne :		
5 751 = 5 000 + 700 + 50 + 1	□ Vrai	□ Faux
9 054 = 9 000 + 500 + 4	□ Vrai	□ Faux
27 303 = 20 000 + 7 000 + 300 + 3	□ Vrai	□ Faux

Dans cet item, les trois décompositions des nombres sont des décompositions additives réduites (lorsque les égalités sont vraies). Les trois questions de cet item relèvent du même type de tâche de traduction canonique ($\mathbf{T}_{\mathbf{Teapdc/ec}}$) et, par conséquent, peuvent être résolues avec $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{pos}}$; il n'aurait pas été pertinent de proposer, dans ce même item, une égalité comme « 5 751 = 5 200 + 500 + 51 » qui ne peut pas être résolue avec la même technique.

Plus généralement, il est cohérent dans les successions de Vrai-Faux, d'avoir des questions similaires conduisant à évaluer le même savoir et qui mobilisent la même technique et les mêmes éléments technologiques afin que le regroupement des questions pour déterminer un seuil soit pertinent par rapport à l'objectif d'évaluation assigné à l'item. En effet, on évalue ainsi plusieurs fois la même technique dans des conditions identiques pour s'assurer d'une certaine stabilité de cette dernière.

De façon générale, nous estimons qu'à l'intérieur d'un même item constitué d'une succession de prises d'informations, il est pertinent de ne pas proposer des tâches qui relèvent de types de tâches différents ; en revanche, il est complémentaire dans l'évaluation, d'avoir des items similaires formulés dans un autre registre d'écriture (EUN ou EPD) et/ou de façon non canonique. Ce que nous étudierons lors de l'analyse du contenu dans sa globalité.

Nous ne revenons pas sur la spécificité du format QCM que nous avons déjà beaucoup évoquée dans le chapitre sur la méthodologie d'analyse et dans le paragraphe précédent avec le choix des distracteurs.

II.3.2.ii Contexte de la tâche

Nous nous sommes aussi interrogée sur différents items portant sur la détermination d'un ordre de grandeur du résultat d'une opération. Ils sont tous proposés sous la forme de QCM, en dehors d'un contexte donné, comme cela peut être le cas en résolution de problèmes, le contexte pouvant induire un choix dans l'ordre de grandeur des nombres qui entrent en jeu. La plupart des items représentant $\mathbf{T}_{\mathbf{CR\_ODG}}$ sont similaires à l'item 13 ci-dessous :

Item 13 : évalue l'ordre de grandeur du résultat de cette opération : 321 × 23
□ entre 60 et 80 □ entre 600 et 800 □ entre 6 000 et 8 000.

Le format QCM et les modalités de passation enlèvent de la pertinence à ce type d'items, au regard de l'objectif d'évaluation qui leur est assigné, à savoir : déterminer l'ordre de grandeur du résultat d'un calcul. En effet, il aurait été plus opportun de proposer ces items avec une passation en temps limité afin d'empêcher les élèves de poser les opérations et ensuite de coder les réponses selon l'intervalle dans lequel se situe leur réponse. Ensuite, la question n'étant pas posée sous forme ouverte, la part d'initiative laissée habituellement à l'élève dans le cadre du calcul réfléchi approché pour choisir une approximation des nombres, est ici plus réduite.

II.3.2.iii Support

Les items passés sur support numérique sont traités de façon séparée et analysés dans le paragraphe VI de ce chapitre. Le choix du support n'est pas anodin pour la validité de l'item, comme nous l'avons déjà souligné pour les questions portant sur le calcul mental et les ordres de grandeur.

II.3.2.iv Répartition des items dans les blocs

Nous constatons que des items semblables, représentant un même type de tâche et formulés de façon identique mais mettant en jeu des nombres différents, sont souvent regroupés au sein d'un même bloc et non disséminés dans l'ensemble des blocs. Par exemple, en 2014 : les trois items similaires à l'item 10 (déterminer le chiffre des unités d'une addition, d'une soustraction et d'une multiplication) ont été proposés dans un même bloc, les uns à la suite des autres. Si ce choix peut se justifier par la volonté de maintenir l'élève face à des tâches similaires et peut se révéler intéressant quand il lui est demandé par exemple de reconnaître le double d'un nombre sous la forme de trois questions successives, nous nous interrogeons néanmoins sur l'effet de lassitude provoqué par de tels choix lorsqu'ils conduisent à des répétitions trop nombreuses de tâches similaires. En effet, enchaîner quinze fois (3 items avec 5 questions) la détermination du chiffre des unités d'un calcul (qui varie : addition, puis soustraction et enfin multiplication) peut se révéler fastidieux et amener l'élève à changer d'item ou à répondre plus rapidement ; ce qui remet en cause la pertinence de l'item, indépendamment de son contenu et impacte sur le taux de réussite à cet item.

La question est identique pour le calcul posé : en 2014, les élèves ayant composé sur les cahiers constitués des blocs 1 et 2 ont dû effectuer, en les posant, 19 opérations. Là encore, si de façon indépendante, les items proposés ont un contenu pertinent, cette répartition n'est pas sans effet sur l'attention des élèves et sur leur performance. Nous le montrerons à partir de l'évolution du taux de non réponse et du taux de réussite lorsque nous les étudierons de façon plus ciblée dans la partie VII de ce chapitre.

II.4 Conclusion

Nous avons soulevé, à travers cette analyse locale et la présentation de différents items, les questions de pertinence qui peuvent être posées localement que ce soit d'un point de vue épistémo-didactique ou psycho-didactique à partir des éléments décrivant les tâches. Avant d'aborder l'étude de la validité de contenu à un niveau global, nous concluons sur des aspects locaux relatifs à la pertinence des items au regard de leurs objectifs d'évaluation :

<u>Choix de distracteurs et codage de la réponse :</u> peu de QCM, par les distracteurs qu'ils proposent, permettent d'accéder à des conceptions erronées ou à une mise en œuvre inadaptée d'une technique (en dehors de son domaine de validité par exemple). Nous rappelons que déterminer les types d'erreurs réalisés par les élèves n'est pas un objectif de l'évaluation. Il est néanmoins possible de construire des distracteurs correspondant à des erreurs identifiées comme résultant de techniques erronées ou non adaptées ; ce qui permet ensuite d'interpréter les erreurs par rapport aux technologies sous-tendant les techniques, et *in fine* d'apporter des résultats complémentaires sur l'état des connaissances des élèves.

Dans les évaluations CEDRE, la plupart des QCM proposent quatre choix de réponse. Or, sur les trois distracteurs proposés, nous avons observé lors de l'analyse *a priori* que bien souvent, un seul des trois pouvait être interprété comme résultant de la mise en œuvre d'une technique erronée. Nous avons déjà soulevé dans le chapitre 4 la difficulté de déterminer des distracteurs pertinents d'un point de vue didactique (c'est-à-dire permettant de repérer la technique et les technologies mises en jeu pour répondre) tout en respectant les « règles » de conception des QCM ; par conséquent, nous ne revenons pas sur ce point, ni sur celui du codage des réponses abordé dans le paragraphe II.2 de ce chapitre.

<u>Techniques et éléments technologiques à partir des questions ouvertes :</u> il paraît complexe de retrouver les techniques et les éléments technologiques caractérisant des OM apprises à partir des items présentés sous forme ouverte, même à partir d'un travail de recodage. En effet, les consignes de passation n'incitent pas l'élève à écrire les différentes étapes de son raisonnement sur le cahier : ce qui amène l'élève à travailler au brouillon et à n'écrire sur le cahier que la réponse qu'il donne sans trace de son raisonnement. Si cela n'influe pas sur la pertinence des items proposés au regard de l'objectif de l'évaluation, cela permet difficilement de déterminer de façon assurée la technique et les technologies mises en jeu pour répondre à la question posée.

III VALIDITÉ DE CONTENU : ÉTUDE GLOBALE

Nous exploitons dans cette partie l'analyse *a priori* des tâches menée pour l'étude locale et abordons les différents axes définis dans la méthodologie pour étudier la validité de contenu d'un point de vue global. Nous revenons d'abord sur la répartition du nombre de tâches selon les trois OMR que nous avons définies pour caractériser le domaine ; nous avons déjà souligné que la répartition n'est pas équilibrée (au regard des champs définis par le cadre de CEDRE), le calcul occupant une place disproportionnée. Nous précisons cette observation à partir de notre catégorisation des tâches.

Pour l'étude du contenu dans sa globalité, nous avons d'abord travaillé OMR par OMR afin d'étudier :

- la couverture des différentes OMR par les tâches des évaluations 2008 et 2014 ;

- la représentativité des tâches proposées selon les types de tâches et selon les niveaux d'intervention des praxéologies et leur éventuelle évolution entre 2008 et 2014 ;
- l'équilibre selon les variables didactiques spécifiques à chacun des types de tâches.

Cette première analyse nous amène à dégager des premières conclusions sur la validité des évaluations 2008 et 2014 par OMR. Nous complétons ensuite par une étude de la complexité des items et concluons sur la validité de contenu des deux évaluations.

III.1 Répartition des tâches sur le domaine

Les 180 items du bilan CEDRE 2008 et les 99 du bilan 2014 relevant du domaine de la numération et de l'arithmétique des nombres entiers se répartissent selon les trois OMR de la façon suivante (Tableau 4) :

<table>
<tr><th></th><th></th><th>OMR 1</th><th>OML 2A</th><th>OML 2B</th><th>OML 2C</th><th>OML 3A</th><th>OML 3B</th><th>savoirs déclaratifs</th><th>total</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Cèdre 2008</td><td>Nombre d'items</td><td>32</td><td>23</td><td>0</td><td>21</td><td>11</td><td>83</td><td>10</td><td>180</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Pourcentage</td><td rowspan="2">18 %</td><td>13 %</td><td>0 %</td><td>12 %</td><td>6 %</td><td>46 %</td><td>6 %</td><td rowspan="2">101 %</td></tr>
<tr><td colspan="3">OMR 2 : 44 items (25 %)</td><td colspan="3">OMR 3 : 104 items (58 %)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Cèdre 2014</td><td>Nombre d'items</td><td>15</td><td>10</td><td>3</td><td>8</td><td>22</td><td>37</td><td>4</td><td>99</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Pourcentage</td><td rowspan="2">15 %</td><td>10 %</td><td>3 %</td><td>8 %</td><td>22 %</td><td>29 %</td><td>4 %</td><td rowspan="2">100 %</td></tr>
<tr><td colspan="3">OMR 2 : 21 items (21 %)</td><td colspan="3">OMR 3 : 63 items (64 %)</td></tr>
</table>

Tableau 4 - Répartition des items des évaluations CEDRE 2008 et 2014 selon les trois OMR

Les pourcentages indiqués dans le tableau sont relatifs par rapport au domaine et non par rapport à l'ensemble de l'évaluation. Nous rappelons que nous considérons qu'un item relève d'une OML selon l'objectif d'évaluation qui lui est assigné : par exemple les items appartenant à l'OMR 3 sont des items de calcul, mais leur résolution appelle des techniques et des technologies de la numération.

A la différence de la répartition établie à partir des champs mathématiques de CEDRE (Tableau 2), les OMR, telles qu'elles sont définies, sont stables et permettent de comparer directement la répartition des items sur le domaine entre 2008 et 2014 et de la quantifier. Nous observons alors une certaine stabilité dans la réparation des items par OMR ; en revanche, la répartition à l'intérieur des OML évolue, surtout pour les OML 3A et 3B. En effet, le nombre d'items de calcul posé augmente de 16 % entre 2008 et 2014 alors que le nombre d'items de calcul réfléchi diminue de 17 %. Deux explications peuvent être avancées pour expliquer cette évolution : d'une part, les items de « calcul mental » passés en 2014 sur support numérique ne sont pas pris en compte dans cette répartition et d'autre part, l'intégration des items de l'évaluation « 1987 - 2007 » dans CEDRE 2014 a amené un nombre important d'items de calcul posé.

Un poids important donné au calcul (OMR 3) : en 2008 comme en 2014, les items de calcul sont les plus nombreux dans le domaine étudié ; les types de tâches de calcul interviennent dans plus de la moitié des items puisque la quasi totalité des items relevant de l'OMR 1 demande l'effectuation d'un calcul et convoque par conséquent un type de tâche de l'OMR 3.

Des OML non ou sous représentées : avant même d'étudier la répartition des types de tâches dans chacune des OMR, nous constatons des manques dans les praxéologies relevant de la numération : peu (voire pas) d'items portant sur l'aspect cardinal du nombre (OML 2B) et ordinal du nombre (OML 2C). Même si les praxéologies de la numération interviennent indirectement dans les types de tâches de calcul, elles ne sont pas évaluées dans les items de calcul ; le codage tel qu'il existe ne le permet pas. Nous exploiterons l'échelle des scores en mettant en perspective la numération et le calcul, mais si nous nous limitons à l'exploitation faite des items relativement aux objectifs d'évaluation qui leur sont assignés, nous observons que les praxéologies de la numération (OML 2B et 2C) ne sont guère représentées.

Une stabilité sur la résolution de problèmes : si nous avions évoqué le faible poids attribué à ces items par rapport au contenu global de l'évaluation, nous réalisons le même constat relativement au domaine que nous étudions. Nous précisons que la place qu'ils occupent dans l'ensemble des items étudiés reste stable (18 % et 15 %).

La contrepartie inéluctable de l'importance donnée au calcul dans l'évaluation est l'attribution d'un moindre poids à la numération (OMR 2) et à la résolution de problèmes (OMR 1) ; ces choix ne sont pas sans conséquence sur les résultats de l'évaluation et sur l'interprétation qui peut en être faite et rejoignent les observations que nous avons faites sur la place occupée par le domaine choisi par rapport au contenu global de l'évaluation. S'il ne nous est pas possible de savoir dans quelle mesure ils sont assumés par les prescripteurs et relèvent du cadrage même de l'évaluation, nous ne pouvons nier que de donner une telle place au calcul sur les nombres entiers au détriment de la résolution de problèmes n'est pas cohérent avec la volonté affichée, dans les prescriptions institutionnelles, de placer la résolution de problèmes au centre de l'activité mathématique.

Si ce choix n'est pas anodin en termes de validité, il n'est pas non plus sans conséquence sur l'interprétation des résultats qui pourra en être faite : en donnant autant de poids au calcul en tant qu'*objet* au détriment d'un aspect *outil* dans la résolution de problèmes, cela implique qu'il sera plus difficile de déterminer si l'élève est capable ou non de modéliser un problème par une écriture arithmétique, puisqu'il y aura moins d'items pour l'évaluer. Par ailleurs, les items de calcul réfléchi (OML 3B) et de calcul posé représentent en 2014, pour chacun d'eux, plus d'un quart des items du domaine, ce qui est important et interroge la sélection des tâches : avec un nombre aussi élevé, sont-elles variées et représentatives des types de tâches des OML ? Cette question se pose aussi pour chacune des OMR et nous conduit à étudier le contenu de l'évaluation avec une entrée par OMR.

III.2 Étude des tâches relevant de l'OMR 1 : produire une expression arithmétique

L'analyse globale de l'ensemble des items relevant de cette OMR figure en Annexe 1[5], mais nous avons choisi de centrer notre analyse sur des points nous semblant importants pour déterminer la validité de l'évaluation ; nous étudions d'abord la répartition des items selon les types de problèmes définis par Vergnaud (1990), puis préciserons les différents niveaux d'intervention des types de tâches et reviendrons sur des éléments descripteurs des tâches spécifiques, pris en compte dans la facette psycho-didactique de la validité de contenu, comme le contexte, le format de question et les registres de représentation sémiotique.

[5] Annexe 1.1.1 pour le bilan 2008 et Annexe 1.2.1 pour le bilan 2014.

III.2.1 Répartition des tâches selon les types de tâches et les types de problèmes

Le tableau suivant (Tableau 5) montre la répartition des items de résolution de problèmes.

	Type de problème		Cèdre 2008	Cèdre 2014
T_{RP+}	Composition de mesures (Compo)	Recherche du tout (P)	3	1
		Recherche d'une des parties	4	3
	Transformation de mesure (T)	Recherche de l'état final (Ef)	0	0
		Recherche de l'état initial (Ei)	6	1
		Recherche de la transformation	0	0
	Comparaison de mesures (Compa +)	Recherche d'une mesure dans le sens de la comparaison	0	0
		Recherche d'une mesure dans le sens contraire de la comparaison	0	0
		Recherche de la comparaison	1	0
	Composition de transformations	Recherche de la transformation totale	0	0
		Recherche d'une des transformations	0	0
Total T_{RP+}			**14**	**5**
$T_{RP\_\times}$	Problèmes de recherche d'une quatrième proportionnelle	Recherche du tout	1	1
		Recherche de la valeur unitaire (division partition)	3	2
		Recherche du nombre d'unités division-quotition	2	2 (dont 1 avec q+1)
	Problèmes de comparaison (Compa×)	Recherche de la valeur finale	0	0
		Recherche de la valeur initiale	0	0
		Recherche de la transformation	0	0
	Produit de mesures		0	0
Total $T_{RP\_\times}$			**6**	**5**
$T_{RP\_\times}$ &T_{RP_+}	Quatrième proportionnelle avec recherche du tout & Composition de mesures avec recherche du tout		3	1
	Quatrième proportionnelle avec recherche du tout &Transfo_+ : Recherche de la transformation		2	1
	& Transfo_+ : Recherche État initial		2	1
	<u>Problème complexe :</u> Quatrième proportionnelle avec recherche du tout & division-partition Composition de mesures avec recherche du tout & Recherche d'une des parties (P_1 ou P_2)		0	2
Total			**7**	**5**
T_{RP_Ass}	Comparaison de mesures (Compa +)- recherche d'une mesure dans le sens contraire de la comparaison		1	0
	Transformation de mesure (T+) avec recherche de Ef		1	0
	Transformation de mesure (T+) - recherche de Ei		1	0
	Problèmes de comparaison (Compa_×) - Recherche de la valeur finale		1	0
	Quatrième proportionnelle avec recherche du tout & Composition de mesures avec recherche du tout		1	0
Total T_{RP_Ass}			**5**	**0**
Total items OMR 1			**32**	**15**

Tableau 5 -Répartition des items des évaluations CEDRE 2008 et 2014 selon les types de tâches

Comparaison temporelle de la répartition : si le nombre d'items du domaine a été réduit quasiment de moitié entre 2014 et 2008, la répartition en pourcentage des items de l'OMR 1 reste identique, avec seulement quelques évolutions.

Si les problèmes additifs représentaient un peu plus de la moitié des problèmes en 2008, ils n'en représentent que le tiers en 2014. Deux items complexes, relevant de quatre classes de problèmes différents ont été intégrés en 2014.

Par ailleurs, aucune tâche d'association ne figure en 2014, alors qu'il en existait cinq en 2008.

Répartition des types de problèmes : en 2008 comme en 2014, différentes classes de problèmes ne sont pas représentées puisqu'il n'est pas possible d'atteindre l'exhaustivité dans une telle évaluation. Nous observons par ailleurs que les problèmes relevant du champ conceptuel des structures additives sont surreprésentés par rapport aux problèmes relevant des structures multiplicatives en 2008 (17 items pour les premiers et 5 pour les seconds) alors que leur nombre est équilibré en 2014 (5 et 5).

De plus, les problèmes additifs proposés sont peu variés : problèmes de composition de mesures (7 en 2008 et 4 en 2014) ou de transformation (8 en 2008 et 1 en 2014) et sont, par conséquent, peu représentatifs de l'ensemble des classes de problèmes des structures additives. Ces deux types de problèmes sont de plus abordés très tôt dans l'enseignement (dès le cycle 2), alors que les problèmes de comparaison et de composée de transformations apparaissent plus tardivement, au cours du cycle 3 : les items choisis ne sont donc pas représentatifs de l'enseignement au niveau où se place l'évaluation.

Le constat établi pour la répartition des problèmes relevant des structures additives est similaire à celui des problèmes relevant des structures multiplicatives : seul un problème de comparaison de mesures est proposé en 2008, sous la forme d'une tâche demandant de reconnaître l'écriture arithmétique correspondant au problème ($\mathbf{T}_{\mathbf{RP\_Ass}}$).

En conclusion, les classes de problèmes des structures additives et multiplicatives ne sont pas toutes représentées par les items de l'OMR 1 ; par ailleurs, certaines d'entre elles, notamment en 2008, sont surreprésentées, par rapport à d'autres. Comme nous l'avons précisé dans le chapitre précédent, une répartition plus équilibrée des items selon les classes de problèmes conduirait à une meilleure validité de contenu.

III.2.2 Niveaux d'intervention des praxéologies de l'OMR 1

Nous précisons d'abord qu'aucun des problèmes arithmétiques proposés en 2008 ou 2014 ne contient de données numériques inutiles et qu'ils sont similaires aux problèmes usuellement proposés à l'école. L'évaluation CEDRE évaluant les acquis des élèves au regard des programmes scolaires, il est cohérent que les problèmes proposés soient des problèmes de réinvestissement, supposés avoir déjà été travaillés en classe.

Pour étudier les niveaux d'intervention des praxéologies dans les tâches relevant de l'OMR 1, nous avons pris en compte les différents types de tâches convoqués dans la résolution du problème. Par exemple, dans un problème arithmétique mixte relevant des structures additives et multiplicatives, nous avons considéré qu'il convoquait deux praxéologies différentes : $\mathbf{T}_{\mathbf{RP\_+}}$ et $\mathbf{T}_{\mathbf{RP\_\times}}$.

Le tableau 6 ci-dessous indique la répartition des types de tâches de l'OMR 1 selon leur niveau de convocation ; leur nombre excède le nombre d'items puisqu'un item peut convoquer plusieurs types de tâches. Les objets de savoir sont tous anciens, tous les modèles arithmétiques ayant été introduits avant le CM1 ; nous ne le précisons donc pas de façon systématique dans le tableau.

Niveau de convocation	2008			2014		
	T_{RP_+}	$T_{RP\_\times}$	T_{RP_Ass}	T_{RP_+}	$T_{RP\_\times}$	T_{RP_Ass}
technique	7	9	3	3	4	
t-convoqué sans choix de technique	8	2	1	3		
t-convoqué avec choix de technique	7	2	1	2		
r-convoqué sans choix de technique					3	
r-convoqué avec choix de technique				4	4	

Tableau 6 - Répartition des items selon les niveaux de convocation des praxéologies

Pour définir les niveaux de convocation, nous avons considéré que les praxéologies sont :

- convoquées à des niveaux techniques pour les problèmes dans lesquels les calculs numériques et relationnels sont équivalents (par exemple en composition de mesures avec recherche du tout ou de quatrième proportionnelle avec recherche du tout, etc.) et qui sont usuellement proposés en classe ;
- t-convoquées sans choix de technique pour les problèmes additifs où les calculs numériques et relationnels ne sont pas équivalents (les élèves peuvent produire une addition ou une soustraction à trous) pour les problèmes de composition de mesures ;
- t-convoquées avec choix de technique pour les autres problèmes additifs et pour les problèmes multiplicatifs de division-quotition ou partition (sauf dans des cas très simples) ; nous estimons qu'il y a un choix de technique pour ces types de problèmes puisqu'une des techniques possibles, même si ce n'est pas celle attendue en fin d'école, est d'utiliser un modèle multiplicatif.

Deux items de l'évaluation 2014, correspondant à un même énoncé de problème, se révèlent particulièrement complexes puisqu'ils se décomposent en au moins quatre types de tâches correspondant à des types de problèmes différents, mais connus des élèves. Pour ces deux items, nous avons considéré que les praxéologies de l'OMR 1 étaient r-convoquées avec choix de technique sur des objets de savoir d'enseignement ancien ; ce qui correspond à un niveau d'intervention 7, particulièrement élevé.

En suivant cette classification, les praxéologies de l'OMR 1 sont donc convoquées à des niveaux différents (de technique à t-convoqué avec choix de technique en 2008 et à r-convoqué avec choix de technique en 2014) ; les niveaux de convocation s'étendant davantage en 2014 qu'en 2008 avec l'apparition de problèmes plus complexes. Une telle répartition apporte une preuve de validité complémentaire liée au contenu de l'évaluation.

III.2.3 Taille des nombres en jeu dans les problèmes

Nous nous intéressons à la taille des nombres en jeu dans les problèmes pour déterminer si des techniques de comptage ou de groupements / partage peuvent être employées et aboutir à une réponse correcte, alors que les techniques attendues en fin d'école pour la résolution de problèmes arithmétiques passent par la reconnaissance d'un modèle arithmétique et l'effectuation d'un calcul.

Nous estimons qu'une technique de comptage ou de groupements / partage peut aboutir à une réponse correcte lorsque dans un problème relevant des structures additives, un des nombres en jeu dans le problème est inférieur à 10 (il s'agit ici d'un choix arbitraire nous permettant d'étudier la question) et dans les problèmes relevant des structures multiplicatives : un des nombres est inférieur à 10 et l'autre est inférieur à 20.[6] Par exemple, nous considérons que le problème suivant : « *Monsieur Jacques achète 5 cahiers et 8 stylos. Le prix d'un cahier est de 3 €. Le prix d'un stylo est de 2 €. Combien a t-il dépensé ?* » peut être résolu sans la production d'une écriture arithmétique, ni même d'un calcul, par la mise en œuvre d'un comptage (avec un mode de représentation figurative du problème).

L'étude menée sur l'ensemble des items de 2008 et 2014 montre que, selon ces critères, 8 items sur 32 en 2008 (dont 2 correspondant à des problèmes additifs, 4 à des problèmes multiplicatifs et 2 à des problèmes mixtes, similaires à celui précédent) et 3 items sur 15 en 2014 (2 correspondant à des problèmes multiplicatifs et 1 à un problème mixte[7]) peuvent être traités par des techniques de comptage ou groupements/partage.

Nous observons que pour une proportion importante d'items (un quart en 2008 et un cinquième en 2014), la résolution du problème peut aboutir avec une technique de comptage ou de groupements / partage et par conséquent, ces items ne permettent guère d'évaluer les acquis des élèves au regard des attentes des programmes. Même si les techniques de résolution ne sont pas prises en compte lors du codage des réponses, le choix des valeurs numériques lors de la conception n'est pas sans incidence sur la technique qui peut être employée pour la résolution de la tâche et par conséquent, n'est pas sans incidence sur les résultats produits. En fin d'école, les problèmes proposés devraient rendre les techniques de comptage ou de groupements/partage inefficaces en mettant en jeu des nombres de taille élevée ; la validité de contenu de l'évaluation serait alors accrue.

III.2.4 Contexte

Nous avons précisé, lors de l'analyse de chacun des items de l'évaluation, le contexte de la situation en précisant aussi les unités de mesure des grandeurs qui étaient mobilisées dans le problème.

Pour pouvoir étudier la répartition et la variété des différents contextes, nous avons évoqué, dans le chapitre 4, la classification des contextes selon l'évaluation PISA. Pour notre étude, nous avons adapté cette catégorisation et avons retenu trois contextes différents :
- le contexte "personnel" qu'un élève de fin d'école peut rencontrer à travers son quotidien d'enfant et d'élève (en prenant en compte notamment ce qui relève du monde scolaire),
- le contexte sociétal que nous définissons comme étant en rapport avec le quotidien d'adultes (en particulier tout ce qui relève d'achats divers avec des montants supérieurs à 50 euros),
- le contexte scientifique pour des problèmes qui seraient posés dans un cadre strictement mathématique.

La répartition des items selon ces trois contextes est donnée dans le Tableau 7 ; les pourcentages sont calculés relativement au nombre d'items de l'OMR 1.

[6] Le choix que nous fixons sur la taille des nombres permettant ou non le comptage est arbitraire et mériterait d'être étudié de façon plus spécifique.

[7] En 2008, les items considérés sont : 2 problèmes additifs (T_EDN_11 & T_EDN_14), 4 problèmes multiplicatifs (T_EDN_05, T_EDN_06, P_EDN_10, P_EDN_11) 2 problèmes mixtes (P_EDN_03, P_EDN_09) similaires à celui précédent)
En 2014, il s'agit de 2 problèmes multiplicatifs (E5MTC090101 & E5MTC090201) et 1 problème mixte (E5MPC450301)

Contexte	CEDRE 2008	CEDRE 2014
Personnel	9 (28 %)	3 (20 %)
Sociétal	19 (59 %)	11 (73 %)
Scientifique	4 (13 %)	1 (7 %)
Total	32	15

Tableau 7 - Répartition des items des évaluations CEDRE 2008 et 2014 selon le contexte

Nous observons ainsi une prégnance des contextes sociétaux dans les évaluations CEDRE 2008 et 2014 puisqu'ils concernent 59 % des items en 2008 et 73 % des items en 2014. Par ailleurs, en complément de la répartition selon les contextes, 17 items de 2008 et 9 de 2014 mettent en jeu des euros dans leur énoncé (Annexes 1.1.1 et 1.2.1) ; ce qui représente un peu plus de la moitié des items pour chacune des évaluations.

Si la cohérence des items avec leur objectif d'évaluation n'est pas remise en cause localement, nous avons précisé dans le chapitre 4 que le choix du contexte n'était pas sans conséquence sur la façon dont les élèves modélisent un problème. Par ailleurs, le contexte, lorsqu'il est familier de l'élève, lui permet aussi d'avoir des éléments de contrôle pragmatiques en lien avec l'ordre de grandeur du résultat. Si nous nous référons au problème de division-quotition « wagons » (item 7) analysé précédemment, l'élève peut difficilement évaluer un ordre du résultat attendu puisque le contexte lui est étranger ; il n'en est pas de même lorsque les problèmes portent, par exemple, sur de l'argent de poche ou des âges.

Nous concluons donc que la répartition des problèmes selon le contexte dans les deux évaluations 2008 et 2014 privilégie la monnaie au détriment d'autres grandeurs, mais aussi les contextes sociétaux. Ce choix n'est pas sans conséquence sur la réussite à chacun des items et sur les processus de réponse mis en œuvre par les élèves (en lien avec la dimension psycho-didactique), mais nous ne pouvons pas en déduire l'impact sur la globalité de l'évaluation. Une répartition plus équilibrée selon les différents contextes apporterait cependant des preuves de validité supplémentaires.

III.2.5 Format de question

Les items évaluant la résolution de problèmes sont proposés selon trois formats différents : des questions à réponse ouverte courte (QROC), des QCM et des Vrai-Faux. En particulier, aucune question à réponse narrative, où le raisonnement de l'élève est demandé et évalué, n'apparaît. Seule la réponse au problème posé est évaluée.

En 2008, environ un tiers des items de résolution de problèmes sont posés sous une forme ouverte (Tableau 8), ce qui correspond à la proportion ouvert - QCM de l'évaluation dans sa globalité (Lescure & Pastor 2012, p. 63). En 2014, la proportion des items de résolution de problème posés sous le format QROC est moindre et représente environ un quart des items.

Format	CEDRE 2008	CEDRE 2014
QROC	11	4
QRC	0	0
QCM	20	11
Vrai - Faux	1	0
Total	32	15

Tableau 8 - Répartition des items des évaluations CEDRE 2008 et 2014 selon le format de question

Si nous avons déjà souligné l'impact du format sur l'adéquation entre l'item avec son objectif d'évaluation, nous observons aussi que la plupart des problèmes de division (partition et quotition) sont posés sous un format ouvert et non sous la forme de QCM. Un tel choix nous paraît opportun puisqu'il permet un recodage des productions d'élèves selon les modèles choisis. Nous avons montré lors de la définition de l'OMR 1 dans la praxéologie de référence, l'existence de différents modèles mathématiques autour de la division (modèle de division, multiplicatif ou soustractif / additif) : en proposant les problèmes sous un format de question ouverte, il devient possible de coder les productions selon le modèle choisi et ainsi préciser les résultats obtenus.

III.2.6 Types de représentation sémiotique

Seuls trois items en 2014 et six en 2008[8] proposent des schémas dans la formulation de leur énoncé et un seul item en 2014 inclut une photo dans son énoncé ; la photo n'est pas donnée à titre d'illustration, mais elle contient les informations nécessaires à la résolution du problème. Par conséquent, les types de représentations dans lesquels les problèmes sont formulés varient peu, et il en est de même pour les types de représentation attendus pour la réponse : toutes les réponses doivent être données sous la forme d'une écriture chiffrée ou demandent la reconnaissance d'une écriture arithmétique pour les tâches relevant de $\mathbf{T}_{\mathbf{RP\_Ass}}$.

<u>En conclusion,</u> tant par la forme de leur énoncé que par les types de problèmes proposés, les items relevant de la résolution de problèmes correspondent, dans l'ensemble, à des problèmes arithmétiques classiques de l'école élémentaire et balaient les différents niveaux d'intervention des praxéologies de modélisation sur des objets de savoirs ancien. En ce sens, ils sont pertinents par rapport aux enjeux de l'évaluation (avec la réserve récurrente du codage binaire des réponses). Le contenu de l'évaluation, sur cette OMR, gagnerait cependant en validité si un meilleur équilibre existait dans la répartition des tâches selon les différentes classes de problèmes, évitant alors que certaines d'entre elles ne soient surreprésentées, alors que d'autres sont absentes.

Si dans cette synthèse, nous n'avons pas étudié les types de tâches de calcul convoqués dans la résolution de problèmes, nous précisons que mis à part trois problèmes, les autres peuvent se résoudre de façon réfléchie voire par du calcul automatisé pour trois autres problèmes (ces derniers mettant en jeu des données qui sont sous la forme de nombres à 1 seul chiffre et qui conduisent à des opérations pouvant être traitées de façon mentale avec la connaissance des répertoires additifs et multiplicatifs). Ainsi, dans la plupart des cas, la complexité de ces items ne relève pas des calculs qu'il est nécessaire de réaliser pour les résoudre. Nous rappelons aussi que des techniques de comptage ou de groupements / partage peuvent se révéler opérationnelles pour un nombre important d'items.

III.3 Étude des tâches relevant de l'OMR 2 : gérer la numération décimale

L'analyse du contenu du test, pour les items relevant de l'OMR 2, ne se fait qu'à partir des seuls items relevant strictement de la numération ; nous ne considérons pas, au niveau de l'analyse du

[8] Il s'agit des problèmes additifs de composition de mesures, étudiés dans le chapitre 4 et dont l'énoncé figure en Annexe 2 de ce même chapitre. Les distances entre les villes apparaissent ainsi sur le schéma. Ces 3 problèmes figurent dans l'évaluation 2014 et dans l'évaluation 2008 sous un format de question QCM et un format de question QROC (ce qui explique que le nombre d'items contenant des schémas soit le double en 2008 qu'en 2014).

contenu, la convocation de praxéologies de l'OMR2 en tant qu'éléments technologiques du calcul (OMR 3) ; nous nous limitons donc à recenser les tâches qui ne relèvent que de types de tâches de l'OMR 2. Les Tableaux 9 et 10 (10a et 10b), construits à partir de ceux de l'Annexe 1, montrent la répartition des tâches des évaluations CEDRE 2008 et 2014 selon les OML 2A (gérer la numération décimale), 2B (nombre cardinal) et 2C (nombre ordinal).

Le Tableau 9 présente le nombre d'items des bilans 2008 et 2014 selon la liste des types de tâches de l'OMR 2 définie dans la praxéologie de référence. Mis à part pour les types de tâches de conversions (**$T_{c…}$**) où il n'existe pas de tâches les représentant dans les deux évaluations, nous avons repris l'ensemble des types de tâches de l'OMR 2A selon les registres qui étaient en jeu.

OML 2A - Gérer la numération décimale		**2008**	**2014**
$T_{Tec/np}$	Traduire une écriture chiffrée en écriture en lettres	0	1
$T_{Tec/eapdc}$	Traduire une écriture chiffrée en écriture canonique additive en puissance de 10	1	1
$T_{Tec/epdc}$	Traduire une écriture chiffrée en écriture canonique en puissance de 10	1	0
$T_{Tec/eunc}$	Traduire une écriture chiffrée en écriture canonique en unité de numération	0	0
$T_{Tnp/ec}$	Traduire une écriture en lettres en écriture chiffrée	7	4
$T_{eapdc/ec}$	Traduire une écriture additive canonique en puissance de 10 en écriture chiffrée	0	0
$T_{Tepdc/ec}$	Traduire une écriture canonique en puissance de 10 en écriture chiffrée	0	0
$T_{Teunc/ec}$	Traduire une écriture canonique en unité de numération en écriture chiffrée	4	0
$T_{c…}$	Convertir	0	0
$T_{Teun/ec}$	Traduire une écriture en unité de numération en écriture chiffrée	0	2
$T_{Tec/eun}$	Traduire une écriture chiffrée en écriture en unité de numération	0	0
$T_{Teapd/ec}$ $T_{Tec/eapd}$	Traduire une écriture additive *non canonique* en puissance de 10 en écriture chiffrée et réciproquement	0	0
$T_{Tepd/ec}$ ou $T_{Tec/apd}$	Traduire une écriture chiffrée en écriture *non canonique* en puissance de 10 et réciproquement	0	0
T_{CNd}	Donner le chiffre de... Donner le nombre de ... Diviser par 10, par 100	4 4 2	0 0 2
	OML 2B - Nombre cardinal		
T_{Dc}	Dénombrer une collection *Collection organisée (canonique)* *Collection organisée (non canonique)*	 0	 1 2
T_{Cc}	Comparer des collections	0	0
T_{CNdc}	*Nombre de* pour des collections	0	0
	OML 2C - Nombre ordinal		
T_{P_DG}	Placer des nombres sur une droite graduée	0	0
T_{D_DG}	Déterminer des nombres correspondant à une graduation	1	1
T_{AR}	Compter de 10^n en 10^n pour des nombres en écriture chiffrée	17	4
$T_{Comp\text{-}ec}$	Comparer deux nombres entiers écrits en chiffres	2	0
T_R	Ranger (ou ordonner) des nombres entiers écrits en chiffres	1	3
T_{enc}	Encadrer un nombre entre deux nombres entiers de dizaines, de centaines...	0	0
T_i	Intercaler un nombre entier dans une suite de nombres	0	0

Tableau 9 - Répartition des tâches relevant de l'OMR 2 des évaluations CEDRE 2008 et 2014

Les tableaux 10a et 10b synthétisent le Tableau 9 en montrant la répartition des items de l'OMR 2 : les pourcentages sont donc calculés relativement au nombre d'items relevant de cet OMR, c'est-à-dire 44 items en 2008 et 21 en 2014). Nous n'avons pas fait apparaître dans le tableau 10a l'ensemble des types de tâches de traduction possibles (écritures canoniques ou non) ou de conversion en jouant sur les différents types de représentation. Les types de tâches qui n'apparaissent pas dans le tableau, comme par exemple $\mathbf{T_{Tec/epd}}$ (traduction d'une écriture chiffrée en une écriture en puissances de dix non canonique) ne se sont pas représentées par des tâches de l'évaluation ; ce qui est indiqué dans le tableau 9.

<table>
<tr><th rowspan="3" colspan="2"></th><th colspan="9">OML 2A</th></tr>
<tr><th colspan="5">Traduire des écritures canoniques</th><th>Conver-tir</th><th colspan="3">Traduire des écritures non canoniques</th></tr>
<tr><th>$T_{Tec/np}$</th><th>$T_{Tnp/ec}$</th><th>$T_{Tec/eapdc}$</th><th>$T_{Tec/epdc}$</th><th>$T_{Teunc/ec}$</th><th>$T_{c…}$</th><th>$T_{Teun/ec}$</th><th>$T_{T…/ec}$ ou $T_{Tec/…}$</th><th>T_{CNd}</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Cèdre 2008</td><td rowspan="2">Nombre d'items</td><td>0</td><td>7</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="9">23 items (52 % des items de l'OMR 2)</td></tr>
<tr><td>Pourcentage par rapport à l'OMR</td><td>0 %</td><td>15,9 %</td><td>2,3 %</td><td>2,3 %</td><td>9,1 %</td><td>0 %</td><td>0 %</td><td>0 %</td><td>22,7 %</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Cèdre 2014</td><td rowspan="2">Nombre d'items</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="9">10 items (48 % des items de l'OMR 2)</td></tr>
<tr><td>Pourcentage par rapport à l'OMR</td><td>4,8 %</td><td>19,0 %</td><td>4,8 %</td><td>0 %</td><td>0 %</td><td>0 %</td><td>9,5 %</td><td>0 %</td><td>9,5 %</td></tr>
</table>

Tableau 10a- Répartition des tâches relevant de l'OML 2A « gérer la numération décimale » des évaluations CEDRE 2008 et 2014

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2"></th><th colspan="3">OML 2B</th><th colspan="5">OML 2C</th><th>Total</th></tr>
<tr><th>T_{Dc} ou T_{PC}</th><th>T_{CNdc}</th><th>T_{Cc}</th><th>T_{P_DG} ou T_{D_DG}</th><th>$T_{Comp\text{-}ec}$</th><th>T_{R}</th><th>T_{AR}</th><th>T_{i} ou T_{enc}</th><th></th></tr>
<tr><td rowspan="3">Cèdre 2008</td><td rowspan="2">Nombre d'items</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>17</td><td>0</td><td rowspan="2">44</td></tr>
<tr><td colspan="3">0 item</td><td colspan="5">21 items (48 % des items de l'OMR 2)</td></tr>
<tr><td>Pourcentage par rapport à l'OMR</td><td>0 %</td><td>0 %</td><td>0 %</td><td>2,3 %</td><td>4,5 %</td><td>2,3 %</td><td>38,6 %</td><td>0 %</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Cèdre 2014</td><td rowspan="2">Nombre d'items</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td rowspan="2">21</td></tr>
<tr><td colspan="3">3 items (14 % des items de l'OML 2)</td><td colspan="5">8 items (38 % des items de l'OMR 2)</td></tr>
<tr><td>Pourcentage par rapport à l'OMR</td><td>14 %</td><td>0 %</td><td>0 %</td><td>4,8 %</td><td>0 %</td><td>14 %</td><td>19,0 %</td><td>0 %</td><td></td></tr>
</table>

Tableau 10b - Répartition des tâches relevant de l'OML 2B « nombre cardinal » et de l'OML 2C « nombre ordinal » des évaluations CEDRE 2008 et 2014

III.3.1 Répartition des types de tâches

Nous avions déjà souligné le manque ou le peu de types de tâches mettant en jeu le nombre sous un aspect cardinal (OML 2B) en 2008 comme en 2014 : aucun item en 2008 et 3 items en 2014. Un tel choix peut se justifier puisqu'à la fin de l'école primaire les tâches portant sur le dénombrement de collections tendent à être moins présentes qu'au début de l'apprentissage. Hormis ce manque, les tâches relevant des praxéologies OML 2A et OML 2C se répartissent de façon équilibrée entre les deux OML (52 % et 48 % en 2008 - 48% et 38 % en 2014).

Répartition des types de tâches relevant de l'OML 2A (gérer la numération décimale) : si la répartition entre l'OML 2A et l'OML 2C est équilibrée, la distribution des tâches selon les différents types de tâches de chacune des OML l'est beaucoup moins. En effet, aucune tâche de conversion n'est proposée dans les deux évaluations, alors que différents items évaluant la traduction écriture chiffrée – nom du nombre ($\mathbf{T_{Tec/np}}$) ou la reconnaissance du « chiffre de » ou du « nombre de » ($\mathbf{T_{CNd}}$) apparaissent de façon redondante (avec des nombres de même taille par exemple).

Si nous nous intéressons aux tâches de traduction (écritures canoniques et non canoniques) : hormis celles mettant en jeu l'écriture chiffrée et la numération parlée, toutes les autres portent sur des traductions entre une écriture chiffrée et une écriture canonique (non nécessairement réduite). Seules deux tâches de traduction en 2014 portent sur des écritures qui ne sont pas canoniques. Par conséquent, la technique $\boldsymbol{\tau_{pos}}$ reposant sur la technologie $\boldsymbol{\Theta_P}$ est efficace ; il n'est pas nécessaire de mobiliser $\boldsymbol{\tau_{juxt}}$ pour répondre aux questions posées. Par conséquent, la maitrise de l'aspect décimal de la numération de position $\boldsymbol{\Theta_D}$ n'est pas évaluée à travers ces tâches de traductions d'écritures.

Parmi les dix tâches représentant $\mathbf{T_{CNd}}$ (chiffre et nombre de...) en 2008, quatre items portent sur la détermination du « chiffre des » ; quatre autres items en 2008 questionnent le « nombre de... ». En 2008 comme en 2014, deux questions sont posées sur des divisions par 10 et par 100 (que nous considérons comme représentant ce type de tâche). La technique de troncature $\boldsymbol{\tau_{tronc}}$ est ainsi nécessaire pour répondre aux questions posées et permet d'évaluer à la fois $\boldsymbol{\Theta_P}$ et $\boldsymbol{\Theta_D}$.

Nous observons donc un faible nombre d'items mettant en jeu des écritures non canoniques et des manques dans certains types de tâches liés, en particulier, aux types de représentations en jeu. S'il semble nécessaire que chaque type de tâches soit représenté par au moins un item pour que le contenu puisse être considéré comme valide, nous en concluons, que pour cette OML, cette condition n'est pas respectée.

Répartition des types de tâches de l'OML 2C « nombre ordinal » : alors que les tâches de comparaison et de rangement sont fréquemment proposées à l'école élémentaire, elles sont sous-représentées[9] dans l'évaluation, aussi bien en 2008 qu'en 2014, au détriment des tâches correspondant à $\mathbf{T_{AR}}$ (compléter une suite numérique : Avancer-Reculer)) : en effet, en 2008, presque 40 % des items de numération relèvent de $\mathbf{T_{AR}}$, alors que les tâches de comparaison et de rangement en représentent 8 %. Une légère évolution en 2014 conduit à avoir 20 % d'items représentant $\mathbf{T_{AR}}$ et 14 % relevant de $\mathbf{T_R}$; aucune tâche de comparaison de nombres entiers n'est proposée en 2014. Le manque de tâche d'encadrement $\mathbf{T_{enc}}$ est aussi à souligner sur les deux évaluations.

Les items représentant $\mathbf{T_{AR}}$ sont, par ailleurs, similaires (nombres de même taille, avec passage à l'unité d'un rang supérieur ou inférieur) et ne permettent pas d'évaluer la mise en œuvre de

[9] Nous précisons que des tâches de comparaison avec des nombres décimaux sont proposées dans les deux évaluations.

techniques différentes. Ces items se présentent sous la forme de l'item 4 (présenté dans le paragraphe II.1) ou sous une forme similaire à celle suivante :

Compléter les cases :

$$\boxed{\ldots} \xleftarrow[-\,100]{} \boxed{2\,985} \xrightarrow[+\,100]{} \boxed{\ldots}$$

Question adaptée d'un item CEDRE

Évolution entre 2008 et 2014 : si de nouveaux items apparus en 2014 ont permis de combler certains manques dans les types de tâches, d'autres ont été créés (disparition de tâches de comparaison ($\mathbf{T_{Comp}}$) ou de traduction ($\mathbf{T_{Teunc/ec}}$)) maintenant une répartition déséquilibrée. Nous observons néanmoins que les tâches relevant de $\mathbf{T_{AR}}$ ne sont plus autant présentes en 2014 qu'en 2008 amenant un meilleur équilibre, qui mériterait cependant d'évoluer encore pour qu'au moins une tâche relevant de chacun des types de tâches soit proposée ; c'est une des conditions de validité de contenu que nous avions déterminées lors de la méthodologie d'analyse.

III.3.2 Niveaux d'intervention des types de tâches

La plupart des praxéologies de l'OMR 2 sont convoquées à un niveau technique sur des objets de savoirs d'enseignement anciens, mis à part :

- $\mathbf{T_{AR}}$, qui est t-convoqué sans choix de technique, puisqu'il est à la charge de l'élève de reconnaitre la raison de la suite arithmétique (10 ou 100...), puis de compléter la suite ; nous estimons néanmoins que $\mathbf{T_{AR}}$ est convoquée à un niveau technique lorsqu'il n'y a pas de passage aux unités de l'ordre supérieur ou inférieur pour compléter le nombre manquant dans la suite. D'un point de vue technologique, $\mathbf{\Theta_P}$ peut suffire pour justifier l'écriture chiffrée du nombre manquant dans le niveau de convocation technique, alors que $\mathbf{\Theta_D}$ est nécessaire pour les autres cas ;

- $\mathbf{T_{Dc}}$ en 2014 : le dénombrement de collections organisées ou non peut se faire avec différentes techniques : $\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}np\text{-}mult}}$ ou $\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}np\text{-}add}}$ ou $\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}ec}}$ ou encore $\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}calc}}$. Elles reposent sur des technologies de numération (écrite chiffrée ou parlée) ou de calcul et en ce sens, nous estimons que les praxéologies sont t-convoquées avec choix de technique.

Comme nous l'avons déjà observé, le manque de variété des types de tâches proposés va de pair avec les niveaux d'intervention des praxéologies. Les savoirs de la numération sont des objets d'enseignement ancien. Si l'on se réfère aux tableaux de progression, en CM2, aucun savoir nouveau n'apparaît pour les nombres entiers ; à ce niveau il s'agit de les entretenir et de les consolider.

L'étude de la taille des nombres en jeu nous apporte une information complémentaire sur le niveau d'enseignement auquel l'objet de savoir peut prendre place. Le tableau suivant (Tableau 11) montre la répartition des items selon la taille des nombres en jeu dans leur énoncé.

	Entre 0 et 999	Entre 1 000 et 999 999	Entre 1 000 000 et 999 999 999	Supérieur à 1 milliard	Total
CEDRE 2008	8	20	16	0	44
CEDRE2014	8	8	2	3	21

Tableau 11 - Taille des nombres en jeu dans les items de numération[10]

Les nombres proposés dans les tâches de numération sont de tailles différentes, allant jusqu'à des nombres supérieurs au milliard en 2014 ; ce sont plutôt des nombres de l'ordre des milliers voire inférieurs (c'est-à-dire jusqu'à 999 999) qui sont privilégiés, puisque 20 items sur 44 en 2008 et 8 items sur 21 en 2014 ont cette taille pour les deux évaluations. En revanche, si en 2014, les nombres proposés dépassent le milliard, la répartition diffère de 2008 : peu de nombres compris entre un million et un milliard sont proposés alors que le nombre d'items mettant en jeu des nombres à trois chiffres reste identique entre 2008 et 2014 ; ce qui favorise des objets d'enseignement ancien (les nombres à trois chiffres étant abordés avant le cycle 3).

Le choix de ne pas proposer systématiquement des nombres de grande taille (supérieurs au million) peut néanmoins se justifier pour éviter des écritures fastidieuses pouvant être la source d'erreurs relevant davantage de l'inattention que de la méconnaissance des principes de la numération. Nous précisons néanmoins que les tâches de traduction écritures en lettres-écriture chiffrée sont proposées avec des nombres allant jusqu'au milliard.

Nous concluons donc que les nombres proposés ont des tailles variées, même si la répartition des items selon ce critère s'avère plus équilibrée en 2008 qu'en 2014. Les niveaux d'intervention des praxéologies sont principalement techniques, sur des objets de savoirs anciens ; un équilibre serait aussi alors à trouver sur cet autre critère de validité.

III.3.3 Types de représentation

Puisque peu de tâches de conversion et de traduction sont présentes dans les bilans CEDRE, il résulte que les types de représentation sémiotique sont peu variés : seul un item en 2008 et en 2014 met en jeu des EAPD, aucun en 2014 ne propose des EPD et des EUN n'apparaissent que dans quatre items en 2008 et deux en 2014. Les types d'écriture privilégiés sont donc les écritures chiffrées et le nom des nombres (écritures en lettres) ; ce choix peut s'expliquer par la volonté d'évaluer principalement les connaissances des élèves sur les savoir faire « dire-écrire » tels qu'ils sont présentés dans les programmes.

Or, pour évaluer les connaissances des élèves sur la compréhension du système de numération décimale, il est nécessaire de pouvoir déterminer si les différents aspects de la numération décimale ($\mathbf{\Theta_P}$, $\mathbf{\Theta_D}$ et $\mathbf{\Theta_{Max}}$) sont maitrisés et cela n'est possible qu'en proposant des tâches de conversion ou de traduction mettant en jeu d'autres désignations des nombres (EAPD, APD, EUN). Par exemple, comme nous l'avons déjà souligné, l'évaluation de la maitrise de l'aspect décimal ($\mathbf{\Theta_D}$) en dehors de l'aspect positionnel ($\mathbf{\Theta_P}$), est rendu possible en proposant des tâches de conversion : or, celles-ci sont absentes dans les deux évaluations.

Par ailleurs, une seule tâche de numération est contextualisée à travers l'écriture en lettres du montant d'un chèque ; le chèque n'étant pas représenté, mais seulement évoqué. Si les tâches de

[10] Pour les items constitués de plusieurs questions (vrai-faux) par exemple, nous avons considéré le nombre le plus grand.

traduction ne se prêtent guère à une contextualisation, il n'en n'est pas de même pour celles portant sur les aspects cardinal et ordinal (OML 2B et OML 2C) du nombre ; des tâches de comparaison et de rangement pouvant être proposées dans des contextes de mesures de grandeur.

Au regard de ces deux éléments descripteurs de tâches (types de représentation et contexte), les items relevant de l'OML 2 ne sont guère variés, mais restent néanmoins pertinents par rapport à leur objectif d'évaluation.

III.3.4 Format de question

En 2008 comme en 2014, seules les tâches représentant $\mathbf{T_{AR}}$ sont proposées sous une forme ouverte, les autres étant toutes sous la forme de QCM ; ce choix n'est pas sans conséquence sur la validité de contenu de l'évaluation. En particulier, il implique qu'aucune tâche de traduction écriture chiffrée/nom du nombre n'est proposée sous une forme ouverte, alors que le nombre important de tâches de ce type, en particulier en 2008, pouvait laisser supposer qu'il était nécessaire, pour les concepteurs de l'évaluation et en regard des programmes, d'évaluer les connaissances des élèves sur ces tâches. Le fait de ne les proposer que sous une forme fermée limite leur pertinence par rapport aux objectifs de l'évaluation.

En conclusion, si nous avons évoqué à plusieurs reprises l'articulation entre la numération décimale et les types de tâches de calcul (posé et réfléchi), nous soulignons aussi, même si c'est en dehors de notre domaine d'étude, que la compréhension du système de numération décimale sur les nombres entiers est nécessaire pour maitriser l'écriture des nombres décimaux. Pouvoir évaluer de façon précise les praxéologies apprises sur la numération décimale avec des nombres entiers en fin d'école peut permettre de comprendre les erreurs et les besoins d'apprentissage des élèves relativement à l'écriture des nombres décimaux. Les tâches relevant de l'OMR 2 doivent donc d'être particulièrement bien choisies et bien réparties pour que le contenu de l'évaluation, sur le domaine des nombres en général, puisse être considéré comme pertinent au regard des objectifs de l'évaluation.

L'étude que nous avons menée à partir des items représentant l'OMR 2 montre que les conditions de validité définies lors de la méthodologie d'analyse ne sont pas totalement remplies : manque de tâches relevant de certains types de tâches alors que d'autres sont surreprésentés, niveaux d'intervention des praxéologies et types de représentation peu variés, peu d'équilibre sur les formats de questions.

III.4 Étude des tâches relevant de l'OMR 3 : calculer

Comme pour l'étude des OMR 1 et OMR 2, nous retenons ici uniquement les tâches de calcul qui représentent des praxéologies de l'OMR 3 ; en particulier, les types de tâches de calcul convoqués dans la résolution de problèmes ne sont pas pris en compte. Nous rappelons que l'OMR se compose de l'OML 3A correspondant aux praxéologies de calcul posé, de l'OML 3B, correspondant au calcul réfléchi et d'une catégorie nommée « savoir déclaratifs » correspondant aux items évaluant la connaissance du vocabulaire des opérations. Le Tableau 12 indique la répartition des items de l'OMR 3 selon ces trois catégories ; les pourcentages sont calculés relativement au nombre total d'items de l'OMR 3 (104 items en 2008 et 63 items en 2014).

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="4">OML3 A : calcul posé</td><td colspan="5">OML3B : calcul réfléchi</td><td rowspan="2">Sav décl [11]</td><td rowspan="2">total</td></tr>
<tr><td>T_{CP_+}</td><td>T_{CP_-}</td><td>$T_{CP\_\times}$</td><td>$T_{CP\_:}$</td><td>T_{CR_+}</td><td>T_{CR_-}</td><td>$T_{CR\_\times}$</td><td>$T_{CR\_:}$</td><td>T_{CR_ODG}</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Cèdre 2008</td><td rowspan="2">Nombre d'items</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>5</td><td>5</td><td>10</td><td>25</td><td>26</td><td>17</td><td rowspan="2">10</td><td rowspan="2">104</td></tr>
<tr><td colspan="4">11 items</td><td colspan="5">83 items</td></tr>
<tr><td>Pourcentage par rapport à l'OMR</td><td>1,9%</td><td>2.9%</td><td>1%</td><td>4,8%</td><td>4,8%</td><td>9,6%</td><td>24%</td><td>25%</td><td>16,3 %</td><td>9,6%</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Cèdre 2014</td><td rowspan="2">Nombre d'items</td><td>4</td><td>7</td><td>3</td><td>8</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>11</td><td>17</td><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">63</td></tr>
<tr><td colspan="4">22 items</td><td colspan="5">37 items</td></tr>
<tr><td>Pourcentage par rapport à l'OMLR</td><td>6,3%</td><td>11,1 %</td><td>4,8%</td><td>12,7 %</td><td>6,3%</td><td>1,6%</td><td>6,3%</td><td>17,5 %</td><td>27%</td><td>6,3%</td><td></td></tr>
</table>

Tableau 12 - Répartition des items de l'OMR 3 des évaluations CEDRE 2008 et 2014

Les items de calcul posés sont similaires à l'item 5 présenté dans la partie précédente, mais les calculs ne sont pas toujours posés ; il peut être demandé alors aux élèves : *« Pose et effectue l'opération suivante 3 568 : 8 » (Question adaptée d'un item CEDRE).*

Ceux de calcul réfléchi sont principalement de quatre formes différentes :

- des items (relevant de $\mathbf{T_{CR\_ODG}}$) où il est demandé de choisir parmi les choix du QCM le nombre le plus proche du résultat. Par exemple :

Pour l'opération 81 + 23, quel est le nombre le plus proche du résultat ?
□ 90 □ 100 □ 110 □ 120
Question adaptée d'un item CEDRE

- des items semblables à l'item 10 où il faut déterminer le chiffre des unités des calculs donnés ;

- des items semblables à l'item 11 représentant $\mathbf{T_{CR\_:}}$ pour lesquels il est demandé le nombre de chiffres d'un quotient ;

- des items relevant de $\mathbf{T_{CR\_ODG}}$ semblables à l'item 13, comme par exemple :

Évalue l'ordre de grandeur de cette opération : 72 × 37
□ entre 200 et 300 □ entre 2 000 et 3 000 □ entre 20 000 et 30 000
Question adaptée d'un item CEDRE

- en 2008, des items ont aussi été proposés sous la forme de calcul réfléchi oral (comme pour l'item 6) sous la forme : *« neuf multiplié par vingt-cinq égal ? » (Question adaptée d'un item CEDRE 2008).*

Si nous avons déjà soulevé la place importante accordée au calcul réfléchi en 2008, nous étudions la répercussion de ce choix sur la répartition globale des items de calcul selon les types de tâches et selon le format.

[11] Sav. decl représente les items de la catégorie « savoirs déclaratifs ».

III.4.1 Répartition des types de tâches

Répartition des items de calcul posé (OML 3A) : la répartition des items de calcul posé n'est pas équilibrée selon les quatre opérations en 2008 comme en 2014 ; l'accent étant mis sur la division et sur la soustraction.

En ce qui concerne les additions et les soustractions posées, en 2008 comme en 2014, le jeu sur les différentes variables didactiques (taille des nombres, retenues, répertoires additifs simples ou complexes) rend les opérations proposées plus ou moins complexes, notamment en 2008. En revanche, parmi les 7 soustractions proposées en 2014, certaines apparaissent comme redondantes (taille des nombres similaires, retenues identiques).

Les multiplications posées sont sous-représentées dans le contenu des deux évaluations : une seule multiplication posée avec des nombres entiers est proposée en 2008. Cela n'est pas suffisant pour évaluer la maitrise de la technique opératoire de la multiplication ($\boldsymbol{\tau}_{CP\_\times}$) sur les nombres entiers[12], d'autant que la multiplication proposée (241 × 12) ne fait intervenir que des répertoires multiplicatifs simples et que l'écriture chiffrée du multiplicateur ne comporte pas de zéro. Les items de 2014 sont plus variés et mieux équilibrés sur ces différentes variables (présence de zéros, tables de multiplication petites et grandes), ce qui confère davantage de validité à l'évaluation 2014 sur ce point.

Les divisions en 2008 sont principalement des divisions avec un diviseur à un chiffre et avec un dividende à trois chiffres (deux divisions sur les trois ont pour diviseur 3) et font apparaître pour la moitié d'entre elles des zéros dans les étapes de calcul intermédiaires. En 2014, nous comptons autant de divisions avec des diviseurs à deux chiffres (4 opérations) qu'à un seul chiffre ; la taille des dividendes varie entre 2 et 4 chiffres et certaines divisions font apparaître des zéros dans les étapes de calcul. En 2014, le nombre 3 apparaît comme un diviseur privilégié, comme en 2008, puisqu'il intervient dans trois divisions sur les quatre à un chiffre (deux divisions étant d'ailleurs identiques dans les évaluations de 2008 et de 2014).

Quatre divisions sur les cinq sont des divisions exactes en 2008 et six sur les huit le sont en 2014 ; le manque de clarté dans la consigne (« effectuer la division ») dans les deux évaluations ne permet pas à l'élève de savoir s'il doit effectuer une division euclidienne ou décimale, ni la précision à laquelle il doit fournir le quotient. Dans les deux bilans, les calculs proposés pour évaluer la maîtrise de la technique opératoire de la division euclidienne sont donc pertinents au regard de leur objectif d'évaluation ; néanmoins, le choix d'un autre diviseur que 3 et la suppression des divisions identiques aurait permis davantage de variété dans les tâches proposées.

De façon générale, nous constatons que la répartition des tâches de calcul posé aurait méritée d'être rééquilibrée en faveur des multiplications notamment en 2008, ces dernières étant sous-représentées par rapport aux autres opérations.

Répartition et équilibre des tâches de calcul réfléchi (OML 3B) : si le nombre d'items de calcul réfléchi est important, il ne correspond pas à des tâches variées :
- en 2008 comme en 2014, pour l'addition, la soustraction et la multiplication, cinq items semblables de calcul réfléchi portent sur la détermination du chiffre des unités (items semblables à l'item 10) : par conséquent 15 items sont de cette forme, ce qui représente 18 % des items de calcul réfléchi en 2008 et 40 % en 2014 ;

[12] Nous précisons que des items portant sur des multiplications avec des nombres décimaux ont été proposés par ailleurs.

- 17 items portent sur la détermination de l'ordre de grandeur du résultat (items dans lequel l'élève doit choisir le nombre le plus proche du résultat ou un encadrement du résultat) : ce qui représente, dans ce cas encore, un poids important dans le nombre d'items relevant du calcul réfléchi.

Ainsi, en 2014, sur les 37 items de calcul réfléchi, 32 correspondent à des types de tâches précédents et les 5 restants consistent à reconnaître la moitié, le tiers, etc. d'un nombre donné. La situation est différente en 2008 puisque des items de calcul réfléchi ont été formulés oralement, avec un temps limité pour répondre à la question posée.

Étude des items relevant du calcul réfléchi posés oralement en 2008 : 18 items de calcul réfléchi ont été passés sous cette forme en 2008.

Les quatre opérations sont représentées parmi ces 18 items, mais avec une part plus importante accordée à la multiplication (9 items sur les 18) et moindre à la division (un seul item). Nous avons considéré que certaines de ces tâches convoquaient des types de tâches de calcul réfléchi à un niveau technique puisqu'il s'agissait d'additions simples, sans retenue (pouvant être traités directement avec les propriétés de la numération) ou d'une multiplication par un nombre étant un multiple d'une puissance de 10 ou encore, d'une soustraction avec un deuxième terme égal à 1 ; par exemple, il s'agit de calculs du type : 400 + 30 ou 38 × 10 ou encore 800 - 1 (*questions adaptées des items CEDRE).*

Les praxéologies de calcul réfléchi sont t-convoquées avec choix de techniques pour les autres types de tâches. Par exemple, dans un calcul du type 4 × 15, l'élève peut mettre en jeu différentes techniques de calcul réfléchi :
$\boldsymbol{\tau}_{CR\_\times\_add\_it}$: $4 \times 15 = 15 + 15 + 15 + 15 = 30 + 30 = 60$
$\boldsymbol{\tau}_{CR\_\times\_dec\text{-}arithm\times}$: $4 \times 15 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 30 = 60$
$\boldsymbol{\tau}_{CR\_\times\_dist}$: $4 \times 15 = 4 \times (10 + 5) = 4 \times 10 + 4 \times 5 = 40 + 20 = 60$.

Mis à part le manque de tâches mettant en jeu la division, l'ensemble de ces items se révèle varié au niveau des opérations proposées, des nombres choisis et du niveau d'intervention des types de tâches ; ce qui rend l'ensemble de ces tâches pertinent au regard de son objectif d'évaluation (en 2008).

Les tâches évaluant des savoirs déclaratifs : elles portent en 2014, comme en 2008, sur le vocabulaire des opérations (quotient, produit, différence). Leur contenu est varié en 2014 puisque la connaissance de chacun de ces termes n'est évaluée que par un seul item ; ce n'est pas le cas en 2008, certaines items étant redondants.

Évolution entre 2008 et 2014 : en calcul posé, le nombre d'items a doublé entre 2008 et 2014, mais la répartition selon les différentes opérations reste globalement identique. Il est plus difficile de comparer directement la répartition des items de calcul réfléchi puisque les items de 2008 ayant été passés à partir d'un support audio n'ont pas été repris en 2014 et ceux ayant été réalisés sur support numérique en 2014 n'ont pas été pris en compte dans la réalisation de l'échelle. Cependant, les items évaluant le calcul d'ordre de grandeur (relevant de $\mathbf{T}_{CR\_ODG}$) occupent une place importante, notamment en 2008 (plus du quart des items de l'OMR 3).

En conclusion, pour le calcul posé comme pour le calcul réfléchi, l'ensemble des types de tâches de l'OMR est représenté par au moins un item, ce qui répond à un des critères de validité de contenu que nous avons établi. Néanmoins, l'équilibre dans la répartition selon les types de tâches n'est pas atteint aussi bien en 2008 qu'en 2014 : en 2008, $\mathbf{T}_{CP\_\times}$ représente 1 % des items de l'OMR 3 alors que

$\mathbf{T_{CR\_:}}$ en représente un quart. Un écart peut être constaté de façon similaire entre $\mathbf{T_{CR\_-}}$ (1,6 %) et $\mathbf{T_{CR\_ODG}}$ (27 %) en 2014. En2014, les items proposés dans l'évaluation ne permettent pas de voir si les élèves mobilisent des techniques de calcul réfléchi s'appuyant sur des réécritures d'expressions, des propriétés des nombres et des opérations, puisque les tâches proposées peuvent être résolues avec des techniques reposant sur des technologies de la numération.

Nous soulignons aussi que très peu d'items ont pour objectif d'évaluation la connaissance des répertoires multiplicatifs et additifs. Nous ne les avons pas pris en compte dans notre étude, mais nous soulignons que seuls cinq items remplissent cet objectif en 2008 et aucun dans la passation papier-crayon en 2014 (certains sont proposés dans la passation sur support numérique, et nous y reviendrons par la suite). Même si n'avons pas défini de praxéologie spécifique pour le calcul automatisé, sa maîtrise n'en est pas moins nécessaire pour réussir l'ensemble des tâches de calcul (posé ou réfléchi). Au vu du faible nombre d'items consacré à cette question dans les deux bilans (2008 et 2014), il est difficile de pouvoir caractériser les connaissances des élèves sur ce point, alors que le calcul mental automatisé fait partie intégrante des programmes. Nous concluons donc qu'il existe un manque d'items de ce type dans les deux évaluations en 2008 et en 2014.

III.4.2 Niveaux d'intervention des types de tâches

La quasi-totalité des tâches de calcul posé en 2008, comme en 2014, convoque des praxéologies de calcul posé à un niveau technique : il s'agit d'effectuer l'opération demandée. Seules 4 tâches en 2014 convoquent une praxéologie de calcul posé à un niveau supérieur : il s'agit d'opérations à trous (additions, soustractions et multiplications) dans lesquelles il faut retrouver des chiffres manquants aussi bien dans le résultat que dans les nombres intervenant dans l'opération (niveau t-convoqué, avec choix de technique). Par exemple :

Compléter chacun des points par un chiffre :		7	4	.	7
	+	1	.	7	.
		.	4	4	3

Question adaptée de CEDRE 2014

Deux tâches en 2008 portant sur le contrôle du résultat d'une opération convoquent un type de tâche de calcul posé à un niveau supérieur (t-convoqué, avec choix de technique).

L'ensemble des techniques opératoires de calcul posé ayant été abordé au cours de l'enseignement avant le CM2, il s'agit par conséquent d'objets de savoir anciens.

Pour le calcul réfléchi, les niveaux de convocation s'étendent de *technique* à *t-convoqué* avec choix de technique. Les tâches convoquant une praxéologie à un niveau technique sont principalement celles où il faut reconnaître le double ou le tiers, etc. d'un nombre donné : au-delà de la relative simplicité des calculs à effectuer, le format QCM implique plutôt une reconnaissance du résultat qu'un calcul de ce dernier. Nous avons considéré enfin que, dans ce type d'items, les praxéologies étaient convoquées par la tâche elle-même et non par le résolveur, ce qui explique qu'aucune praxéologie ne soit r-convoquée.

Nous observons ainsi que les tâches de cette OMR convoquent les praxéologies à des niveaux variés ; ce qui apporte une preuve de validité selon les critères choisis.

III.4.3 Autres éléments descripteurs de tâches

Types de représentation sémiotique : ils sont peu variés dans les tâches de calcul : mis à part en 2008, où les items de calcul mental réfléchi sur CD audio étaient formulés dans le registre de la numération parlée et convoquaient un sous-type de tâche de conversion relevant de l'OMR 2, les autres tâches sont formulées dans le registre des écritures arithmétiques avec des écritures chiffrées, les calculs étant déjà parfois posés. Ainsi, le fait de formuler les calculs oralement en 2008 permettait de mettre en jeu des techniques de calcul réfléchi reposant sur la numération parlée ayant une portée très limitée, mais qui étaient efficaces pour deux additions sur les 18 items de calcul réfléchi proposés.

Contexte : de la même façon que pour les types de représentation sémiotique, toutes les tâches relevant de praxéologies de l'OMR 3 sont proposées en dehors de tout contexte. En particulier, aucune question sur les ordres de grandeur n'est contextualisée (ni posée sous une forme ouverte), ce qui interroge leur validité d'autant plus qu'elles sont nombreuses.

Format de questions : en 2008 comme en 2014, tous les items de calcul posé sont proposés sous forme ouverte (mis à part en 2008 où deux items spécifiques sont sous forme de QCM : il s'agit de trouver comment réaliser la preuve d'une opération). Les items de calcul réfléchi ont des formats de réponse variés en 2008, puisqu'une partie des items est formulée à l'oral avec des réponses ouvertes. Tous les items de calcul réfléchi de CEDRE 2014 sont sous forme de QCM, ce qui questionne la pertinence des items au regard des objectifs d'évaluation. En effet, le calcul réfléchi demande à l'élève une prise de décision dans l'approximation ou la décomposition arithmétique qu'il choisit des nombres, selon sa maitrise des répertoires ou des propriétés arithmétiques des opérations. En évaluant systématiquement sous forme de QCM, cette prise d'initiative est limitée et ne demande pas la réécriture des calculs en ligne s'appuyant sur les différentes propriétés des nombres et des opérations et mettant en jeu le signe égal en tant que relation d'équivalence. Par conséquent, ce type de format enlève de la pertinence aux items par rapport à leur objectif d'évaluation.

En conclusion, les tâches de calcul avec des nombres entiers occupent une place importante dans les évaluations CEDRE, mais leur contenu ne remplit pas l'ensemble des critères de validité que nous avons dégagés lors de la méthodologie d'analyse : la répartition des tâches proposée n'est pas équilibrée, certaines tâches étant surreprésentées alors que d'autres ne le sont pas suffisamment et le format de questions QCM choisi systématiquement pour le calcul réfléchi en 2014 est très restrictif par rapport aux objectifs d'évaluation. Nous compléterons notre analyse avec l'étude des items de calcul mental et réfléchi passés en 2014 sur support informatique dans le paragraphe VII.

Avant de conclure quant à l'analyse de la validité de contenu des évaluations CEDRE 2008 et 2014 nous abordons un dernier critère permettant de l'étudier, à savoir la complexité des items. Nous avons montré l'intérêt et les limites de l'outil facteurs de complexité et niveaux de compétences dans le chapitre précédent ; nous l'exploitons ici pour analyser les items et montrons en quoi il se révèle complémentaire des autres indicateurs.

III.5 Complexité

L'analyse *a priori* des tâches et l'étude du format des items nous permettent aussi de déterminer des facteurs de complexité et des niveaux de compétences (Annexe 1.4). Ces facteurs ont été définis de deux façons selon l'évaluation : en 2008, N. Sayac et moi-même les avons définis pour l'ensemble du test alors qu'en 2014 ils ont été déterminés par l'ensemble des concepteurs de l'évaluation.

Néanmoins, [nous] avons harmonisé les cotations sur l'ensemble du domaine, en particulier en veillant à ce que les items repris de 2008 pour l'évaluation 2014 soient cotés de la même façon. Nous avons synthétisé ces résultats sur l'ensemble du domaine dans les Tableaux 13 et 14 ci-dessous.

Si nous avons déjà évoqué ponctuellement la complexité des items lors de l'analyse du contenu ou des items selon les niveaux de convocation des types de tâches par exemple, nous revenons ici sur la répartition des items selon les facteurs de complexité et les niveaux de compétences. La détermination des cotations selon les items est fournie dans l'Annexe 1.4 avec les tableaux récapitulatifs par OMR pour les évaluations 2008 et 2014. Même si regrouper l'ensemble des items d'un domaine selon les facteurs de complexité et de compétences peut faire perdre en précision par rapport à une étude selon chacun des descripteurs, une telle analyse permet d'avoir une vision sur le domaine entier de la complexité des items et des niveaux de compétences qu'ils permettent d'évaluer.

	FC1 = 0			**FC1 = 1**			**FC1=2**			**Total**
	FC2 = 1	**FC2 = 2**	**FC2 = 3**	**FC2 = 1**	**FC2 = 2**	**FC2 = 3**	**FC2 = 1**	**FC2 = 2**	**FC2 = 3**	
NC1	52	7	0	59	26	0	2	0	0	146
NC2	0	0	0	27	2	0	3	0	0	32
NC3	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2
Total	52	7	0	86	28	0	5	2	0	180

Tableau 13 - Répartition des items de CEDRE 2008 selon les facteurs de complexité et les niveaux de compétences

	FC1 = 0			**FC1 = 1**			**FC1=2**			**Total**
	FC2 = 1	**FC2 = 2**	**FC2 = 3**	**FC2 = 1**	**FC2 = 2**	**FC2 = 3**	**FC2 = 1**	**FC2 = 2**	**FC2 = 3**	
NC1	26	6	0	18	13	0	0	3	0	66
NC2	0	3	0	16	4	1	6	0	0	30
NC3	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3
Total	26	9	0	34	17	1	6	4	2	99

Tableau 14 - Répartition des items de CEDRE 2014 selon les facteurs de complexité et les niveaux de compétences

<u>Complexité sur l'ensemble du domaine</u> : en 2008 et en 2014, les items relèvent principalement d'un niveau de compétences 1 et ils sont très peu nombreux à relever d'un niveau de compétences 3. Ils correspondent donc à des niveaux de convocation de types de tâches qui sont principalement techniques (application immédiate de connaissances) et ne permettent pas de déterminer, dans la caractérisation des OM apprises, si elles peuvent être convoquées à un niveau supérieur. Ces constats rejoignent ceux établis pour l'évaluation 2008 pour les domaines des fractions/décimaux et des grandeurs et mesures (Sayac & Grapin 2015). Finalement, pour ces items correspondant à des tâches usuelles, le plus souvent isolées (mis à part pour la résolution de problèmes), avec un niveau de formulation de l'énoncé simple et sans donnée inutile, les niveaux de complexité et de

compétences correspondent globalement au niveau de convocation des types de tâches ; la pertinence de l'outil est donc peu visible ici, et les constats que nous établissons sur la complexité à l'intérieur des différentes OMR rejoignent, pour les niveaux de compétences, ceux que nous avons établis sur les niveaux d'intervention des praxéologies. En particulier, pour l'OMR 2 la quasi-totalité des items en 2008 comme en 2014, relèvent d'un niveau de compétences 1.

En conclusion, les items proposés sur le domaine étudié se révèlent peu complexes ; même si les objets de savoir du domaine sont considérés pour la plupart comme anciens, la complexité aurait pu provenir, non pas de ces savoirs (pris en compte dans le facteur de complexité 2), mais de l'énoncé (facteur de complexité 1) ou du niveau de compétences. Même si nous observons pour la résolution de problèmes et le calcul (OMR 1 et OMR 2) la présence d'items de niveaux de compétences 2 et 3, ils ne sont pas suffisamment nombreux pour affirmer, d'un point de vue global, que la complexité des items est variée et que le contenu de l'évaluation est valide par rapport à ce critère.

III.6 Conclusion sur la validité du contenu global

Nous avons établi lors de la méthodologie d'analyse une liste de critères qui permet d'apporter des preuves de validité épistémo-didactique sur le contenu d'une évaluation. Nous avons observé que selon les domaines, ces critères n'étaient pas toujours respectés :

- chacune des OML n'est pas représentée par au moins une tâche : par exemple, dans l'OMR 2, aucune tâche ne représente l'OML 2B alors que des types de tâches relevant d'autres OML sont surreprésentés. De façon générale, nous avons soulevé, à différentes reprises, une répartition déséquilibrée des items selon les différents types de tâches de l'OML et une certaine redondance de certaines tâches. Par conséquent, l'ensemble des items ne couvre pas le domaine évalué, et les tâches choisies ne sont pas toujours représentatives du type de tâches auxquelles elles se rattachent ;
- les items choisis ne permettent pas souvent de pouvoir évaluer une progressivité sur les techniques et les technologies (sur l'OMR 2 notamment, où de nombreux items de traduction peuvent être résolus avec $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{pos}}$ et ne permettent pas d'évaluer la maitrise de l'aspect décimal de la numération $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$) ;
- les praxéologies sont convoquées principalement à un niveau technique, ce qui ne permet pas d'évaluer la robustesse des connaissances des élèves ;
- les formats de question ne sont pas toujours adaptés à la tâche, en particulier pour le calcul réfléchi pour lequel l'ensemble des items de l'évaluation 2014 papier-crayon est sous format QCM.

Il serait néanmoins hâtif de remettre en cause la validité du contenu des évaluations CEDRE 2008 et 2014 à partir de ces constats ; en effet, nous nous limitons ici à une étude sur les nombres entiers et il serait opportun et complémentaire de la mettre en perspective d'une étude similaire sur les nombres décimaux. En effet, si certains types de tâches (de comparaison, de traduction, de calcul, etc.) sont peu représentés avec des nombres entiers, ils peuvent l'être avec des nombres décimaux et donc rééquilibrer le contenu de l'évaluation. En revanche, la méthodologie que nous avons développée semble performante pour permettre aux concepteurs de faire évoluer le contenu (si elle est utilisée en aval) et de l'équilibrer dès la conception (si elle est utilisée en amont).

L'analyse du contenu et les conclusions relatives à sa validité permettent d'éclairer l'interprétation des résultats et de comprendre la façon dont les manques repérés dans le contenu de l'évaluation peuvent influencer les résultats produits (paragraphe V de ce chapitre).

IV ITEMS ÉCARTÉS

Avant de nous intéresser aux résultats de l'évaluation CEDRE, nous analysons les items écartés des deux évaluations 2008 et 2014 pour des raisons statistiques, c'est-à-dire ceux insuffisamment discriminant (R_{bis} < 0,2) ou non corrélés à l'ensemble du test. Lors de la conception de la méthodologie d'analyse des dispositifs d'évaluation, nous avons émis l'hypothèse que la mise à l'écart de ces items pouvait questionner l'enseignement ou les programmes ; nous listons donc les différents items écartés des évaluations finales selon leur caractéristique statistique « défaillante ».

IV.1 En 2008

Un item de notre domaine d'étude a été enlevé de la construction de l'échelle parce qu'il n'était pas suffisamment discriminant : il porte sur la reconnaissance ($\mathbf{T_{Tnp/ec}}$) de l'écriture chiffrée d'un nombre écrit en lettres.

Six autres items dans lesquels il faut déterminer (reconnaître) le reste connaissant le dividende, le diviseur et le quotient ont été eux aussi écartés parce que non corrélés avec l'ensemble du test. Il s'agit de 6 items semblables à l'item 14 :

Item 14 : dans la division 132 : 5, le quotient est 26. Le reste est :
□ 0   □ 2   □ 5
Extrait de CEDRE 2008

Nous pouvons émettre deux arguments pour expliquer le fait que ces items n'évaluent pas la même compétence (le même trait latent) que l'ensemble des autres items.

- un format de QCM à trois choix rend l'item moins pertinent par rapport à son objectif d'évaluation et permet à des stratégies qui ne sont pas de savoir de répondre correctement à la question posée (d'autant plus que systématiquement un des distracteurs est le diviseur) ; une observation d'élèves en situation permettrait d'apporter des éléments sur la validité psycho-didactique d'un tel item ;
- de telles tâches sont peut-être inhabituelles dans l'enseignement par rapport aux tâches de calcul posé et de calcul réfléchi usuelles sur la division ; la propriété caractéristique de la division euclidienne ($\mathbf{\Theta_{div\text{-}euc}}$) ou l'utilisation du symbole de division (:) pour se référer à une division euclidienne pouvant ne pas être travaillé régulièrement à l'école. Une analyse de manuels ou une étude de pratiques d'enseignants de cycle 3 serait alors nécessaire pour valider ou non cette hypothèse.

IV.2 En 2014

IV.2.1 Items écartés pour Rbis < 0,2

Sept items de notre domaine d'étude ont été écartés de la construction de l'échelle parce qu'ils n'étaient pas suffisamment discriminants (R_{bis} < 0,2). Il s'agit uniquement d'items pour lesquels le score de réussite est très élevé et par conséquent, ils sont peu discriminants.

- quatre des six relèvent d'additions et de soustractions posées ($\mathbf{T_{CP\_+}}$ et $\mathbf{T_{CP\_-}}$) et correspondent à des opérations sans retenue qui peuvent, par conséquent, être réussies sans maitriser l'aspect décimal de la numération $\mathbf{\Theta_D}$; seule la connaissance des répertoires additifs simples et de $\mathbf{\Theta_P}$ suffisent pour répondre correctement ;
- un cinquième est une multiplication posée d'un nombre à 3 chiffres par 12 qui ne met en jeu que des répertoires multiplicatifs simples ;

- un sixième porte sur l'écriture chiffrée d'un terme d'une suite arithmétique de raison 10 sans conversion nécessaire pour le passage à une unité de rang supérieure (seul $\boldsymbol{\Theta_P}$ est nécessaire pour répondre correctement, $\boldsymbol{\Theta_D}$ n'intervenant pas).
- un septième sur la traduction d'une EUNC (écriture réduite) en EC avec un nombre à trois chiffres.

Au-delà du score de réussite très élevé à ces items, ils permettent d'évaluer des éléments technologiques qui interviennent de façon isolée dans les techniques de résolution ; ainsi, les conserver caractériserait non seulement de façon plus précise les connaissances des groupes de bas niveaux, mais ils pourraient permettre de voir une évolution sur les techniques à l'intérieur de l'échelle des groupes en parallèle d'une évolution sur les technologies qui les sous-tendent.

IV.2.2 Items écartés pour fonctionnement différentiel

Par rapport à l'évaluation de 2008, des items ont aussi été écartés pour cause de fonctionnement différentiel :
- une division exacte (936 : 3) ;
- l'écriture chiffrée d'un nombre à partir de son écriture en lettres ;
- cinq questions sur la reconnaissance de triples et de quadruples (vocabulaire)

Nous ne cherchons pas à interpréter les fonctionnements différentiels des deux premiers items, puisque d'autres similaires n'ont pas présenté les mêmes caractéristiques psychométriques et ont été conservés dans l'évaluation. Il est en revanche intéressant de remarquer des fonctionnements différentiels entre les évaluations 2008 et 2014 sur tous les items portant sur les quadruples et les triples. L'interprétation de ce constat reste néanmoins difficile et ne peut reposer sur un changement de programmes (Rocher 2015), puisque la connaissance et l'utilisation de la notion de triple et celle de quadruple apparaissent comme des compétences devant être acquises en fin de cycle aussi bien dans les programmes de 2002 que dans ceux de 2008.

En 2008 comme en 2014, il est difficile de pouvoir interpréter les caractéristiques psychométriques qui ont conduit certains items à être écartés de la construction de l'échelle. D'un point de vue méthodologique, l'étape visant à étudier les items écartés est nécessaire dans l'analyse de l'évaluation, mais les conclusions que nous en tirons pour les bilans CEDRE 2008 et 2014 restent très limitées.

V INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS À PARTIR DE L'ÉCHELLE DES SCORES

Les résultats des évaluations 2008 et 2014 ont conduit la DEPP à réaliser des échelles de scores pour lesquelles les items sont hiérarchisés selon leur indice de difficulté et répartis en 6 groupes de 0 à 5 ; les items qui sont « hors échelles » c'est-à-dire ayant une probabilité inférieure à 0,5 d'être réussis par les élèves du groupe 5, sont notés comme appartenant au groupe 6. L'interprétation de ces résultats conduit à la description d'une échelle des scores, comme nous l'avons explicité dans le chapitre 1 ; l'interprétation des résultats fournie par la DEPP est donnée sous la forme de notes d'information (Brun & Pastor 2009, Dalibard & Pastor 2015) desquelles est extraite l'échelle des scores de CEDRE 2008 et 2014 figurant en Annexe 7A et 7B du chapitre 1.

La classification des items selon les groupes de l'échelle est produite en Annexe 2 de ce chapitre ; nous avons présenté ces groupes d'abord de façon globale (Annexe 2.1), puis par OMR pour que la lisibilité et l'interprétation des résultats en soit facilitée (Annexes 2.2 à 2.5). Ces résultats sont interprétés dans ce paragraphe OMR par OMR, suivant les approches anthropologique et cognitive développées dans le chapitre 3 ; nous ciblons aussi, à l'intérieur de chacune des OMR et lorsque c'est nécessaire, des items ayant un indice de difficulté qui n'est pas cohérent avec la complexité déterminé *a priori* (par exemple des items qui convoquent des praxéologies à un niveau technique avec des objets de savoir d'enseignement ancien et qui caractérisent le groupe 5 de l'échelle).

V.1 OMR 1 : produire une expression numérique

La répartition des items dans l'échelle des scores selon les types de problèmes est fournie en Annexe 2.3. En 2008 comme en 2014, les problèmes additifs de composition de mesures avec recherche du tout figurent parmi les plus réussis (groupes 0 et 1) alors que les items les moins bien réussis correspondent à des problèmes de division partition ou quotition (le problème des wagons pour lequel nous avons détaillé l'analyse *a priori* au début de ce chapitre caractérise le groupe 5).

<u>Problèmes additifs :</u> en 2014, la répartition des problèmes de composition de mesures suit globalement les niveaux de complexité cognitive définis par Vergnaud (1990) : ceux avec recherche d'une des parties sont moins biens réussis que ceux avec recherche du tout. En 2008, le nombre d'items étant globalement plus important avec des types de problèmes variés, cette hiérarchie est moins visible. Si elle est respectée sur les problèmes additifs de composition (comme en 2014), elle l'est beaucoup moins sur les problèmes de transformation et de comparaison ; ces derniers étant répartis dans les groupes 2, 3 et 4 sans réelle régularité (Annexe 2.3).

<u>Problèmes multiplicatifs</u> : dans les deux évaluations, on retrouve une hiérarchie assez marquée, les problèmes de recherche de quatrième proportionnelle avec recherche du tout étant beaucoup mieux réussis que les problèmes de division-quotition et partition.

<u>Problèmes mixtes (additif et multiplicatif)</u> : comme les problèmes de composition de mesures avec recherche du tout et les problèmes multiplicatifs avec détermination du tout sont réussis dès les groupes 0 et 1, des problèmes mixtes sont réussis dès le groupe 2 en 2008 et en 2014. En revanche, les problèmes mettant en jeu d'autres types de problèmes (de transformation notamment) ne sont réussis qu'à partir du groupe 3.

Il est difficile de retrouver, de façon très nette, une hiérarchie sur les types de problèmes et d'interpréter les résultats obtenus uniquement à partir de la classe de problèmes : comme le codage ne distingue pas la conversion du problème et le calcul, une erreur dans le calcul implique que l'item est échoué. Par conséquent si les nombres en jeu conduisent à des calculs complexes, le score de réussite est moindre, mais n'est pas forcément lié au type de problème : ce qui peut expliquer le manque de hiérarchie établi pour les problèmes additifs en 2008.

Enfin, les problèmes que nous avions identifiés comme complexes parce que convoquant différentes praxéologies à des niveaux élevés caractérisent les groupes 5 et 6 (hors échelle) : la difficulté, calculée statistiquement pour ces items, est donc cohérente avec la complexité déterminée *a priori*. Il n'en est pas de même pour tous les items, en particulier, pour ceux appartenant aux types de problèmes division-quotition et division-partition : en effet, les problèmes de division, pourtant enseignés dès le CE2 à partir d'un calcul (et non plus à partir de groupements ou de partage), ne sont réussis qu'à partir du groupe 3, même quand ils ne mettent en jeu que des petits nombres (diviseur à un chiffre et dividende à deux chiffres ; le calcul relevant de la connaissance des tables de multiplication) et peuvent éventuellement être résolus avec des techniques $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_\,:\_mult}}$ ou $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_\,:\_sous}}$.

Ce constat sur les OM apprises nous conduit à interroger les OM enseignées : au-delà de la technique opératoire de la division que l'on peut considérer comme complexe puisque faisant intervenir d'autres techniques de calcul (multiplication et soustraction) et reposant sur de multiples éléments technologiques, il s'agit plutôt de constater que la modélisation des problèmes de division-quotition ou division-partition par une division n'est pas acquise en fin d'école alors qu'elle relève d'un objet de savoir ancien : l'enseignement des techniques de modélisation et de conversion relative à la résolution de problèmes laisserait-il subsister des techniques et des technologies reposant sur celles du cycle 2 (par groupement et partage) ne permettant pas aux techniques de calcul de les remplacer ?

V.2 OMR 2 : gérer la numération décimale

La répartition des items relevant de l'OMR 2 selon les groupes de l'échelle figure en Annexe 2.4 de ce chapitre. L'étude de la validité du contenu a établi un manque au niveau d'un certain type de tâches alors que d'autres étaient surreprésentés. Les manques repérés dans les types de tâches pour couvrir le domaine pourraient expliquer la répartition des items de numération dans l'échelle, puisqu'ils caractérisent principalement les groupes de 0 à 3.

Comparaison 2008 – 2014 : si en 2008, les tâches de traduction canonique (écriture chiffrée – nom du nombre) relevaient majoritairement du groupe 1, en 2014, elles relèvent majoritairement du groupe 3 ; il ne faut pas pour autant en conclure que ces traductions sont moins bien maitrisées en 2014 qu'en 2008 puisque les tâches pour évaluer ce savoir ont évolué en 2014 et que la forme qu'elles ont prise, moins usuelle, rendent les items plus complexes. En effet, en 2014, non seulement la taille des nombres a augmenté (nombres supérieurs à un milliard), mais aussi trois items sur les cinq relevant de $\mathbf{T_{Tnp/ec}}$ ou $\mathbf{T_{Tec/np}}$ ne demandent plus à l'élève de reconnaître l'écriture chiffrée à partir du nom du nombre, mais de donner le nombre de chiffres qui permettent de l'écrire.

Nous soulignons aussi que l'item demandant de reconnaître si un nombre positionné sur une droite graduée correspond ou non à une écriture chiffrée donnée, identique entre 2008 et 2014, relève du groupe 2 en 2008 et du groupe 0 en 2014. Un seul item ne permet pas de tirer des conclusions solides, mais cela nous amène à supposer qu'un travail plus important a été mené autour de l'utilisation des droites graduées entre les deux évaluations.

Chiffre de et Nombre de : en 2008, neuf tâches relevaient de $\mathbf{T_{CNd}}$ avec un niveau de convocation technique puisqu'il s'agissait de déterminer le « chiffre des » et le « nombre de ». Nous ne retrouvons pas, dans l'échelle des scores, la hiérarchie pouvant être établie *a priori* selon les technologies en jeu pour résoudre les tâches : les items « chiffres des » devant *a priori* être mieux réussis que ceux « nombre de » car ils peuvent être résolus avec $\boldsymbol{\tau_{pos}}$ (qui ne s'appuie que sur $\boldsymbol{\Theta_P}$) alors que les seconds appellent $\boldsymbol{\tau_{tronc}}$ (qui s'appuie sur $\boldsymbol{\Theta_P}$ et $\boldsymbol{\Theta_D}$). Or ce n'est pas le cas puisque les items « chiffres des » caractérisent les connaissances du groupe 3 et les items « nombre de » principalement celles du groupe 2 ; nous précisons de plus qu'un item « nombre de » est hors échelle. Cette différence peut s'expliquer par le format des items utilisé : les tâches demandant de déterminer le « chiffre des » sont proposées en ouvert alors que celles portant sur le « nombre de » sont en format QCM, les nombres étant de tailles comparables.

Si, localement, les items relevant de ce type de tâches sont pertinents par rapport à leur objectif d'évaluation, la comparaison entre les résultats obtenus dépend de paramètres extra-mathématiques qu'il s'agit de prendre en compte, mais qui rendent difficile la recherche de hiérarchie entre les items selon les technologies mises en jeu pour les résoudre.

Traduction EUN - EC en 2014 : il est moins surprenant de trouver les items relevant de $\mathbf{T_{Teun/ec}}$ comme caractérisant le groupe 5 en 2014. Si la praxéologie est t-convoquée sans choix de technique, les travaux de Chambris (2008) et Tempier (2013) ont montré le déficit de ce type de tâche dans l'enseignement à l'école élémentaire. Les résultats de l'évaluation viennent donc confirmer ce constat.

Le constat aurait pu être similaire en 2014 sur les tâches de dénombrement de collections non organisées (**T_{Dc}**) d'autant qu'elles mettaient en jeu les mêmes nombres, décomposés de la même façon, avec le même format (ouvert) que celles représentant **$T_{Teun/ec}$**. Or ces tâches de dénombrement caractérisent le groupe 2. Nous interprétons ce résultat de différentes façons : les tâches de dénombrement peuvent être résolues par des techniques de calcul ou mettant en jeu la numération parlée et ne relèvent pas des mêmes technologies que celles de traduction **$T_{Teun/ec}$** ; elles peuvent même être résolues par une technique de comptage, peu efficace (le cardinal étant supérieur à 100). Les élèves mobiliseraient donc prioritairement les techniques de calcul (ou s'appuyant sur la numération parlée) plutôt que celle reposant sur la décomposition du nombre. Cela signifie aussi que les élèves éprouvent des difficultés à changer de type de représentation sémiotique de façon autonome pour, à partir d'une EUN, se ramener à une autre écriture (EPD ou EAPD) pour laquelle ils sont capables d'effectuer une traduction vers l'écriture chiffrée.

Il est difficile d'aller au-delà dans l'interprétation des résultats puisqu'il manque, dans le contenu du test, la présence de type de tâches de conversion et/ou de traduction avec des registres de représentation sémiotique plus variés (**$T_{Tepd/ec}$** ou **$T_{Teapd/ec}$** n'étant pas représentés). Nous illustrons ici l'intérêt d'avoir un contenu constitué d'items de type de tâche différents, mobilisant des types de représentation variés et pouvant être résolus avec des techniques différentes pour pouvoir interpréter les résultats de façon plus approfondie et rechercher des hiérarchies dans les techniques et les technologies : les critères didactiques de validité de contenu dégagés dans le chapitre 4 permettent à l'évaluation de jouer aussi ce rôle.

V.3 OMR 3 : calculer

Nous étudions séparément les items qui relèvent du calcul posé et du calcul réfléchi ; la répartition des items relevant de l'OMR 3 selon les groupes de l'échelle figure en Annexe 2.5 de ce chapitre.

Calcul posé :

En 2014 : le bilan montre nettement que les additions sur les nombres entiers caractérisent les groupes 0 et 1 et que les soustractions caractérisent le groupe 2 ; les multiplications et les divisions à un chiffre correspondent au groupe 3 et les divisions à 2 chiffres au groupe 4. Les opérations à trous (additions et soustractions) sont réussies à partir du groupe 4. La hiérarchie pouvant être établie d'après l'analyse *a priori* selon les différentes opérations correspond à celle obtenue.

Les opérations à trous posées en 2014 et issues de l'évaluation « 1987-2007 » ne sont réussies pour la soustraction et la multiplication qu'à partir des niveaux 4 et 5 ; ce qui est cohérent avec le fait qu'elles convoquent les praxéologies de calcul posé à un niveau plus élevé que les tâches demandant l'effectuation du calcul et qu'elles soient peu usuelles en CM2.

Si nous nous référons à la construction des groupes (Dalibard & Pastor 2015), les soustractions comme les divisions par 3 (groupe 2) sur les nombres entiers seraient alors réussies par seulement 84 % des élèves[13] : ce constat rejoint ceux déjà réalisés sur la maitrise du calcul en fin d'école par d'autres évaluations et déjà évoqué dans l'introduction de la thèse. La question de l'enseignement et de la maîtrise non seulement des techniques de calcul, mais aussi des répertoires se pose encore en

[13] Plus précisément, le pourcentage de réussite à ces items est supérieur à 50 % pour les 84 % des élèves qui appartiennent aux groupes 2 et supérieurs à 2.

2014. C'est pourquoi, nous avons cherché à préciser ces résultats en étudiant les productions des élèves en calcul mental automatisé et réfléchi et en calcul posé lors de l'évaluation 2014 (paragraphe VII de ce chapitre portant sur l'exploitation secondaire des données).

En 2008 : l'évaluation ne conduit pas à cette même hiérarchie dans le calcul posé : les divisions par 3, identiques à celles de 2014, caractérisent le groupe 1, alors que les soustractions correspondent au groupe 2 et apparaissent alors, après détermination statistique, comme plus difficiles que les divisions.

Ces différences de hiérarchie entre tâches, mais aussi en termes de comparaison temporelle, entre 2008 et 2014 conduisent à constater une maitrise moindre du calcul posé en fin d'école ; cette hypothèse mérite d'être approfondie par une étude spécifique sur les productions d'élèves entre 2008 et 2014 (voir entre 1987-2007 et 2014 à partir des mêmes items issus des évaluations correspondantes) afin de mieux cerner cette évolution. Ce travail de recodage de productions que nous ne réalisons pas dans le cadre de la thèse, permettrait peut-être de constater une évolution dans les écritures des étapes de calcul (soustractions intermédiaires dans les divisions, lignes de zéros dans les multiplications, etc.) ou de repérer une évolution dans les types d'erreurs (liés à la technique ou à la maitrise des répertoires).

Calcul réfléchi : aucune hiérarchie selon les types de tâches n'apparait en 2014 comme en 2008 ; seules les tâches convoquant les praxéologies à un niveau technique caractérisent les groupes de 0 à 2, alors que les tâches convoquant les praxéologies à un niveau supérieur caractérisent tous les groupes. Si cette absence de hiérarchie peut s'expliquer par d'autres caractéristiques que le niveau de convocation des praxéologies, elle interroge aussi la sélection des tâches retenues, centrée principalement sur la détermination d'ordres de grandeur du résultat ou en 2014 sur la détermination du chiffre des unités d'un calcul donné.

En revanche, les items proposés oralement en 2008 sont classés dans les groupes selon une hiérarchie correspondant à celle établie par l'analyse *a priori* (Annexe 2.5.4) : les calculs mettant en jeu une addition caractérisant plutôt les groupes 1 et 2, ceux correspondant à une soustraction, les groupes 2 et 3. Les multiplications sont, quant à elles, réparties selon tous les groupes, avec des niveaux de convocation des praxéologies variés ; nous formulons alors l'hypothèse que les calculs réfléchis mettant en jeu des multiplications seraient davantage travaillés par rapport aux autres opérations, mais elle demande à être confirmée avec une étude plus spécifique sur les pratiques d'enseignement à l'école élémentaire.

V.4 Conclusions sur l'interprétation des résultats

En croisant localement la pertinence des items relativement à leur objectif d'évaluation et globalement les critères de validité de contenu dégagés lors de la méthodologie d'analyse avec l'échelle des scores, il est possible d'éclairer les résultats produits par la DEPP dans la note d'information relative au bilan CEDRE 2014 (Dalibard & Pastor 2015).

En effet, au vu du contenu de l'évaluation 2014 et de la position dans l'échelle des scores des items de traduction (groupe 5 pour les items relevant de $\mathbf{T}_{\mathbf{Teun/ec}}$) ou de ceux relevant de $\mathbf{T}_{\mathbf{AR}}$, il semble un peu excessif d'affirmer que les élèves du groupe 2 (et donc des groupes supérieurs) ont une « connaissance du système de numération des nombres entiers » (Ibid.). De la même façon, les items relevant de l'OMR 1 et appartenant à la classe de problèmes division-partition ou division-quotition appartiennent pour certains au groupe 3, mais le problème des « wagons » caractérise le groupe 5 de l'échelle ; affirmer que résoudre des problèmes de partage est réussi par les élèves du groupe 3, soit par 58% des élèves de fin d'école, est là encore un peu excessif. Nous comprenons la nécessité de synthétiser, dans une note d'information, des caractéristiques ciblées sur les savoirs des élèves, mais l'étude approfondie du contenu du test et la mise en relation des différents items d'un même domaine relativisent de façon importante ces résultats et montrent la nécessité d'avoir un contenu pertinent et valide d'un point de vue didactique (épistémologique et psycho-didactique) pour revendiquer des résultats qui le soient également.

Ainsi, le manque de pertinence didactique de certains items relativement à leur objectif d'évaluation (par le choix du format, des distracteurs, de la formulation de la consigne, etc.) et la sélection des items sur le domaine complet (représentativité des types de tâches, couverture du domaine, etc.) impactent la répartition des items dans l'échelle des scores et l'interprétation des résultats qui en est faite. Cela se traduit par exemple par une hiérarchie non cohérente des tâches relevant d'une même OML avec celle déterminée *a priori*. Par ailleurs, l'absence d'items relevant de certaines OML, notamment en numération, ne permet pas de repérer de hiérarchie sur les types de tâches ou sur les techniques ou encore sur les technologies.

Nous rappelons à nouveau qu'il ne s'agit pas de remettre en cause un tel dispositif d'évaluation, mais plutôt d'éprouver une méthodologie d'analyse sur une évaluation existante afin d'en préciser les résultats. La méthodologie développée dans le chapitre 4 et exploitée pour cette étude conduit à pointer localement et globalement certains manques dans le contenu de l'évaluation qui impacte la validité de son contenu : équilibre dans la répartition des items selon les OML, selon les niveaux de convocation des praxéologies, selon les niveaux de compétences ou les facteurs de complexité, etc. ; ces manques conduisent à certaines limites dans l'exploitation des résultats produits et dans leur interprétation. Cette étude donne alors des points d'appui pour permettre une évolution en amont dans la conception des items d'une nouvelle évaluation CEDRE.

Un travail de recodage de données peut permettre d'approfondir ce point : ce que nous montrons dans le paragraphe VII, après avoir présenté les items passés en 2014 sur support numérique.

VI Contenu de l'évaluation 2014 sur support numérique

Les items passés sur support numérique appartenant au domaine d'étude se répartissent sur les trois OMR, mais représentent peu de types de tâches (Tableau 15) ; nous avons intégré dans cette analyse les items de calcul mental automatisé afin de pouvoir, par la suite, étudier la connaissance des répertoires additifs et multiplicatifs par les élèves et pouvoir éventuellement expliciter certains des résultats obtenus en calcul posé ou réfléchi dans l'évaluation papier-crayon.

	OMR 1		OML 2A	OML 2B	OML 2C	OML 3A	OML 3B		Calcul automatisé	total
	T_{RP_+}	$T_{RP\_\times}$			T_{Comp}		T_{CR_+}	T_{CR_-}		
Nombre d'items	1	5	0	0	6	0	4	4	12	32

Tableau 15 - Répartition des items sur support informatique – CEDRE 2014

Nous comptons donc vingt items relevant directement de notre domaine d'étude et douze autres portant sur la connaissance des répertoires additifs et soustractifs. Comme pour la passation en papier-crayon, le principe similaire aux blocs dans les cahiers tournants est aussi utilisé lors de cette passation, tous les élèves n'ayant pas été confrontés aux mêmes items.

Les six tâches de comparaison (relevant de $\mathbf{T}_{\mathbf{Comp}}$) proposées ici sont placées dans un contexte scientifique (astronomie). Par exemple, la masse de la Terre étant donnée, il est demandé de la comparer avec celle d'autres planètes (Jupiter, Mars...). Ils viennent combler deux des manques que nous avions soulignés dans l'analyse de l'évaluation 2014 : l'absence de tâches de comparaison et le manque de tâches contextualisées dans les items de l'OMR 2 (numération). Il en est de même pour le calcul réfléchi dont le contenu, même s'il est limité et peu varié, vient compléter le contenu de l'évaluation papier-crayon en proposant des tâches sous un format ouvert dans lesquelles l'élève doit écrire le résultat du calcul et en évaluant les connaissances des répertoires additifs et multiplicatifs, à travers des items de calcul automatisé.

Les tâches de résolution de problèmes sont assez spécifiques puisque pour cinq d'entre elles, il s'agit de déterminer le quatrième élément d'une suite arithmétique ou géométrique construite à partir du cardinal de collections. La Figure 1 ci-dessous propose un exercice similaire et illustre ces tâches de résolution de problèmes.

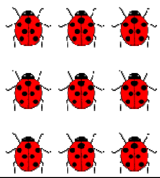
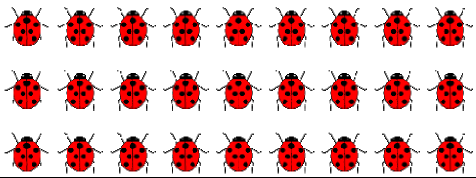
A chaque étape le nombre de coccinelles augmente. Combien de coccinelles seront dessinées à l'étape 4 ?		
		
Étape 1	Étape 2	Étape 3

Figure 1 - Exercice similaire à ceux proposés dans l'évaluation sur support numérique

Nous avons considéré ces problèmes comme étant des problèmes de transformation additive ou multiplicative (selon le type de suite) pour lesquels il faut d'abord définir la transformation à partir de la donnée d'un état initial et final, puis déterminer l'élément final, connaissant la transformation et l'état initial. Les types de tâches de calcul convoqués, en parallèle des types de tâches de modélisation et de conversion, relèvent uniquement du calcul mental automatisé : les nombres en jeu sont inférieurs à 10 et les résultats des calculs sont dans les répertoires additifs et multiplicatifs.

Le contenu proposé sur support informatique vient donc compléter avantageusement celui de l'évaluation papier-crayon ; la prise en compte de ces items pour la construction de l'échelle aurait pu ainsi permettre de compléter la caractérisation des différents groupes.

VII EXPLOITATION SECONDAIRE DES DONNÉES

Nous avons déjà explicité l'intérêt d'un travail de recodage des productions d'élèves et avons présenté à différents endroits de la thèse des productions que nous avions recodées en tenant compte des techniques réalisées ; par exemple pour montrer l'impact du codage binaire tel qu'il existe pour les évaluations CEDRE dans la résolution de problèmes (chapitre 4, paragraphe I.1.2) ou pour montrer l'impact du format de question sur le score de réussite (chapitre 4, paragraphe II.1.1). Nous avons choisi pour clôturer ce chapitre de nous intéresser aux connaissances des élèves de fin d'école en calcul (réfléchi et posé) puisque les résultats des élèves témoignent de certaines difficultés, qu'il s'agit ici de préciser : sont-elles dues à une méconnaissance des répertoires ? des techniques ? des technologies sous-jacentes ?

Pour ce faire, nous avons exploité les données récoltées dans CEDRE 2014 afin de dresser un bilan plus précis des forces et des faiblesses des élèves de fin d'école à partir d'un échantillon conséquent d'élèves (environ 2 000 élèves). Nous présentons les résultats obtenus après un travail de recodage de productions sur les items de calcul réfléchi passés sur support informatique et sur 15 items de calcul posé passés en papier-crayon. D'un point de vue méthodologique, nous ré-exploitons des items n'ayant pas été conçus spécifiquement pour une telle étude et qui, par conséquent, peuvent parfois ne pas être complètement adaptés : nous préciserons alors la limite de nos résultats au cours de notre travail.

VII.1 État des connaissances en calcul mental automatisé et réfléchi des élèves en fin d'école

VII.1.1 Description des items et méthodologie d'analyse

Pour la partie calcul mental réfléchi et automatisé réalisée sur support informatique, trois blocs de huit items ont été conçus avec une structure identique, et contenant :
- un résultat d'un répertoire additif et de deux répertoires multiplicatifs (un de multiplication et un de division) ;
- un calcul réfléchi mettant en jeu une différence (**T_{CR_-}**) et un autre avec une somme (**T_{CR_+}**) ;
- des calculs mettant en jeu des décimaux que nous n'avons pas pris en compte.

Les données sur lesquelles nous menons l'analyse sont donc constituées de 20 items (Tableau 16) répartis en 4 blocs et passés par un nombre moyen de 519 élèves :

	Bloc 1	**Bloc 2**	**Bloc 3**	**Bloc 4**
	9 + 6	5 + 4	6 + 5	8 + 5
	6 × 3	4 × 5	9 × 8	8 × 7
	42 : 6	45 : 9	12 : 4	81 : 9
	710 – 70	83 – 8	71 – 7	85 – 63
	1500 +900	540 + 905	1840 + 800	3600 + 440
Nombre d'élèves	454	406	590	626

Tableau 16 - Items de calcul automatisé et réfléchi passés sur support informatique (CEDRE 2014)

Ces items ont été passés sur un support numérique : les élèves devant écrire la réponse du calcul au bout d'une durée comprise entre 15 et 30 secondes selon la complexité du calcul ; ces modalités de passation inhabituelles pour les élèves peuvent éventuellement biaiser certains résultats, les élèves n'ayant peut-être pas eu le temps d'écrire la totalité de leur réponse.

Les données qui nous ont été fournies correspondent à l'ensemble des réponses sur chacun des items. Pour les items de calcul réfléchi, nous cherchons à retrouver des types d'erreurs caractéristiques à partir d'une analyse *a priori* et les associer à des techniques erronées. Nous avons choisi de regrouper ces réponses de la façon suivante :

- Pour les items de calcul mental automatisé :
  - Résultat exact
  - Résultat erroné correspondant au résultat correct à plus ou moins 1 ou 2
  - Résultat erroné correspondant à un résultat du répertoire précédent ou succédant (pour les répertoires multiplicatifs)

- Confusion dans l'opération (résultat de la somme au lieu du produit ou réciproquement)
- Pour les items de calcul réfléchi :
  - Résultat exact
  - Résultat exact à une unité ou à une dizaine ou une centaine près
  - Application d'une technique erronée

Par ailleurs, nous avons prévu un code correspondant à des réponses inachevées, dues à un manque de temps pour que l'élève puisse saisir en entier sa réponse. Par exemple pour le calcul de 3600 + 440, le résultat exact et attendu est 4 040, les réponses 4 ou 40 ou 404 correspondant au début de l'écriture de 4 040 sont considérées comme inachevées.

VII.1.2 Interprétation des résultats

La passation sur support numérique peut présenter des biais au niveau de la comparabilité avec un support papier-crayon et il est possible d'interroger les modalités de passation des items de calcul mental sur un tel support. Néanmoins, les types d'erreurs identifiés, ainsi que le score de non réponse (qui est peu élevé sur les premiers items, mais augmente au fur et à mesure de la passation), nous permettent d'exploiter les résultats de cette évaluation, malgré les réserves que nous venons de préciser.

Les résultats par items sont recensés en Annexe 3 : les scores moyens de réussite selon le type de calcul (Tableau17) montrent une maitrise fragile des répertoires additifs (seuls 86 % des élèves de fin d'école les connaissent) et un manque de connaissance des répertoires multiplicatifs (71,5 % réussissent lorsque le calcul est écrit sous la forme d'une multiplication et environ 50 % donnent le résultat correct lorsque le calcul est formulé sous la forme d'une division).

	Réussite
Calcul mental automatisé (addition)	85,8 %
Calcul mental automatisé (multiplication)	71,50 %
Calcul mental automatisé (division)	49,80 %
Calcul mental réfléchi additif	20,50 %
Calcul mental réfléchi soustractif	28,80 %

Tableau 17 - Scores moyens de réussite sur l'ensemble des items de calcul (automatisé et réfléchi)

Les erreurs sur les calculs automatisés ne correspondent pas à des résultats à une ou deux unités près : ces types d'erreurs ne variant qu'entre 8,3 % (pour 12 : 4) et 2 % (pour 45 : 9) des réponses. En revanche, les scores de non réponse sont plus importants atteignant 40 % sur les divisions (Annexe 3.2).

Le manque de connaissance des répertoires additifs et multiplicatifs n'est pas étranger aux résultats obtenus par les élèves en calcul posé ; ce que nous précisons dans le paragraphe VII.2, mais il peut difficilement être la seule raison des faibles pourcentages de réussite en calcul réfléchi. En effet, si l'on étudie plus précisément les erreurs réalisées, les réponses erronées correspondant au résultat attendu à une unité ou deux près (qui pourraient être la conséquence de manque de maitrise des répertoires) représentent moins de 5 % des erreurs, alors que le taux de non réponse est de l'ordre de 40 %. Ce fort taux de non réponse peut être interprété comme un manque de technique en temps limité pour pouvoir calculer des sommes ou des différences en s'appuyant sur les compléments à 10, 100, etc. ou en utilisant les propriétés de la numération. Nous ne pouvons guère interpréter davantage ces résultats avec les données en notre possession. En particulier, il est possible que le temps de réponse donné à l'élève ait été trop court et explique les forts taux de non réponse et les taux moindres de réponses inachevées (entre 4 % et 7,8 % pour le calcul mental d'une addition).

Quelle que soit la façon dont nous interprétons ces résultats, ils contrastent avec ceux obtenus dans l'évaluation papier-crayon sur le calcul réfléchi des additions et des soustractions : les items représentant $\mathbf{T}_{CR\_+}$ et $\mathbf{T}_{CR\_-}$ appartenant en 2014 principalement aux groupes inférieurs à 3 et donc étant réussis par environ 58 % des élèves. L'écart entre ces résultats vient alors questionner la pertinence des items de calcul réfléchi choisis dans l'évaluation papier-crayon, tant dans leur forme (principalement sous forme de QCM) que dans leur contenu (ordre de grandeur et chiffres des unités du résultat d'un calcul), que dans la passation elle même (les élèves pouvant utiliser une démarche relevant du calcul posé). Par conséquent, il est difficile de pouvoir établir de façon précise l'état des connaissances des élèves de fin d'école sur la maitrise des répertoires (additifs et multiplicatifs) et des techniques de calcul réfléchi. Quel est l'impact sur les résultats des modalités de passation sur support numérique ? Quel équilibre trouver dans les tâches d'évaluation pour avoir un contenu permettant d'établir un bilan précis des connaissances des élèves en calcul mental ? Quelle interprétation des résultats mener en lien avec les pratiques habituelles en classe ?

VII.2 Étude sur les connaissances en calcul posé

À la différence des codages réalisés par la DEPP ou des recodages que nous avons menés jusqu'alors, nous nous intéressons ici aux productions d'un même élève sur un ensemble d'items donnés. Nous avons eu accès aux réponses de 569 élèves sur 15 calculs posés différents ; ces calculs sont proposés sous un format ouvert, aucun n'étant sous la forme de QCM. Ces items sont assez spécifiques puisqu'ils relèvent tous de l'évaluation « 1987-2007 » ; en étudiant les réponses par élève à ces 15 items nous précisons alors, en dehors de toute utilisation d'un modèle de réponse à l'item, certains des résultats issus de l'échelle des scores et dégageons des caractéristiques de l'OM apprise relativement à cette OML.

Nous visons à travers cette étude deux objectifs :

- faire une étude, par élève, permettant de compléter les résultats globaux habituellement produits et de caractériser, sur cette OML, les praxéologies apprises afin d'émettre des hypothèses relatives aux OM enseignées ;

- préciser les résultats de l'évaluation 2014 en calcul posé : si les résultats aux items de calcul mental automatisé et réfléchi nous conduisent à supposer que bon nombre d'erreurs sont dues à un manque de maitrise des répertoires ou à une flexibilité insuffisante pour réécrire les calculs en ligne en fonction des propriétés des nombres et des opérations à utiliser, il est aussi possible que les techniques de calcul posé ne soient pas suffisamment maitrisées.

VII.2.1 Méthodologie adoptée

La méthodologie que nous adoptons est contrainte par les données qui sont en notre possession ; en particulier, selon les items, nous avons accès soit au résultat de l'élève uniquement (sans trace de sa production), soit à la production de l'élève scannée. Cette différence de format nous amène alors à coder de façon différente les réponses :
- lorsque nous avons uniquement la réponse de l'élève, nous l'avons codée en termes de réussite-échec et avons repéré des types d'erreurs lors de l'analyse *a priori* (par exemple dans le calcul d'une différence, nous avons identifié les réponses émanant d'une soustraction chiffre à chiffre) ; en ayant

accès uniquement au résultat de l'opération, il est difficile de distinguer les erreurs relevant d'une technique erronée ou de la méconnaissance des répertoires, le codage se limite donc à celui que nous avons présenté ;
- lorsque nous avons accès à la production scannée de la réponse de l'élève, il a alors été possible de distinguer les erreurs relevant de la mise en œuvre d'une technique erronée et/ou d'un manque de maitrise des répertoires.

Lorsque nous avons eu accès à la production de l'élève, nous avons ainsi pu, à partir des traces de calcul, coder les techniques erronées et les éventuelles erreurs de calcul ; nous avons aussi pu prendre en compte des erreurs relevant de la recopie (par exemple lorsqu'un élève effectue le calcul de 3 546 + 489 alors qu'il est demandé de calculer 2 546 + 489) ; ce type d'erreur ne peut pas être décelé uniquement à partir du résultat de l'élève. Les codages employés et les résultats obtenus sont décrits en Annexe 4. Le tableau récapitulatif des caractéristiques des items exploités pour cette analyse figure ci-dessous (Tableau 18).

		Types de tâches	**Accès aux productions**	**Posée ou à poser**
Add_1	235 + 362	T_{CP_+}	non	posée
Add_2	13786 + 215 + 3291		non	posée
Add_3	3435 + 2164 + 4148 + 2015		non	posée
Add_4	5392 + 629		oui	à poser
Sous_1	749 - 217	T_{CP_-}	non	posée
Sous_2	5329 - 2852		non	posée
Sous_3	2143 - 527		non	posée
Sous_4	1627 - 870		oui	à poser
Mult_1	513 × 6	$T_{CP\_\times}$	non	posée
Mult_2	247 × 36		non	posée
Mult_3	759 × 109		non	posée
Div_1	74 : 4	$T_{CP\_:}$	oui	posée
Div_2	186 : 7		oui	posée
Div_3	432 : 12		oui	posée
Div_4	1530 : 15		oui	posée

Tableau 18 - Caractéristiques des items de calcul posé

Nous précisons enfin que certains items (235 + 362, 749 - 217, 513 × 6) exploités dans ce travail de recodage ont été écartés de la construction de l'échelle parce qu'ayant un score de réussite trop élevé, leur R_{bis} étant par conséquent inférieur à 0,2 ; nous avons néanmoins pu travailler à partir des productions des élèves sur ces items.

VII.2.2 Résultats par opération

Nous présentons ci-après les résultats obtenus après recodage par opération ; à la différence des résultats présentés jusqu'alors, nous les déterminons aussi par élève.

VII.2.2.i Résultats sur les additions

Les quatre items visant à évaluer le calcul d'une somme de plusieurs termes (de 2 à 4 termes) sont réussis en totalité par seulement 53 % des élèves ; 84% des élèves en réussissent trois, alors que les scores de réussites sont bien meilleurs item par item :

- pour une addition déjà posée : le calcul de la somme de deux termes sans retenue est maitrisé par 95 % des élèves (1er item), mais lorsqu'une addition fait intervenir trois ou quatre termes et des retenues, le pourcentage de réussite baisse autour de 73 % ;
- pour une addition de deux termes, à poser, avec retenues, la réussite se situe autour de 91 %.

Ces premiers résultats, avec une étude des productions par élève, montrent le décalage entre ce constat et l'interprétation des résultats figurant dans l'échelle des scores où il est explicité que les élèves du groupe 1 (soit 96 % des élèves de fin de CM2) savent calculer une addition. Si nous nous limitons à un échantillon de 567 élèves et sans utiliser le modèle de réponse à l'item, nous observons qu'en fait, seulement 73 % des élèves réussissent à effectuer trois additions sur les quatre proposées.

VII.2.2.ii Résultats sur les soustractions

L'étude des productions des élèves à l'item Sous_4 (1 627 - 870) nous permet de constater que 4% des élèves de fin d'école utilisent la technique $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_-\_emprunt}}$; trois élèves qui appartiennent à la même classe écrivent « +10 » à côté des chiffres du premier terme lorsqu'ils utilisent $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_-\_écart}}$, les autres écrivant traditionnellement 1 et 1 à côté des chiffres concernés avec cette même technique.

Les quatre items portant sur le calcul de soustraction sont réussis par seulement 51 % des élèves et 77% des élèves en réussissent trois sur les quatre. Nous faisons, pour cette opération, le même constat que celui fait pour l'addition ; seul un élève sur deux réussit donc le calcul des quatre différences sans faire d'erreur, alors que les scores de réussites sont bien meilleurs item par item : dans le calcul d'une soustraction posée, sans retenue, la réussite est de 91% et avoisine les 75 % dans le cas d'une soustraction avec retenue, qu'elle soit ou non déjà posée.

Nous avons pu observer que seuls deux élèves procédaient systématiquement, pour chacun des rangs, en retranchant le plus grand des nombres d'unités au plus petit (sans tenir compte de l'ordre), alors que ces erreurs sont faites, item par item, par une dizaine d'entre eux sur les trois items (au maximum une quinzaine sur un item). Les techniques utilisées par ces élèves sont donc majoritairement instables sur ce type de calcul.

Si on se limite à l'étude de la soustraction pour laquelle nous avons eu accès aux productions des élèves (Sous_4), nous constatons aussi qu'une vingtaine d'élèves (3,3 %) utilisent de façon erronée $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_-\_écart}}$ et ne savent pas placer correctement la retenue (écrite au mauvais endroit et par conséquent pas bien prise en compte par la suite dans les calculs) ; il semble alors que la technologie $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{écart}}$ ne soit pas présente pour justifier la technique utilisée.

L'erreur consistant à ne pas positionner correctement les deux nombres pour effectuer la différence (alignement à gauche par exemple) est quasi inexistante (1 élève sur l'échantillon).

VII.2.2.iii Résultats sur les multiplications

Un tiers des élèves réussit le calcul des trois produits posés et deux élèves sur trois en réussissent au moins deux sur trois. Seuls 8 % des élèves ne donnent aucune réponse correcte. Par rapport aux additions et soustractions, le nombre de non réponse augmente et atteint presque 10 % pour le calcul du troisième produit.

La réussite aux multiplications varie entre 87 % (un seul chiffre au multiplicateur, répertoires du 6 maximum) et 44 % (multiplicateur à trois chiffres dont un zéro, répertoires du 9 et du 7) ; la multiplication avec un multiplicateur à deux chiffres et avec des répertoires multiplicatifs jusqu'à 7 est réussie par 61 % des élèves.

En déterminant les erreurs dues à une utilisation de $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_\times}}$ erronée et conduisant à des résultats obtenus sans décalage dans les produits partiels, nous observons que pour Mult_2, au moins 5 élèves ne prennent pas en compte qu'il s'agit d'un nombre de dizaines, alors qu'ils sont 34 au moins (environ 6 %) à ne pas savoir gérer les lignes de calculs pour Mult_3. Un travail à partir des productions des élèves permettrait sûrement de préciser ce résultat ; certaines réponses erronées ne pouvant être interprétées de façon plus précise sans accès aux productions. Il n'est pas possible d'en dire plus quant aux écritures simplifiées (avec ou sans ligne de zéros) puisque nous n'avons pas accès aux productions.

Au niveau des erreurs, il est encore plus difficile de savoir celles qui proviennent d'une mauvaise maîtrise des répertoires multiplicatifs ou additifs sans avoir accès à la production de l'élève ; nous précisons cependant, qu'en moyenne, 10 % des élèves donnent un résultat qui diffère d'un chiffre avec celui attendu et que ces erreurs relèvent *a priori* seulement d'une méconnaissance des répertoires et non d'un défaut dans la maitrise de la technique opératoire.

VII.2.2.iv Résultats sur les divisions

A la différence des autres opérations nous avons, pour celle-ci, les productions scannées de tous les élèves sur les quatre divisions qui étaient à calculer (les quatre étant déjà posées). Les élèves ayant passé la totalité des items sur les opérations ont déjà effectué 11 opérations avant de débuter les quatre divisions ; un effet de lassitude peut donc expliquer les scores assez élevés de non-réponses sur ces items, atteignant 27 % pour la dernière division (et respectivement de 12 %, 17 %, 24 % pour les divisions 1, 2 et 3).

Seuls 30 % des élèves réussissent les quatre divisions et 22 % en réussissent trois sur quatre ; encore une fois ces pourcentages sont en deçà de ce qui est annoncé dans l'interprétation de l'échelle des scores, puisque la maitrise des quatre opérations sur les entiers caractérise le groupe 3.

Nous avons déjà précisé que la consigne donnée pour effectuer ces calculs n'était pas très explicite et ne précisait pas si l'élève devait effectuer une division euclidienne ni la précision à laquelle il devait arrêter son calcul s'il effectuait une division décimale. Alors que les deux dernières (Div_3 & Div_4) sont des divisions exactes (reste nul), la première (Div_1) a un quotient décimal avec une partie décimale à deux chiffres et la deuxième (Div_2) a un quotient rationnel non décimal. Ainsi, certains élèves ont poursuivi leur calcul en calculant une valeur approchée (ou exacte quand c'était possible) du quotient décimal alors que d'autres se sont arrêtés à la division euclidienne.

Comme les non-réponses sont en nombre important, les pourcentages de réussite globaux sont, par conséquent, plus faibles que pour les autres opérations, atteignant autour de :

- 65 % pour les divisions par 4 et par 7 d'un dividende à deux chiffres et à trois chiffres (Div_1 et Div_2),

- 50 % pour une division par 12 d'un dividende à 3 chiffres (Div_3) ou pour une division par 15 d'un dividende à 4 chiffres (Div_4), mais dont le quotient entier se termine par un zéro.

L'analyse des productions d'élèves permet de discerner les erreurs qui relèvent d'un manque de maitrise des répertoires de celles relevant de la technique:

- de nombreuses erreurs de calcul liées à la méconnaissance des répertoires multiplicatifs et soustractifs conduisent à des restes intermédiaires erronés (selon la division, entre 3,2 % et 11,7 % des productions présentent des erreurs sur les calculs intermédiaires alors que $\tau_{CP\_:}$ est correcte) ;
- lorsque le dividende se termine par un zéro, au moins 10 % des élèves ne maîtrisent pas une technique opératoire de la division ($\tau_{CP\_:\_eun}$ ou $\tau_{CP\_:\_u}$) : soit ils omettent d'ajouter un zéro au quotient, soit ils placent une virgule.
- le passage à une division décimale est source d'erreur du point de vue de la technique pour environ 5 % des élèves ; ces élèves omettent de prendre en compte le passage à la partie décimale (pas de virgule) ou ajoutent un zéro au quotient après la virgule. Ce qui pose à nouveau la question de la formulation de la consigne et du codage des réponses lorsque la division n'est pas exacte : considère-t-on comme correcte une réponse où la division est correcte jusqu'au quotient entier et fausse par la suite ?
- environ 3 % des élèves obtiennent un reste supérieur au quotient à une étape du calcul ; ce qui interroge la possibilité de contrôle liée au fait que le reste doit être inférieur au diviseur ($\Theta_{div\text{-}euc}$).

Nous constatons alors que l'effectuation d'une division posée n'est pas atteinte en fin d'école ; les erreurs ne relèvent pas uniquement d'une méconnaissance des répertoires, mais aussi d'un manque de maitrise dans une technique de la division ($\tau_{CP\_:\_eun}$ et $\tau_{CP\_:\_u}$). Nous pouvons interpréter cette dernière comme liée à des technologies sous-tendant cette technique (aussi bien celles liées à la numération (Θ_{max}, Θ_P et Θ_D) que $\Theta_{div\text{-}euc}$) non adaptées.

<u>En conclusion,</u> nous constatons que le calcul posé sur les nombres entiers est loin d'être maitrisé en fin d'école ; les difficultés portant aussi bien sur la technique que sur la maitrise des répertoires pour les divisions posées. Il est plus difficile d'établir un tel constat sur les trois autres opérations à partir des données dont nous disposons. Enfin, si nous nous intéressons à l'ensemble des 15 items de calcul posé, 36,6 % des élèves en réussissent au moins 12 sur les 15 et 8,3 % en réussissent 5 ou moins ; l'effet de lassitude et de fatigue peut expliquer ces faibles scores, mais il est tout de même alarmant de constater qu'environ un élève sur trois (avec un seuil de 12 opérations correctes sur 15) ne réussit pas des opérations de calcul posé sur des nombres entiers alors qu'elles font l'objet d'un apprentissage régulier depuis le CE2 au moins (pour la division) et qu'elles sont réactivées avec des nombres décimaux.

Par ailleurs, la possibilité d'un recodage des productions d'un même élève permet de préciser les résultats obtenus dans l'évaluation, mais il est rare qu'autant d'items relevant d'une même OML soient disposés à l'intérieur d'un même cahier et permette par conséquent une telle analyse.

VIII Conclusions

VIII.1 Méthodologie d'analyse

La méthodologie développée dans le chapitre 4 et mise à l'œuvre sur les évaluations CEDRE semble adaptée à la fois pour analyser le contenu localement et globalement, mais aussi pour interpréter leurs résultats. Les évaluations CEDRE sont construites avec des enjeux d'évaluation relatifs aux programmes et conduisent, au niveau des résultats, à la construction d'échelles ; dans le cas d'évaluations construites avec un autre enjeu, la trame d'analyse serait identique et les critères de validité resteraient globalement les mêmes, mais avec quelques adaptations. Par exemple, pour l'évaluation de compétences de base en lien avec le socle commun par exemple, il serait plus pertinent de proposer des items de moindre complexité plus nombreux, mais pour lesquels il soit possible de repérer une progression dans les techniques de résolution.

Ce niveau d'analyse, en lien avec la conception de l'évaluation et l'interprétation des résultats, nécessite non seulement une analyse *a priori* similaire à celle que nous avons menée pour tous les items, mais aussi un travail préalable sur les différents domaines de l'évaluation afin de déterminer une référence (comme nous l'avons fait dans les chapitres 2 et 3). Par conséquent, la méthodologie exploitée ici dans le cadre de cette recherche semble difficilement exploitable en l'état, pour des concepteurs d'évaluation non familiers avec la didactique.

Par ailleurs, l'étude que nous avons menée présente elle-même des limites que nous avons déjà soulignées au cours de notre texte, mais qu'il est souhaitable de rappeler ici. En ne nous concentrant que sur les praxéologies relatives aux nombres entiers, nous avons écarté celles relatives aux nombres décimaux ; or, les types de tâches des trois OMR décrits pour les nombres entiers peuvent être transférés sur le domaine des nombres décimaux avec des éléments techniques et technologiques différents. Ainsi, l'équilibre que nous n'avons pas toujours rencontré sur les types de tâches relatives aux nombres entiers peut être atteint si les deux domaines (entiers et décimaux) sont regroupés pour former un seul domaine « nombres et arithmétique ». Cette limite n'est donc pas liée à la méthodologie elle-même, mais à la délimitation du domaine d'étude et à la définition de la référence.

Enfin, en nous centrant sur le domaine numérique, nous n'avons pas pris en compte l'équilibre global de l'évaluation par rapport au nombre de tâches de chacun des domaines : si le domaine numérique occupe une place importante dans cette évaluation, en lien avec celle qu'il occupe dans les programmes de l'école élémentaire, les autres domaines tels que la géométrie ou les grandeurs doivent eux aussi pouvoir être représentés par suffisamment d'items pour que leur contenu soit valide.

VIII.2 Caractérisation des OM apprises

En ce qui concerne l'interprétation des résultats, nous avons ciblé des points importants dans la caractérisation des connaissances des élèves de fin d'école et nous les synthétisons ici à partir des trois OMR de l'OM de référence.

VIII.2.1 Usage de l'arithmétique

La hiérarchie que nous observons en 2014 dans l'échelle des scores sur les types de problèmes tend à montrer que la résolution d'un problème de quotition n'est pas encore acquise en fin d'école. Nous supposons que dans les problèmes de division peu complexes et portant sur des nombres de petite taille les élèves des groupes inférieurs à 4 utilisent des techniques reposant sur des modèles additifs ou multiplicatifs : ce qui expliquerait que le problème des wagons appartienne au groupe 5, alors que des problèmes de division-partition ou de division-quotition, avec des nombres plus petits, soient réussis dès le groupe 3.

Il en est de même pour les problèmes additifs dans lesquels les calculs relationnels et numériques ne sont pas équivalents : nous constatons que lorsqu'il n'y a pas équivalence, les problèmes sont bien moins réussis et de ce fait caractérisent des groupes de plus haut niveau (ce qui est le cas en 2008 et en 2014 avec les problèmes de composition de mesures). Alors que les modèles additifs sont enseignés depuis le cycle 2 en lien avec l'opération concernée, il semble que les praxéologies de l'OMR 1 pour les problèmes additifs ($\mathbf{T_{RP\_+}}$), lorsqu'elles sont t-convoquées, caractérisent des items étant seulement réussis à partir du groupe 3.

VIII.2.2 Gestion de la numération décimale

Puisqu'en 2014, les deux seules tâches de traduction mettant en jeu des EUN ne sont maitrisées qu'à partir du groupe 5, et que les items demandant le « chiffre de » et le « nombre des » en 2008 correspondent à des groupes compris entre 2 et 6, nous en déduisons que les technologies de la numération (principalement $\mathbf{\Theta_P}$ et $\mathbf{\Theta_D}$) ne sont pas acquises pour la plupart des élèves en fin d'école (le groupe 5 représentant environ 10 % des élèves en 2014).

En revanche, les tâches de numération pouvant être traitées par des techniques mettant en jeu d'autres technologies (comme celles relevant du calcul ou de la numération parlée) semblent davantage réussies (comme en témoignent les tâches de dénombrement de collection ou de traduction EC/EAPDC). Comme nous l'avons déjà souligné, il est difficile d'interpréter davantage ces résultats dans le sens où il manque des types de tâches dans l'évaluation qui caractérisent spécifiquement les technologies $\mathbf{\Theta_D}$ et $\mathbf{\Theta_{max}}$ en complément de $\mathbf{\Theta_P}$.

VIII.2.3 Calcul arithmétique

Le manque de maîtrise dans la compréhension du système de numération décimale et dans la connaissance des répertoires conduisent logiquement à une application difficile des techniques de calcul, en particulier pour la division. Nous pouvons supposer, pour les trois autres opérations, une naturalisation de la technique, c'est-à-dire que le discours technologique s'efface pour laisser place uniquement à la technique, sans justification.

Pour la division, la technique étant complexe et enseignée depuis moins longtemps, sa mise en œuvre dans des cas spécifiques (présence de zéros dans les restes intermédiaires par exemple) n'est pas maitrisée avant le groupe 4, c'est-à-dire pour seulement 30 % des élèves. Ce constat rejoint ceux faits précédemment sur la division et sur la gestion de la numération : les techniques de division $\boldsymbol{\tau_{CP\_:\_eun}}$ et $\boldsymbol{\tau_{CP\_:\_u}}$ reposent non seulement sur la technologie de la division $\mathbf{\Theta_{div\_euc}}$, mais aussi sur celles de la numération $\mathbf{\Theta_P}$ et $\mathbf{\Theta_D}$. Si le modèle de la division n'est pas reconnu dans la résolution de problèmes, cela peut signifier que le concept même de groupement ou de partage qui sous-tend ces techniques n'est pas acquis, tout comme les aspects $\mathbf{\Theta_P}$ et $\mathbf{\Theta_D}$ de la numération décimale. Une analyse plus spécifique sur ce point serait nécessaire pour expliquer de tels résultats.

En ce qui concerne le calcul réfléchi, comme nous l'avons observé à partir des réponses des élèves, non seulement les répertoires ne sont pas toujours maitrisés, mais les différentes techniques pour gérer ce type de calcul ne semblent pas mobilisées pour de nombreux élèves. Les items présents dans l'évaluation ne nous permettent guère d'en dire plus ; en particulier ils ne permettent pas d'évaluer la réécriture des expressions arithmétiques ni de faire un état des connaissances des élèves sur l'usage des compléments ou des propriétés arithmétiques des nombres et des opérations.

L'analyse des tâches de l'évaluation prenant appui sur la praxéologie de référence a ainsi permis d'étudier la validité de contenu de l'évaluation avec une approche épistémo-didactique et de donner certains éléments décrivant les praxéologies apprises. Or, si nous nous référons à Bosch & Gascon (2005), la caractérisation des praxéologies apprises ne peut être effectuée qu'à partir des praxéologies enseignées et à enseigner. La thèse n'avait pas pour objet l'étude ces dernières, mais les constats réalisés sur les praxéologies apprises permettent néanmoins d'interroger celles enseignées : les pratiques d'enseignement du calcul automatisé et du calcul réfléchi sont-elles adaptées aux enjeux d'apprentissage visés ? Quel est le rôle du calcul réfléchi pour donner des raisons d'être au calcul algorithmique posé ? Les technologies des techniques de calcul posé sont-elles suffisamment développées et explicitées pour que les élèves aient des éléments de contrôle sur la technique qu'ils emploient et puissent la mettre en œuvre de façon correcte, dans différents domaines d'application ? Ou au contraire, sont-elles rapidement naturalisées et établies sous la forme de règles ? Enfin, comment les technologies de la numération sont-elles réinvesties dans l'enseignement des techniques de calcul posé ?

Ces questions émanent directement de l'analyse des résultats aux évaluations et demandent pour pouvoir être traitées, une analyse des pratiques des enseignants de l'école élémentaire. Ce n'est pas l'objet de la thèse mais ce questionnement ouvre une perspective de recherche sur laquelle nous reviendrons dans la conclusion.

CHAPITRE 6

MODÈLE D'ANALYSE MULTIDIMENSIONNELLE DES CONNAISSANCES NUMÉRIQUES DES ÉLÈVES

Dans les chapitres 2 et 3, nous avons organisé différentes praxéologies autour des savoirs mobilisés dans les tâches de numération, de calcul (posé et réfléchi) et de résolution de problèmes arithmétiques. Nous exploitons ici la structure de la praxéologie de référence pour concevoir un modèle d'analyse caractérisant les praxéologies apprises des élèves sur ce domaine à partir des réponses qu'ils produisent et des techniques et technologies qu'ils emploient ; un tel modèle vise à identifier des profils d'élève selon leurs connaissances sur le domaine. Il est conçu pour être exploité dans une évaluation diagnostique à visée formative se situant à l'entrée du collège ; nous décrivons dans ce chapitre un modèle d'analyse multidimensionnelle pour caractériser les connaissances des élèves sur le domaine des nombres entiers et l'exploitons par la suite dans le chapitre 7.

Nous avons montré lors de l'analyse des résultats des évaluations CEDRE l'intérêt qu'il y avait à définir les groupes de l'échelle de scores selon une hiérarchie des techniques mises en jeu pour résoudre les tâches. Si une telle description est pertinente pour une évaluation bilan, elle devient nécessaire pour une évaluation diagnostique visant à établir les besoins d'apprentissage des élèves. En effet, le codage des évaluations diagnostiques externes (évaluations nationales menées à l'entrée en 6ème ou en 2nde) menées entre 1989 et 2008 était prévu exercice par exercice selon les types d'erreurs réalisées par les élèves et pour certains exercices, selon les techniques. De tels dispositifs d'évaluation restent difficilement exploitables pour deux raisons liées :

- les exercices représentant un même domaine sont peu nombreux et par conséquent ils ne permettent pas de repérer des cohérences de fonctionnement,
- le codage, même s'il tient compte des techniques, est réalisé tâche par tâche et ne permet pas une analyse transversale des réponses conduisant à la mise en évidence de cohérences de fonctionnement.

Ainsi, les évaluations diagnostiques construites sur ce type de modèle ne permettent guère de définir les besoins des élèves d'une façon globale sur un domaine donné, le codage par exercice conduisant à des besoins ciblés selon des types de tâches. Par ailleurs, dans de telles évaluations, les productions d'élèves ne sont pas analysées au regard de l'enseignement, alors que les erreurs des élèves peuvent y trouver leur origine. Grugeon-Allys & al. (à paraître) expliquent ainsi au sujet des phénomènes de transition :

> « Les explications bien souvent entendues pour justifier cet échec sont d'ordre cognitif : les difficultés des élèves résultent de leur niveau mathématique. Une approche cognitive sert ce type de raisonnement et les conclusions associées. L'adoption d'une démarche anthropologique permet de dépasser cette vision négative, de regarder le cognitif à travers le filtre institutionnel [...].» Grugeon-Allys & al. (à paraître)

Le modèle d'analyse multidimensionnelle que nous définissons s'appuie ainsi sur une double approche anthropologique et cognitive, et demande au préalable une caractérisation des connaissances numériques des élèves sur le domaine des nombres entiers en différentes dimensions. Sur chaque dimension, sont ensuite définis des modes technologiques conduisant à un codage transversal des techniques impliquées par les élèves selon les technologies les sous-tendant. Un tel procédé permet ensuite une analyse globale des cohérences de fonctionnement des élèves (Grugeon 1995, 1997) en perspective de l'enseignement et conduit à la définition de technologies dominantes intervenant dans la définition des profils.

Afin de situer ce modèle par rapport à d'autres existants, nous présentons auparavant des modèles d'analyse conçus avec une dimension cognitive permettant d'analyser les tâches et/ou les productions des élèves. Nous avons choisi de revenir dans une première partie de ce chapitre sur des modèles basés sur des taxonomies d'objectifs, notamment deux modèles utilisés dans des évaluations externes : celui utilisé dans le dispositif EVAPM et celui des domaines cognitifs définis dans le cadre de TIMSS. Ils illustrent la façon dont une dimension cognitive peut être intégrée pour l'analyse de tâches d'évaluation ; ils ne sont pas pour autant orientés vers l'élève et ne permettent pas une analyse des productions des élèves. Nous nous y sommes déjà référé lorsque nous avons développé la méthodologie d'analyse des évaluations externes (chapitre 4).

Les modèles suivants, présentés dans une seconde partie de ce chapitre, sont orientés vers l'élève et non plus uniquement vers les tâches : ce sont des modèles développés pour l'étude de la compréhension de la numération décimale ou de la résolution de problèmes arithmétiques et sont conçus pour analyser les réponses des élèves. Ils diffèrent des précédents par leurs objectifs et par les cadres de conception qui les justifient ; si les modèles issus des taxonomies sont exploités dans des évaluations externes, ceux-ci leur sont complémentaires puisqu'ils sont centrés sur l'apprentissage du nombre. Analyser ces deux catégories de modèles permet de situer celui que nous développons.

Nous terminons ce chapitre par la description du modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves sue nous concevons : nous commençons par caractériser les connaissances numériques des élèves par quatre dimensions, puis nous définissons pour chacune d'elles les technologies impliquées selon les modes technologiques et nous concluons ce chapitre par la définition des profils.

I MODÈLES ISSUS DE TAXONOMIES D'OBJECTIFS COGNITIFS

La taxonomie de Bloom, formulée au milieu du XX^ème^ siècle, vise à hiérarchiser des objectifs selon le niveau de difficulté des opérations mentales que les élèves doivent mettre en œuvre pour atteindre ces objectifs. Deux grandes classes peuvent être déterminées dans l'ensemble des objectifs cognitifs :

> « La première relève de la connaissance et peut être considérée comme le reflet direct de l'apprentissage qui reste, dans une certaine mesure, extérieur au sujet. La seconde qui décrit

> les habiletés et capacités intellectuelles de ce dernier, traduit la compréhension ; c'est-à-dire, l'intégration personnelle des objets et l'aptitude à leur réinvestissement dans les actions du sujet. » Lerman (1978).

Ces deux classes sont décomposées en des classes hiérarchisées d'objectifs plus réduites ; l'analyse des tâches proposées dans une évaluation selon une taxonomie de ce type conduit alors à une hiérarchie des tâches selon la complexité des démarches individuelles nécessaire à leur résolution (Ibid.) La taxonomie de Bloom a fait l'objet de différentes reformulations et adaptations, en particulier pour les mathématiques par Gras (1979). La taxonomie définie par Gras a ensuite été exploitée par Bodin (2010a) dans le cadre du dispositif EVAPM ; elle a été modifiée et complétée par d'autres travaux de recherches. Nous la présentons dans un premier paragraphe ; par la suite, nous présentons de façon plus approfondie le modèle d'analyse des tâches utilisé dans l'évaluation TIMSS, puisque nous retrouvons dans ce dernier une hiérarchie en trois niveaux de complexité cognitive (savoir, appliquer, raisonner).

I.1 La taxonomie de Gras (1979) pour les énoncés mathématiques

I.1.1 L'observatoire EVAPM

Développé depuis 1986 dans le cadre de l'APMEP[1], l'observatoire EVAPM a pour objectif affiché[2] :

> « l'observation de façon continue des différentes facettes du curriculum mathématique des lycées et des collèges (curriculum souhaité, curriculum réel et curriculum atteint), et la mise en relation de ces facettes de façon tant synchronique que diachronique ».

EVAPM a mis en place, entre 1987 et 2008, des évaluations sur différents niveaux scolaires, variant selon les années et visant à évaluer les connaissances des élèves, mais aussi à questionner les opinions et les conceptions des enseignants sur l'enseignement des mathématiques. On retrouve ainsi des objectifs similaires à ceux de TIMSS, sans visée comparative entre différents pays, mais avec une méthodologie statistique différente puisque le modèle statistique de traitement des réponses employées dans EVAPM est celui des statistiques implicatives[3] et non le modèle de réponse à l'item.

I.1.2 Description de la taxonomie

La description de la taxonomie de Gras pour les énoncés de mathématiques par Lerman (1978) fait apparaître 5 niveaux : connaissance des outils de préhension de l'objet et du fait mathématique (1), analyse des faits et transposition (2), compréhension des relations et des structures (3), synthèse et créativité (4) et critique et évaluation (5). La taxonomie définie par Bodin (2010a) articule conjointement une approche cognitive et didactique puisqu'elle s'appuie sur celle de Gras et intègre des travaux :

- en didactique avec les niveaux de mises en fonctionnement des connaissances de Robert (1998) ;
- issus du cadre des évaluations PISA (OCDE 2013).

---

[1] Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

[2] Extrait de Educmath : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/etudes/repertoire-d-etudes/eval-math/evapm-pisa

[3] L'analyse statistique implicative permet de dégager des réseaux orientés de réponses c'est-à-dire de mettre en évidence des liens orientés éventuels entre les différentes réponses des enquêtés aux différentes variables du questionnaire. L'utilisation de cet outil mathématique permet d'apprécier dans quelle mesure tel comportement de réponse à tel item entraîne, statistiquement parlant, tel comportement de réponse à tel autre item (Leroyer & Bailleul 2009).

Les cinq niveaux de cette taxonomie sont donc : connaissance et reconnaissance (A), compréhension (B), application (C), créativité (D), jugement (E). Chacune de ces catégories étant ensuite partagée en plusieurs sous-catégories. Une description plus complète de cette taxonomie figure en Annexe 1 ; elle fait apparaître des catégories et des sous-catégories correspondant à des objectifs cognitifs et des exemples de types de tâches pour chacune d'elles.

Au-delà de la prise en compte de la complexité cognitive, il est aussi possible de resituer les différentes catégories définies par Bodin (2010a) par rapport aux niveaux de mise en fonctionnement des connaissances de Robert (1998[4]) : les énoncés relevant du niveau A peuvent être identifiés comme permettant d'évaluer des savoirs déclaratifs (du vocabulaire, un énoncé de propriétés, etc.), des savoirs automatisés (connaissance des répertoires, etc.) et conduisant à une mise en fonctionnement des connaissances à un niveau technique. Ceux du niveau B (compréhension) demandent une interprétation de l'énoncé et conduisent par exemple à des raisonnements à une seule étape. Au niveau C (application), les énoncés mathématiques font référence à des situations familières plus ou moins complexes ; nous estimons qu'ils demandent une mise en fonctionnement des connaissances à un niveau mobilisable puisque les situations restent familières, mais peuvent demander une adaptation de connaissances. Les énoncés du niveau D (créativité) correspondent à des situations nouvelles dans lesquelles l'élève est amené à faire preuve d'autonomie pour résoudre la tâche ; ils pourraient être associés alors un niveau de mise en fonctionnement disponible. Le dernier niveau (E) est plus spécifique puisqu'il porte sur des énoncés pour lesquels l'élève est amené à juger une production (analyse métacognitive).

La taxonomie définie dans EVAPM permet donc un classement hiérarchisé des énoncés mathématiques suivant une certaine complexité cognitive ; nous avons montré qu'il était possible de rapprocher ce classement des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances. Comme le souligne Bodin (2010a), ces taxonomies sont adaptées à l'analyse des énoncés mathématiques, mais elles ne permettent pas l'analyse de productions d'élèves. Or, dans la construction d'un diagnostic, l'étude des procédures et des réponses des élèves est nécessaire pour avoir accès à leur niveau de conceptualisation, mais aussi pour pouvoir comprendre l'origine de leurs erreurs : les besoins des élèves ne peuvent être identifiés qu'à cette condition. Cette taxonomie n'est donc pas adaptée ou du moins, pas suffisante pour pouvoir concevoir et analyser le test diagnostic que nous visons.

De plus, Bodin (2010a) a exploité cette taxonomie pour analyser le contenu de différentes évaluations externes ; elle se révèle pertinente en termes de complexité cognitive, mais pas d'un point de vue épistémologique. Comme elle ne situe pas dans une approche anthropologique, elle ne prend pas en compte les techniques et les technologies en lien avec les étapes de la transposition, ni les contraintes institutionnelles, dans l'analyse des exercices. Pour l'observatoire EVAPM, Bodin analyse les curricula souhaités, réels et atteints à l'aide d'autres outils, comme des questionnaires enseignants complémentaires à ceux des élèves.

I.2 Les domaines cognitifs de TIMSS

Nous observons que la façon dont procède Bodin (2010a) pour concevoir et exploiter les évaluations EVAPM est semblable à celle employée dans l'évaluation TIMSS. En effet, en complément des différents domaines mathématiques (nombres, géométrie, etc.), le cadre de TIMSS définit trois

[4] Nous nous référons ici aux niveaux de mise en fonctionnement des connaissances définis par Robert (1998) et non aux niveaux de convocation des praxéologies définis par (Castela 2008) dans le cadre de la TAD pour nous référer aux travaux cités par Bodin (2010a).

domaines cognitifs (*cognitive domains*) (savoir, appliquer, raisonner) valable pour tout domaine mathématique ; à chacun des énoncés correspond alors un domaine mathématique et un domaine cognitif. Chaque domaine cognitif est ensuite décliné en différentes capacités ; le Tableau 1 ci-dessous reprend les capacités portant sur notre domaine d'étude (nous avons écarté les autres, en particulier celles concernant la géométrie).

Savoir (*knowing*)	Se rappeler (*recall)*	Connaître une définition, une propriété, des notations.
	Reconnaître (*recognize)*	Reconnaître différentes représentations d'un même nombre.
	Calculer (*compute)*	Calculer avec des techniques (les quatre opérations) ; donner un ordre de grandeur d'un résultat.
	Trouver de l'information (*retrieve)*	
	Mesurer (*measure)*	Utiliser un instrument de mesure, choisir les unités appropriées.
	Classer (*classify)*	Comparer, ranger des nombres.
Appliquer (*applying*)	Selectionner *(select)*	Choisir une opération appropriée pour résoudre un problème usuel.
	Représenter *(represent)*	Représenter des données mathématiques (diagrammes, ...).
	Modéliser (*model)*	Par exemple, mettre en équation un problème.
	Exécuter (*implement)*	Suivre un programme d'instruction (par exemple un programme de calcul).
	Résoudre des problèmes routiniers	
Raisonner (*reasoning*)	Analyser (*analyze)*	Décrire ou utiliser des relations dans une situation mathématique.
	Généraliser (*generalize/specialize)*	Étendre le domaine de validité d'un résultat ou d'une procédure.
	(Integrate / Synthetize)	Faire des liens entre des informations ou entre des « faits » mathématiques.
	Justifier *(justify)*	Donner une justification en faisant référence à des propriétés connues.
	Résoudre des problèmes non routiniers	

Tableau 1 : Domaines cognitifs (*cognitive domains)* définis dans le cadre de TIMSS 2015

Nous retrouvons dans la définition des domaines cognitifs de TIMSS des similarités avec la hiérarchie existant dans la taxonomie EVAPM employée par Bodin :

- le premier niveau *savoir* correspond au niveau A de la taxonomie EVAPM *connaître et reconnaître* ;
- la progression sur les problèmes est identique : de routiniers dans *appliquer* à non routiniers dans *raisonner* ;
- la catégorie *comprendre,* définie dans EVAPM, semble se trouver dans le domaine *savoir* à travers la capacité « trouver de l'information ;
- la catégorie D *jugement* d'EVAPM n'apparait pas dans TIMSS.

Les domaines cognitifs comme les catégories d'EVAPM font apparaître une hiérarchie de complexité cognitive qui peut rejoindre les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances sur certaines des sous-catégories (ou sous-domaines), comme pour la résolution de problèmes. Cette catégorisation étant valable pour tous les domaines mathématiques, on ne peut pas rapprocher les sous-domaines (se rappeler, reconnaître, etc.) directement des genres de tâches définis dans le cadre de la TAD ; néanmoins, les exemples donnés dans la troisième colonne correspondent pour certains à des types de tâches. Nous retrouvons d'ailleurs certains de ceux que nous avons définis dans le chapitre 3 (comparer, ranger, calculer, résoudre des problèmes, etc.). Si nous pouvons trouver certaines ressemblances entre la formulation des capacités dans les domaines cognitifs de TIMSS et l'intitulé de types de tâches dans la TAD, l'usage qui en est fait est très différent, puisque l'analyse dans la TAD, menée en termes de praxéologies, permet d'étudier le savoir mathématique dans différentes institutions ; ce qui n'est pas le cas des taxonomies d'objectifs cognitifs.

Les différents domaines cognitifs et leur hiérarchie définie *a priori* permettent de catégoriser les items lors de la conception du test, mais interviennent aussi lors de l'interprétation des résultats puisque des échelles de scores sont construites non seulement pour les domaines mathématiques, mais aussi pour les domaines cognitifs (Mullis & al. 2011, p. 122).

La catégorisation des items par domaines cognitifs définis parallèlement à des domaines mathématiques telle qu'elle est réalisée dans TIMSS ou dans EVAPM est similaire à celle existant dans le cadre du bilan CEDRE école 2008 et 2014 : chaque item est aussi caractérisé par un domaine mathématique et par une des cinq compétences : identifier des notions, exécuter un calcul, traiter des données, produire en autonomie, contrôler - valider (Annexe 3 du chapitre 1). Même si cette catégorisation n'est pas formulée en termes d'objectifs ou de domaines cognitifs, mais en termes de compétences, nous soulignons tout de même que :

- les compétences *identifier*, *exécuter*, *traiter* figurent aussi comme objectifs caractérisant les premiers niveaux de complexité de ces taxonomies ;
- la dernière de ces cinq compétences (*contrôler-valider*) peut s'apparenter à la catégorie (E) de la taxonomie EVAPM ;
- la compétence *produire* s'apparente davantage à un format de questions plutôt qu'à un objectif ou un domaine cognitif. Il ne s'agit pas comme nous l'avons défini dans l'OMR1 de *produire une expression arithmétique*, mais de produire la réponse à une question donnée en format ouvert et non de reconnaître la réponse à partir des choix proposés dans un QCM[5]. Il est d'ailleurs difficile de déterminer, d'un point de vue cognitif, si une tâche de production est plus complexe qu'une tâche de reconnaissance ; nous avons abordé cette question dans le chapitre 4 à travers la spécificité du format QCM, mais nous pointons ici le fait que la compétence produire, à la différence des autres, peut difficilement être liée à une taxonomie d'objectifs cognitifs.

La définition des cinq compétences dans CEDRE école permet de classer les élèves, mais aussi de décrire les groupes en fonction de ces cinq compétences (Lescure & Pastor 2012, p. 28) ; mis à part la compétence *produire*, qui se réfère à un format de questions, les quatre autres peuvent correspondre à des objectifs cognitifs tels qu'ils sont définis dans les évaluations TIMSS ou EVAPM et ainsi être hiérarchisées selon une complexité cognitive. Nous avons consacré dans le chapitre 4 un paragraphe spécifique sur la complexité d'un point de vue didactique principalement ; nous la considérons ici de façon complémentaire avec un point de vue cognitif.

[5] Ainsi, les items de calcul posé relèvent de la compétence *produire* parce qu'ils ne sont pas sous la forme de QCM ; ils ne relèvent pas de la production d'une expression comme nous l'avons définie dans l'OMR 1.

Nous soulignons enfin que les taxonomies utilisées dans ces évaluations ne prennent pas en compte ni les programmes scolaires, ni la transposition des savoirs. L'approche systémique de TIMSS (curriculum intentionnel, mis en œuvre et atteint) ou celle d'EVAPM (curriculum souhaité, curriculum réel et curriculum atteint) se fait de façon complémentaire, mais n'est pas prise en compte dans la catégorisation de chacun des items : des questionnaires proposés aux enseignants sont complémentaires à ceux proposés aux élèves. Si ces modèles permettent de catégoriser et hiérarchiser des tâches *a priori*, quelque soit le domaine mathématique considéré, ils ne permettent pas d'analyser les productions des élèves ; nous présentons alors ci-après des modèles portant sur l'apprentissage et la compréhension du nombre et construits pour pouvoir analyser les réponses des élèves.

II MODÈLES POUR ÉTUDIER LES CONNAISSANCES DES ÉLÈVES SUR LA NUMÉRATION DÉCIMALE ET LE CALCUL

Les modèles que nous évoquons dans cette partie se situent, eux aussi, dans une approche cognitive, mais diffèrent des précédents : d'une part, ils ne portent que sur un seul domaine, celui du nombre et du calcul, et d'autre part, ils permettent de déterminer des conceptions ou la compréhension de l'élève sur ce domaine, à partir d'une analyse des réponses et des procédures utilisées. Ils sont aussi construits pour rendre compte des difficultés des élèves en les liant à l'enseignement reçu. En particulier, ils rendent compte, dans des champs de recherche différents, de la flexibilité entre différents types de représentation du nombre (écriture chiffrée, désignation orale, organisation de collections).

Dans le champ de la psychologie cognitive, Fayol (2013) définit trois courants de recherche : le courant piagétien (des années 50 aux années 80), la neuropsychologie (des années 80 au début du XXI$^{\text{ème}}$ siècle, avec le modèle de Mc Closkey & al. (1985)) et une perspective anatomo-fonctionnelle de la neuropsychologie depuis les années 1990 avec le modèle de Dehaene & Cohen (1992).

Les travaux de recherche menés au début des années 80 par Mc Closkey & al. (1985) sur des patients souffrants d'acalculie, ne pouvant plus reconnaître les chiffres ni effectuer des calculs, ont conduit à isoler les différentes composantes qui étaient affectées selon la pathologie dont souffraient leurs patients. En analysant de façon dissociée les compétences numériques de ces patients, c'est à dire en associant un type de lésion à un comportement, ils ont élaboré un modèle pour le traitement des nombres et du calcul. Même si une place centrale est accordée à la représentation sémantique du nombre dans ce modèle, il « accorde une telle importance au langage que le nombre n'apparaît plus comme une notion opératoire abstraite » (Roditi 2005). Par ailleurs, si l'écriture chiffrée, la désignation orale ou la représentation de la quantité sont pris en compte comme types de représentation, les autres types de représentation des nombres que nous avons évoqués à partir des ostensifs de la numération (écriture en unités de numération, décompositions additives, etc.) n'apparaissent pas dans la description de ce modèle.

Le modèle du triple code (Dehaene & Cohen (1992) cité par Fayol 2013) s'appuie sur trois codes de représentation du nombre : le code analogique des quantités numériques, le code verbal (ou code linguistique) et le code visuel (ou écrit) arabe. A la différence du modèle de Mc Closkey, la représentation sémantique des nombres est prise en compte dans ce modèle par la représentation analogique ; nous remarquons, de façon similaire au modèle précédent, que les types de représentation du nombre sont limités.

Ces modèles définis dans le cadre de la neuro-psychologie permettent d'expliquer des troubles et de comprendre le fonctionnement cognitif des individus, mais sans prendre en compte l'enseignement. Or, pour des élèves ne présentant pas de troubles psycho-cognitifs, nous faisons l'hypothèse qu'il est nécessaire, pour repérer leurs besoins d'apprentissage relativement à des savoirs mathématiques donnés, de mener au préalable une étude épistémologique et didactique permettant de situer la construction de ces savoirs dans une approche anthropologique.

Les deux modèles que nous présentons ci-après sont conçus à partir des observations d'élèves et pensés en lien avec l'enseignement :

- celui de Fuson & al. (1997a, 1997b) sur le développement de la compréhension du système décimal ;
- celui de Deblois (1996) qui vise à « structurer les pratiques et notions des nombres dans une perspective de développement de la compréhension » et qui est construit à partir d'une étude théorique de la numération décimale de position.

Il ne s'agit pas de recenser dans cette partie les différents modèles existants pour caractériser les connaissances numériques (écriture du nombre et arithmétique) des élèves, mais plutôt de situer l'approche que nous adoptons dans la conception de notre modèle par rapport à quelques autres.

II.1 Modèle de Fuson

II.1.1 Modèles de conception pour la numération

A partir de l'observation de travaux d'élèves, Fuson & al (1997a, 1997b) définissent des modèles de conception des élèves de l'écriture chiffrée, qu'ils étendent par la suite aux additions et aux soustractions. Une conception est définie de la façon suivante :

> « a conceptual structure in use indicates /reflects the aspects of the mathematical situations considered by the user at that moment : it captures what aspects are focused on and how these aspects are interpreted. » Fuson & al. (1997a, p. 133)

Et complétée par :

> « a conceptual structure for multi-digit numberis (a) structuring of – a particular viewing of- the quantities, numberwords, and written numerals so that these can be understood, counted, added, or subtracted in particular ways and (b) the knowledge required to understand, count, add, subtract in thoseways. » Fuson & al. (1997b, p. 740)

On comprend alors qu'une conception reflète à la fois :

- les structures conceptuelles (*conceptual structures)* que construisent les élèves,
- une catégorisation des méthodes employées par les élèves pour comprendre les nombres, traiter des additions et des soustractions avec des nombres entiers.

La conception, telle qu'elle est décrite précédemment, repose sur trois modes de représentation du nombre (l'organisation de la collection[6], les mots-nombres à travers la numération parlée et l'écriture chiffrée) organisés selon la triade de la Figure 1.

[6] Fuson & al. (1997) emploie le terme « quantity », traduit par Collet & Grégoire (2008) par « quantité » ; nous préférons la traduction de Mounier (2010) par « organisation de la collection » puisque c'est bien l'organisation de la collection qui est en jeu dans la définition dans chacune des conceptions et non la quantité elle même.
Selon le pays, la numération orale n'a pas les mêmes irrégularités et la relation entre la désignation écrite chiffrée et la désignation orale ne repose pas sur la même conception

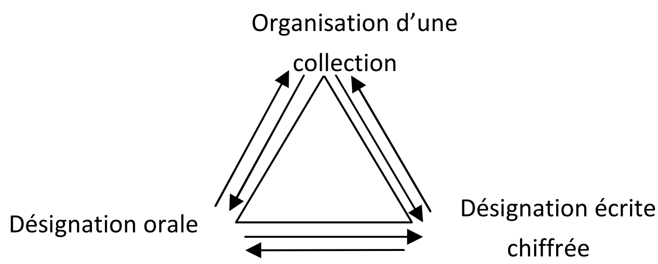


Figure 1 : Triade support au modèle de conception de Fuson & al. (1997a)

Cinq conceptions correctes et une incorrecte sont alors définies à partir de la description de chacun des trois liens bidirectionnels reliant chacun des pôles de la triade. Chacune des conceptions correspond à une étape dans le développement des conceptions de l'écriture chiffrée, mais elle ne vient pas en remplacer une autre ; elle se développe à partir des précédentes, les complète et peut varier selon la situation à laquelle est confronté l'élève. Ainsi, la conception « *decades and ones* » se développe à partir de la conception unitaire, les élèves pouvant reconnaître dans le nom du nombre ce qui relève de groupes de 10 unités et ce qui relève des unités.

Chacune des conceptions est ensuite définie à partir des liens entre les trois pôles de la triade : écriture chiffrée, désignation orale et organisation des collections. Cinq conceptions sont alors définies pour les nombres supérieurs à 10, avec par exemple :
- une première conception, définie comme « conception unitaire » est caractérisée par le fait que les collections ne sont pas organisées et ne font pas apparaitre de groupements ; les nombres écrits en chiffres sont vus dans leur globalité, comme leur désignation orale (pas de niveau de segmentation) ;
- la dernière conception est caractérisée par le fait que le fait que les élèves sont capables de passer d'une conception à l'autre rapidement, selon le type de problème. Ils perçoivent 45 aussi bien comme 4 dizaines et 5 unités que comme 40 unités et 5 unités ; l'organisation de la collection faisant apparaître 4 groupes de 10 et 5 « tout seuls ».

Enfin, une conception « concaténation », erronée, est aussi définie : la désignation écrite chiffrée est vue comme une suite de chiffres juxtaposés sans valeur de position, mais uniquement avec des valeurs unitaires. Cette conception permet d'expliquer certaines erreurs de calcul dans les opérations posées.

Si le modèle développé par Fuson porte initialement sur des nombres à deux chiffres, il peut s'étendre à des nombres de 3 ou 4 chiffres (Fuson & al. 1997a). À partir de 100, la désignation orale des nombres fait apparaître directement le nombre de centaines ou de milliers ; en ce sens, les élèves n'ont pas besoin de développer une nouvelle conception « *Sequence tens and ones* conception » pour les centaines ou les milliers, ils ont seulement besoin de construire une structure conceptuelle « *separate hundreds and separate thousands* » (Fuson & al. 1997a) prenant en compte une nouvelle base mille pour la numération parlée[7]. Ce modèle peut aussi être exploité pour étudier

[7] Si le modèle de Fuson n'est pas construit dans le cadre d'une approche anthropologique prenant en compte les différentes étapes de la transposition, Grégoire & Collet (2008, p. 85) soulignent une autre limite : « les postulats développementaux des auteurs – en particulier la conception unitaire comme point de départ de l'apprentissage chez tous les enfants et la multiplicité des chemins d'apprentissage - n'ont jamais été mis à l'épreuve d'une étude empirique rigoureuse. »

les effets d'un enseignement à travers l'étude des conceptions développées par les élèves (Fuson & al. 1997).

II.1.2 Modèles pour les additions et les soustractions

Les travaux de Fuson s'étendent aussi aux opérations pour les nombres à trois chiffres et à la résolution de problèmes arithmétiques. Le modèle développé pour les additions et les soustractions de nombres inférieurs à 10 conduit à trois niveaux de développement :

- au premier niveau, les élèves utilisent du matériel pour construire des situations d'addition et de soustraction ; c'est en manipulant les objets, puis en comptant qu'ils résolvent le problème ;
- au deuxième niveau, les élèves considèrent les trois quantités impliquées dans le problème (chacune des deux parties et le tout) et résolvent le problème par des procédures de comptage ;
- au troisième niveau, les élèves considèrent les nombres impliqués dans le problème et résolvent en utilisant des faits numériques ou des techniques basées sur la décomposition du nombre.

Ces niveaux sont établis pour des nombres inférieurs à 10 ; nous pouvons les replacer en perspective de la synthèse que nous avons réalisée au chapitre 3 sur l'évolution des techniques et des technologies à travers les programmes de l'école. Les techniques basées sur des manipulations sont remplacées progressivement par des techniques de comptage (avec la technologie $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{compt}}$), puis par des techniques de calcul (avec la connaissance des premiers répertoires en lien avec la définition des additions et des soustractions). C'est en situant ces étapes de développement par rapport à une approche anthropologique que nous pouvons penser les besoins des élèves en lien avec l'enseignement et c'est dans cette perspective que nous développons notre modèle.

II.2 Modèle de Deblois

Les enjeux du modèle de Deblois (1996), développé pour analyser le concept de la numération de position, rejoignent certaines de nos motivations :

> « Nous pouvons alors préciser aux enseignants et aux enseignantes [...] que les enfants identifiés en difficulté manifestent, par leurs actions et leurs explications, une compréhension différente de celle exigée par les programmes d'étude. S'ils ne réussissent pas à concevoir les symboles comme des représentants des différentes unités de mesure de quantité, ils ont des intuitions, posent des actions et construisent des invariants qui sont autant de manifestations d'une certaine compréhension. Ce modèle nous permet alors de placer l'erreur comme une étape dans le processus de compréhension. » Deblois (1996)

Nous retrouvons dans les propos de Deblois des perspectives identiques aux nôtres : intégrer les erreurs dans le processus d'apprentissage, les situer par rapport à l'enseignement et les interpréter comme la manifestation d'une certaine compréhension. L'approche anthropologique dans laquelle nous nous plaçons prioritairement permet alors d'interpréter les erreurs comme la mise en œuvre de techniques erronées ou inadaptées, en lien avec d'éventuelles conceptions. Les invariants auxquels Deblois fait référence précédemment sont traduits pour nous en termes de cohérence de fonctionnement : c'est en les repérant qu'il devient alors possible de déterminer les causes des erreurs à travers les techniques et les technologies utilisées et par la suite de proposer un enseignement adapté et différencié selon les besoins identifiés.

Le modèle développé par Deblois (1996) s'appuie sur une étude théorique didactique de la numération décimale. Deux aspects sont précisés sur la numération de position :
- la notation positionnelle, ou aspect lexical qui « concerne les relations créées entre les différents éléments du code que sont les chiffres » (Ibid);
- la valeur positionnelle, ou aspect sémantique qui concerne « le sens représenté par les symboles et par leur organisation : position, base, opération » (Ibid).

Deux paliers sont ensuite décrits en fonction de la coordination entre les deux aspects de la numération décimale : un premier palier dans lequel ces deux aspects interviennent sans coordination et un autre où ils sont interreliés. Pour chacun des paliers sont définis des modes de compréhension (par exemple intuitive, procédurale, abstraite) ; chacun de ces modes de compréhension est lui-même caractérisé par des procédures spécifiques mises en jeu pour des tâches portant sur un des deux aspects de la numération (notation ou valeur positionnelle).

Par exemple, nous illustrons la façon dont la *composante procédurale du concept préliminaire* est caractérisée par des procédures établies *a priori* et repérées sur plusieurs tâches mettant en jeu les deux aspects de la numération décimale.

> Notation positionnelle :
> - Procédure relative à l'organisation de la lecture : l'enfant regroupe les chiffres par paquets pour lire un grand nombre.
> - Procédure relative à l'organisation de la lecture : pour écrire un nombre, l'enfant juxtapose ses éléments
> - Procédure relative aux habiletés de comptage : l'enfant utilise ses habiletés relatives à la récitation de la comptine numérique.
>
> Valeur positionnelle :
> - Procédure relative à l'organisation de quantité : l'enfant compte des éléments et forme des groupes. Extraits de Deblois (1996)

Ce modèle permet, par conséquent, d'analyser des productions d'élèves au regard des procédures listées *a priori* et de caractériser un type de compréhension dans un des paliers. Le regroupement des procédures par composantes permet d'observer la façon dont elles évoluent pour un même élève, mais aussi de constater des différences de compréhension inter-élèves.

II.3 Mises en perspective

D'une façon générale, les modèles cognitifs (qu'ils conduisent à des taxonomies d'objectifs cognitifs ou qu'ils soient issus de la psychologie cognitifs) sont conçus à partir de l'observation de comportement d'élèves ou de personnes présentant des troubles. Même s'ils permettent d'analyser les productions des élèves au regard de l'enseignement reçu, ils ne prennent pas en compte le processus d'enseignement, et par conséquent, les étapes de la transposition. Les erreurs des élèves sont plutôt associées à des troubles dans les modèles psycho-cognitifs et à des conceptions dans les modèles cognitifs. Sans remettre en cause la définition de tels modèles, ni l'existence de troubles relevant de la dyscalculie ou de l'inumérisme, prendre en compte une approche anthropologique permet d'analyser les erreurs différemment et de les reconsidérer en les situant dans le processus d'apprentissage : il est alors possible de chercher leurs sources dans la transposition didactique des savoirs.

L'utilisation d'une technique erronée peut ainsi provenir de conceptions erronées, mais aussi de techniques non adaptées : certaines d'entre elles peuvent ne pas avoir évolué au cours de l'école et se révéler inadaptées pour certains problèmes, des technologies non maitrisées ne permettent pas d'avoir un contrôle sur la technique et conduisent à une utilisation en dehors de son domaine de validité ou de façon incorrecte. C'est en ce sens qu'une approche anthropologique apporte un point de vue complémentaire sur une approche cognitive et permet une interprétation différente des erreurs.

III DÉFINITION DU MODÈLE D'ANALYSE

Comme nous l'avons évoqué précédemment, nous faisons l'hypothèse que certaines erreurs trouvent leurs sources dans des technologies insuffisamment maîtrisées qui ne permettent pas à l'élève d'avoir des éléments de contrôle sur la technique. En effet, la technologie a non seulement comme fonction d'expliquer la technique, de faciliter sa mise en œuvre, mais aussi de la valider :

> « La fonction considérée [valider la technique] correspond à ce qui est général entendu sous le terme de justifier [...]. Les savoirs considérés établissent que la technique produit bien ce qu'elle dit qu'elle produit, que les gestes qui la composent permettent bien d'atteindre les buts qui leur sont assignés. » Castela & Romo-Vazquez (2011)

En faisant cette hypothèse, il est alors possible d'interpréter les erreurs des élèves différemment, en lien avec une utilisation erronée d'une technique. Or, la plupart des techniques sont devenues tellement naturelles en fin d'école que les éléments technologiques qui permettaient de les justifier, mais aussi de les comprendre ont disparu au fil de leur enseignement ; les techniques sont alors considérées comme des « règles » que les élèves appliquent sans questionner ni leur domaine de validité, ni le besoin éventuel de les adapter. La naturalisation de ces techniques implique que l'élève ne fasse plus apparaître les éléments technologiques qui les justifient lorsqu'il les emploie. Si nous supposons que certaines erreurs sont dues à des technologies insuffisamment maitrisées, repérer les besoins des élèves suppose alors d'identifier les technologies mises en jeu. Pour ce faire, nous recherchons les technologies impliquées dans les techniques de résolution, et les mettons en regard de l'enseignement pour définir différents modes technologiques.

III.1 Modes technologiques

Il est difficile de déterminer les technologies apprises à partir de l'analyse d'une réponse donnée à une seule tâche. Par exemple, le calcul posé de la multiplication de 7 456 par 405 avec la technique classique $\boldsymbol{\tau_{CP\_\times}}$ implique de prendre en compte le fait que le deuxième produit partiel corresponde à une multiplication par 400 et non par 40 et encore moins par 4. Nous faisons l'hypothèse qu'un élève qui effectue l'opération en prenant comme deuxième produit partiel 7456 × 40 n'a pas su adapter la technique $\boldsymbol{\tau_{CP\_\times}}$ de la multiplication posée parce qu'il ne maitrise pas suffisamment les technologies $\boldsymbol{\Theta_P}$ et $\boldsymbol{\Theta_D}$ ou $\boldsymbol{\Theta_{dist}}$ qui la sous-tendent. Or, il serait hâtif de conclure, à partir de cette seule tâche et d'une seule réponse de l'élève, qu'il ne maîtrise pas $\boldsymbol{\tau_{CP\_\times}}$ et qu'il ne connaît pas ou peu $\boldsymbol{\Theta_P}$ et $\boldsymbol{\Theta_D}$ ou $\boldsymbol{\Theta_{dist}}$: une seule prise d'information ne suffit pas pour apporter une telle conclusion, d'autant plus lorsque la tâche est une tâche de calcul posé qui, nous l'avons montré dans les chapitres 2 et 3, rend les technologies transparentes.

Par contre, en croisant les réponses de cet élève avec celles données dans d'autres types de tâches du domaine mettant en jeu les mêmes technologies, comme par exemple des tâches de calcul réfléchi ($\mathbf{T_{CR\_...}}$) pour $\boldsymbol{\Theta_{dist}}$ et de conversion ($\mathbf{T_{C\_...}}$) pour $\boldsymbol{\Theta_P}$ et $\boldsymbol{\Theta_D}$, il est possible d'avoir une vision plus précise des éléments technologiques qui font certainement défaut à cet élève pour lui permettre de contrôler la technique qu'il emploie ou percevoir les limites de la portée de la technique employée (et par conséquent, qu'il ne l'emploie pas en dehors de son domaine de validité).

Il s'agit donc de rechercher, chez un élève donné, des cohérences de fonctionnement sur un ensemble de types de tâches, caractérisé par les mêmes technologies. C'est donc un faisceau d'indicateurs que nous recherchons à travers les réponses fournies à différentes tâches. Même si les techniques employées par l'élève évoluent au cours du test, nous supposons qu'il existe des cohérences de fonctionnement permettant de repérer des technologies, à condition qu'elles soient en jeu dans un nombre suffisant de tâches. Pour notre travail, les technologies apprises résultent donc de l'interprétation que nous faisons de la réponse produite et de la technique employée au regard de l'analyse menée dans l'OM de référence.

Les erreurs des élèves ou le manque d'évolution dans certaines de leurs techniques sont explicités selon les technologies qui sous-tendent les techniques, au regard des programmes ; l'erreur est donc considérée à l'intérieur du processus de transposition et les besoins identifiés des élèves sont pensés à partir de l'enseignement. La réponse à ces besoins, à travers la mise en œuvre de parcours différenciés, comme l'a fait Pilet (2012) en algèbre, se situe alors au niveau des technologies et pas seulement au niveau des techniques.

En plus des erreurs résultant de la mise en œuvre de techniques erronées, il est possible de distinguer les techniques attendues en fin d'école de celles qui sont correctes, mais qui ne relèvent plus de ce niveau scolaire. Au regard de l'OM de référence et des attentes des programmes scolaires (synthèse portant sur l'évolution des techniques et des technologies réalisée à la fin du chapitre 3), il est dès lors possible de définir quatre modes technologies hiérarchisés :

1 : technologies correctes et attendues à un niveau donné ;

2 : technologies correctes, mais non attendues à ce niveau : il s'agit de technologies qui n'ont pas évolué (ou pas suffisamment) au cours du processus de transposition à l'école élémentaire et qui conduisent à des techniques correctes, mais pas à celles attendues au niveau considéré ;

3 : technologies incorrectes mais faisant référence à des technologies attendues ou qui sont incomplètes pour pouvoir justifier les techniques employées ;

4 : technologies incorrectes, mais sans faire référence à des technologies ou qui se réfèrent à du comptage. Les technologies de comptage peuvent caractériser les techniques attendues en fin d'école maternelle, mais pas les techniques attendues en fin d'école.

Pour chaque tâche, nous codons la réponse de l'élève selon ces modes technologiques ; les technologies impliquées localement dans chacune des tâches sont ensuite étudiées de façon transversale au test avec un codage adapté basé sur une analyse *a priori* de la tâche et la détermination de classes de réponses anticipées. A travers les réponses proposées à différentes tâches mettant en jeu les mêmes technologies, il est dès lors possible de repérer des cohérences de fonctionnement et de les interpréter en termes de technologies dominantes en lien avec la hiérarchie présentée précédemment.

III.2 Cinq dimensions caractérisant les connaissances arithmétiques

Nous nous référons dans une première partie aux travaux de Grugeon (1995) sur le développement du diagnostic *Pépite* en algèbre. La caractérisation des connaissances des élèves en algèbre par des dimensions outil et objet et le développement du modèle utilisé pour le diagnostic sont ensuite adaptés et transférés à notre domaine d'étude. Ainsi, pour comprendre la façon dont nous construisons le modèle d'analyse multidimensionnelle, nous présentons d'abord celui utilisé en algèbre dans *Pépite* ; nous l'adaptons ensuite à notre domaine pour définir les dimensions qui permettent de caractériser les connaissances sur les nombres entiers (numération et arithmétique) des élèves de fin d'école. Nous évaluerons ensuite la maitrise de chacune de ces dimensions à partir d'un codage défini par les quatre modes technologiques précédents.

III.2.1 Caractérisation des connaissances arithmétiques attendues en fin d'école

Comme référence au diagnostic en algèbre, Grugeon (1997) définit les différents aspects de la compétence algébrique de la façon suivante :

> « Les connaissances algébriques sont structurées selon deux principales dimensions non indépendantes et partiellement hiérarchisées, les dimensions outil et objet :
>
> - sur le plan outil, la compétence algébrique s'évalue à travers la capacité à produire des expressions et des relations algébriques pour traduire un problème, à les interpréter puis à mobiliser les outils algébriques adaptés à sa résolution. Différents contextes, différents domaines d'emploi mettent en jeu la dimension outil de l'algèbre aussi bien dans des tâches de formulation, de résolution que de preuve, l'« arithmétique traditionnelle » n'en étant qu'un parmi d'autres. Un intérêt tout particulier est porté aux capacités à utiliser l'algèbre comme outil pour prouver des conjectures numériques.
> - sur le plan objet, il est nécessaire de prendre en compte le double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques pour les manipuler formellement en redonnant sa juste place à la dimension technique (instrumentale et sémiotique) du traitement algébrique. La compétence algébrique s'évalue à travers des capacités techniques d'ordre syntaxique et sémiotique et des capacités interprétatives mettant en jeu dénotation, interprétation et sens des expressions algébriques. Elle peut aussi s'évaluer en termes de capacité à manipuler des ostensifs pilotés par des non ostensifs.
>
> À ce niveau scolaire, nous devons prendre en compte deux autres éléments pour évaluer la compétence algébrique :
>
> -L'entrée dans l'algèbre suppose une rupture épistémologique avec l'arithmétique.
>
> - L'efficacité algébrique requiert une capacité à interpréter des expressions algébriques à la fois au niveau procédural et structural et à développer une nécessaire fonction d'adaptabilité dans l'interprétation des expressions pour en faire des usages variés. » Grugeon (1997)

Grugeon (1997) s'appuie d'abord sur les dimensions outil et objet de l'algèbre, ce que nous retrouvons dans notre domaine avec la structure de la praxéologie de référence. Une dimension *outil* peut être prise en compte dans le modèle par une dimension relative à la production d'expressions arithmétiques en lien avec la résolution de problèmes et une dimension *objet* par des dimensions relatives à la numération et au calcul ; nous retrouvons ici à partir de la structure de la praxéologie de référence ces deux dimensions. La dimension *outil* en ce qui concerne les opérations se réfère à l'OMR 1, et pour le nombre, elle se réfère à des types de tâches spécifiques de l'OMR 2 ; les dimensions *objet* correspondent aux OMR 2 et 3 pour la numération et le calcul.

Par ailleurs, dans l'extrait précédent, Grugeon évoque la nécessité d'une rupture épistémologique avec l'arithmétique pour que l'entrée dans l'algèbre se réalise. De la façon similaire, l'entrée dans l'arithmétique suppose une rupture avec le comptage ; en effet, pour que l'élève puisse produire des expressions arithmétiques, mettre en œuvre des techniques de calcul, il doit renoncer au comptage et abandonner des « modèles collections » pour utiliser des modèles arithmétiques. Du point de vue de l'enseignement, nous avons observé (synthèse du chapitre 3) que les techniques de calcul remplaçaient progressivement, au début de l'école élémentaire, les techniques de comptage avec une évolution des technologies en parallèle. Si cette évolution n'a pas eu lieu, l'entrée dans l'arithmétique ne s'est pas réalisée (comme l'entrée dans l'algèbre peut ne pas s'être réalisée si l'arithmétique est toujours présente).

Les connaissances des élèves en numération et en arithmétique, en fin d'école, peuvent être structurées autour de :
- une dimension *outil* qui s'évalue à travers la capacité à mobiliser le nombre pour résoudre un problème (de dénombrement, de position, etc.) ou à produire des expressions arithmétiques pour résoudre des problèmes arithmétiques ;
- une dimension *objet* pour :
  - le nombre où une flexibilité entre les différents types de représentation du nombre est nécessaire pour pouvoir comprendre les techniques de calcul,
  - le calcul, posé et réfléchi, où interviennent non seulement la maitrise des répertoires (tables, compléments), mais aussi la connaissance de propriétés arithmétiques des opérations.

A la fin d'école, entrée du collège, nous prenons aussi en compte :
  - la nécessaire rupture entre le comptage et le calcul,
  - l'entrée progressive dans un formalisme arithmétique passant par l'utilisation du signe d'égalité comme relation d'équivalence entre deux expressions arithmétiques et par l'emploi progressif des parenthèses.

Le modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances des élèves sur les nombres entiers est alors défini à partir de cinq dimensions issues de cette caractérisation.

III.2.2 Définition des cinq dimensions

Dans le modèle d'analyse de *Pépite* en algèbre, cinq dimensions sont définies (Annexe 2) : une première, spécifique, porte sur la qualité du résultat (correct, partiel ou non attendu, incorrect) et les quatre autres sur des caractéristiques des connaissances algébriques :
- utilisation des règles d'écriture et de réécriture algébrique,
- utilisation des lettres,
- type de justification,
- traduction entre deux registres de représentation.

Nous adaptons ces dimensions à notre domaine d'étude, mais nous formulons les critères d'évaluation de ces dimensions différemment, en exploitant des technologies impliquées selon des modes différents. Ainsi, pour chacune des dimensions (hormis la première, spécifique), nous déterminons quatre modes technologiques selon la hiérarchie présentée précédemment ; le quatrième est spécifique aux technologies de comptage.

Comme dans *Pépite*, une première dimension concerne la qualité de la réponse et trois codages lui sont associés : 1 (bonne réponse) - 9 (réponse fausse) - 0 (pas de réponse). Les techniques ou technologies employées pour résoudre la tâche ne sont pas prises en compte dans cette dimension.

La dimension **(UA) « usage de l'arithmétique »** est relative à la résolution de problèmes arithmétiques (OMR 1 : produire une expression) et à l'aspect outil de l'arithmétique pour modéliser un problème.

Les deux dimensions suivantes sont relatives aux OMR 2 et 3 et permettent d'accéder aux technologies apprises relativement aux praxéologies de ces OMR. Une dimension **(N)** que nous qualifions de **« gestion des propriétés de la numération décimale »** et une dimension **(CA)** qui correspond au« **calcul arithmétique»** liée à l'OMR 3.

Enfin, une dimension plus transversale porte sur la réécriture des expressions « **(RE) réécriture d'expressions arithmétiques »** pour décrire l'emploi du signe égal et l'éventuel usage des parenthèses. Cette dernière dimension n'est pas identifiée en tant que praxéologie dans la structure de l'OM de référence mais elle permet d'identifier le type de formalisme dans lequel l'élève se situe. Même si la réécriture d'expressions arithmétiques n'apparaît pas comme prioritaire dans les programmes de l'école élémentaire, les difficultés que rencontrent les élèves au collège dans l'utilisation des égalités sont avérées. Par conséquent, évaluer les écritures symboliques des élèves va permettre de les faire évoluer en les amenant, par exemple, à passer de représentations avec des flèches ou des arbres dans des suites de calcul à des suites égalités ou encore à progresser vers une utilisation plus experte du signe égal.

Les dimensions **UA**, **N** et **CA** sont ainsi définies relativement aux OMR de la praxéologie de référence et sont caractérisées par des technologies. Par exemple, les technologies relatives à la dimension **N** sont celles de la numération ($\boldsymbol{\Theta_P}$, $\boldsymbol{\Theta_{Max}}$ et $\boldsymbol{\Theta_D}$) ; c'est en référence à ces éléments que nous définirons les technologies impliquées dans chacune des tâches, relativement aux quatre modes. Même si les éléments technologiques qui sous-tendent les techniques restent implicites dans de nombreuses productions d'élèves, en particulier à ce niveau scolaire, c'est en repérant les techniques utilisées sur différentes tâches et les technologies impliquées qui leur sont associées qu'il est dès lors possible d'inférer des technologies dominantes. A la différence des modèles de Fuson (1997a, 1997b) ou de Deblois (1996), nous nous situons dans la thèse en fin d'apprentissage et dans une approche plus globale qui prend en compte non seulement la numération mais aussi le calcul et la résolution de problèmes arithmétiques. La définition des modes technologiques sur chacune des dimensions est donc pensée de façon transversale.

Après cette description générale du modèle et des principes théoriques sur lesquelles il est fondé, nous explicitons désormais la façon dont nous caractérisons les modes technologiques selon chacune des dimensions d'analyse, relativement à la définition de la praxéologie de référence et des programmes. Nous montrons ensuite comment nous définissons des profils d'élèves à partir des technologies dominantes repérées sur chacune des dimensions. Nous nous limitons dans ce chapitre à une description théorique du modèle et du profil et l'exploitons dans le chapitre 7 à travers la conception du test diagnostique.

IV DESCRIPTION DES DIMENSIONS ET DES TECHNOLOGIES IMPLIQUÉES

Pour décrire les dimensions **UA**, **N**, **CA**, nous présentons les technologies qui les caractérisent selon les modes technologiques ; nous procédons différemment pour la dimension **RE** qui est transversale au domaine.

IV.1 Dimension UA : usage de l'arithmétique

Il s'agit dans cette dimension de considérer l'arithmétique en tant qu'*outil* intervenant pour modéliser les situations dans le cadre de la résolution de problèmes ; ce qui nous permet, dans la définition des profils, de déterminer si l'élève est capable de mobiliser l'arithmétique pour résoudre un problème et si tel est le cas, d'étudier le modèle choisi : est-il adapté à la situation ? Correspond-il à ce qui attendu en fin d'école ? Pour définir les différents modes technologiques pour cette dimension, nous exploitons la hiérarchie des modèles définie dans l'étude de l'OMR 1 « produire une expression ».

Pour déterminer le modèle mis en jeu par l'élève, nous nous intéressons aux écritures produites lors de la conversion du problème. Ce sont ces écritures, par le type de représentation qu'elles permettent du modèle, qui nous donnent accès à ce dernier ; la technologie **$\Theta_{RP\_Prod\_ea}$** justifiant la cohérence entre les écritures produites et les relations existant entre les données du problème. Les différentes technologies impliquées nous permettent ainsi de déterminer le niveau d'arithmétisation des relations en jeu dans les problèmes arithmétiques, tout en sachant que ce niveau évolue sur une longue période (Brun 1990).

Il est d'ailleurs établi que les modes de représentation du problème évoluent au cours du processus d'enseignement (et d'apprentissage) ; les élèves peuvent employer des techniques de résolution différentes selon le type de relation en jeu dans le problème et ils sont capables de résoudre le problème sans entrer dans une production de calculs (Conne 1984, De Corte & Verschaffel 1987, Fagnant 2008) :

> « les enfants ne sont pas toujours capables de produire un calcul correct lorsqu'ils sont confrontés à un problème, et ceci même s'ils l'ont résolu correctement. » Fagnant (2008)

Il est en effet possible, au début de l'école primaire, que des problèmes soient résolus correctement par comptage sans que les élèves n'associent d'opération à cette technique. Il est alors nécessaire que les techniques de comptage évoluent vers des techniques de calcul pour pouvoir traiter des problèmes mettant en jeu des nombres suffisamment grands, le comptage n'étant plus une technique adaptée pour les problèmes arithmétiques proposés en fin d'école.

L'évolution des techniques de comptage vers celles de calcul se traduit aussi par une évolution dans les modes de représentation symbolique du problème ; pour pouvoir mettre en œuvre une technique de calcul il n'est pas nécessaire de produire une expression arithmétique (un schéma peut suffire), mais un mode de représentation figuratif n'est pas adapté (et est davantage associé au comptage).

Nous définissons alors les technologies impliquées dans la production d'expressions arithmétiques en fonction des modèles mathématiques mis en jeu (selon la définition mathématique de l'opération retenue) et évoquons les modes de représentation symbolique qui peuvent être privilégiés. Afin d'illustrer les différentes technologies impliquées sur cette dimension, nous avons choisi des extraits de productions d'élèves sur le problème suivant, déjà présenté dans le chapitre précédent.

On veut transporter 185 voitures par le train. On charge 9 voitures par wagon. Combien faut-il de wagons pour transporter toutes ces voitures ?

Pour ce problème de division-quotition, représentant **$T_{RP\_\times}$**, il est attendu en fin d'école que l'élève reconnaisse un modèle de division, produise une écriture arithmétique correspondant à une division et par la suite effectue le calcul de la division. Lors de la définition de l'OMR 1, nous avons établi que plusieurs modèles pouvaient être associés à ce type de problème :

- un modèle de division conduisant à une écriture pour rechercher le quotient de la division (potence ou expression en ligne du type 185 : 9 = ...),
- un modèle multiplicatif correspondant à la recherche du nombre manquant dans l'égalité : 9 × ... = 185 par encadrement ou essais successifs avec des multiples du diviseur,
- un modèle soustractif (ou additif) correspondant aux différences successives : 185 - 9 = 176 ; 176 - 9 = ..., ou par bloc : 185 - 90 = 95, 95 - 90 = 5

- et enfin un modèle de comptage où l'élève fait apparaître des groupements de 9 éléments.
- A partir de cet exemple, nous présentons les technologies impliquées pour chacun des modes de cette dimension.

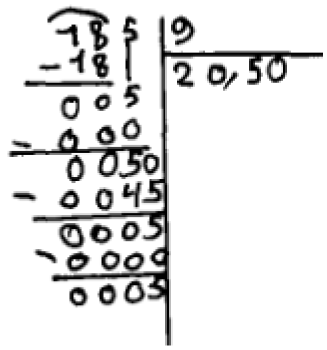
Technologies impliquées dans UA1 et UA2

Le problème est modélisé par une relation arithmétique mettant en jeu l'opération correspondant à la structure du problème ; par conséquent la conversion du problème amène à l'écriture d'un calcul en ligne ou posé à l'aide de la technologie $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{RP\_Prod\_ea}}$. La définition mathématique des opérations constitue alors la technologie visée pour UA1 et UA2 puisque le modèle choisi est issu de la définition de l'opération. La conversion du problème conduit ensuite à une écriture arithmétique ; pour un problème de division, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_calc}}$ permet de produire un calcul sous la forme d'une division (potence) ou d'écrire une relation du type a : b = ... lorsque la division est exacte alors que $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_op\text{-}trou}}$ conduit plutôt à un encadrement du dividende à partir des multiples du diviseur ; elle peut conduire à une écriture du type a ×... = b.

Technologies impliquées dans UA1 : le modèle mathématique choisi est celui correspondant à l'opération permettant de calculer directement le résultat menant à la réponse au problème. La technologie $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{RP\_Prod\_ea}}$ justifie l'écriture d'expressions arithmétiques adaptées qui amènent au résultat (même s'il doit être ensuite interprété pour répondre au problème posé) ; dans le cas de problèmes de division, l'écriture produite est donc de la forme a : b = ... ou d'un calcul posé d'une division[8]. Dans le cas d'un problème soustractif, l'écriture est de la forme a - b = ... ou le calcul posé est celui d'une soustraction.

Dans l'exemple du problème des wagons, ces écritures prennent la forme de calcul en ligne (Production 1) ou de calcul posé (Production 2) ; ce n'est pas dans cette dimension que nous évaluons le statut accordé au signe égal, mais dans la dimension RE.

Production 1

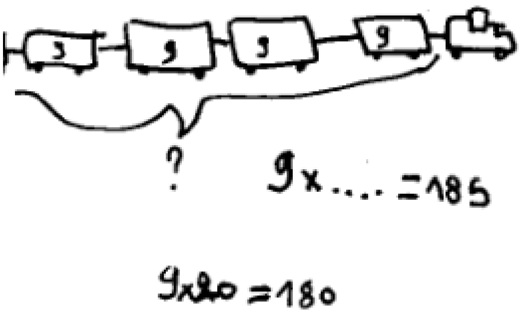


Production 2

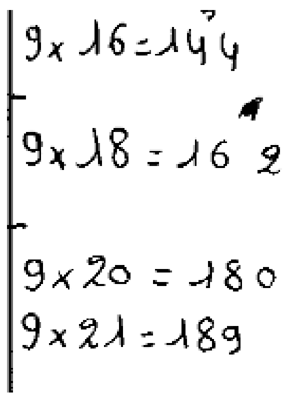
Technologies impliquées dans UA2 : comme pour UA1, la technologie $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{RP\_Prod\_ea}}$ justifie l'écriture d'expressions arithmétiques adaptées ; par contre, à la différence des technologies caractérisant UA1, les modèles mathématiques correspondants à UA2 ne sont pas ceux conduisant directement au résultat. Par exemple, un modèle additif peut être utilisé dans un problème qui conduit à un calcul soustractif (ou un modèle multiplicatif pour un calcul de division). Les écritures arithmétiques produites peuvent être des écritures « à trous » adaptées ou des calculs visant à déterminer le nombre manquant sans pour autant que l'opération à trous ne soit écrite.

[8] Ou avec une disposition faisant apparaître q et r comme nous l'avons observé dans le chapitre 3 pour l'écriture proposée dans J'apprends les maths CM2 (Brissiaud & al. 2010b).

Par exemple, dans le problème de division des wagons, une technologie dominante UA2 peut être caractérisée par la mise en œuvre d'un modèle multiplicatif qui conduit à deux types d'écriture :
- une multiplication à trous (Production 3),
- des calculs de produits successifs correspondant à des essais erreurs plus ou moins bien organisés comme en témoigne la Production 4.



Production 3



Production 4

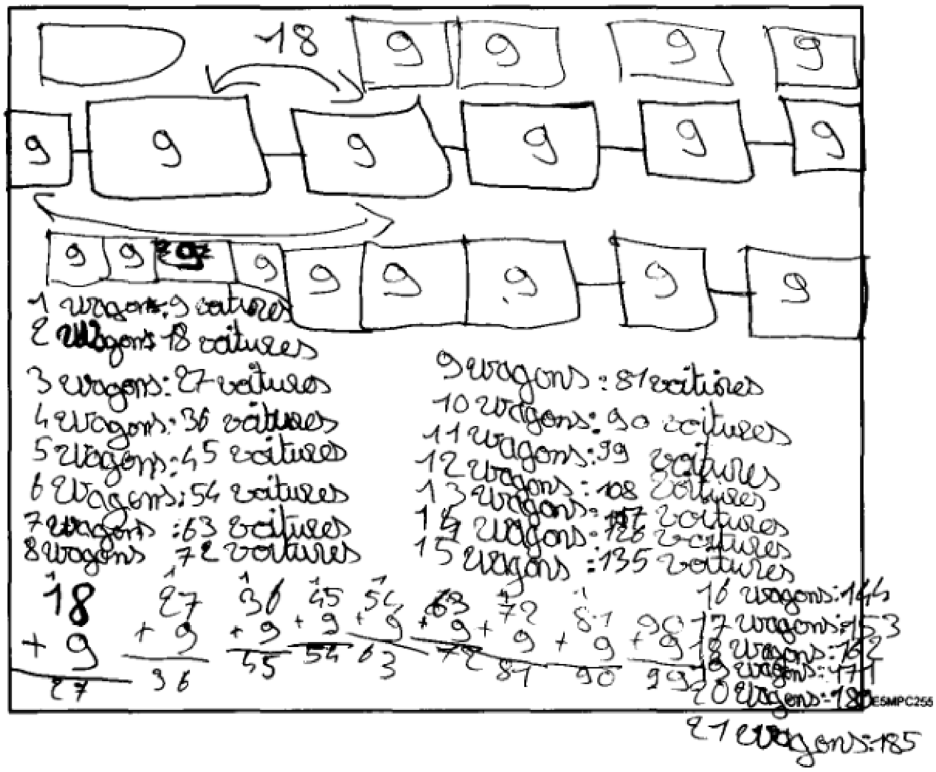
Pour un problème additif conduisant à une soustraction écrite sous la forme d'une addition à trous, cela se traduirait de la même façon par des calculs de sommes par essais-erreurs.

Les technologies définies à partir des modèles mathématiques sont donc celles qui correspondent aux définitions des opérations mathématiques :
- la soustraction existe en tant que modèle dans UA1, alors qu'elle est liée à un modèle additif dans UA2 ;
- la division existe en tant que modèle dans UA1, alors qu'elle est liée à un modèle multiplicatif dans UA2.

<u>Technologies impliquées dans UA3 :</u>

UA3 est principalement défini par rapport aux problèmes multiplicatifs et de division. A la différence des technologies caractérisant UA1 et UA2, les modèles mathématiques impliqués ici ne sont pas des modèles multiplicatifs ou de division, mais additifs ou soustractifs. Les technologies définies à partir des modèles mathématiques ne sont donc pas celles qui correspondent aux définitions des opérations mathématiques telles qu'elles existent en fin d'école, mais plutôt celles exploitées lors de l'introduction de ces opérations : la multiplication est introduite à partir d'additions itérées et la division à partir de soustractions successives. Ces modèles n'ont donc pas évolué depuis le cycle 2, où la multiplication et la division ont été introduites ; ce sont eux qui caractérisent les technologies impliquées dans UA3.

Ce qui conduit à des écritures de calculs de sommes ou de différences, justifiées grâce à $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{RP\_Prod\_ea}}$. Ces écritures peuvent être accompagnées de mode de représentations autres que celui des écritures arithmétiques, comme des schémas ou des représentations figuratives mettant par exemple en évidence les groupements réalisés, comme la Production 5 suivante pour le problème des wagons.

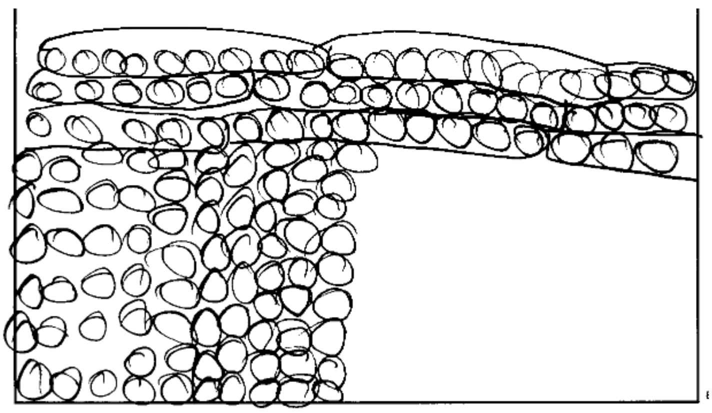


Production 5

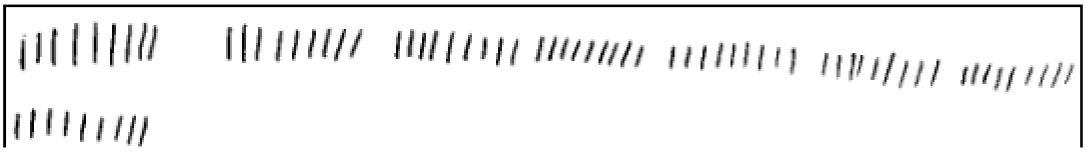
<u>Technologies impliquées dans UA4 :</u>

La technologie impliquée dans UA4 ne relève pas d'un modèle associé à la définition d'une des quatre opérations. Les modèles impliqués sont des « modèles collections » qui conduisent à du comptage $\mathbf{\Theta_{Compt}}$ pour les problèmes additifs ou soustractifs, ou à du groupement/partage pour ceux relevant des structures multiplicatives : les nombres considérés dans les problèmes peuvent être conçus comme correspondant à des collections d'éléments unitaires, comme l'illustrent les productions 6 et 7 suivantes.

La technologie $\mathbf{\Theta_{RP\_Prod\_ea}}$ est absente puisqu'il n'y a aucun calcul, les modes de représentation du problème sont figuratifs et non symboliques : ils ne conduisent pas à la mise en œuvre d'un calcul mais à des représentations iconiques où les collections sont représentées avec les différentes unités qui la composent comme l'illustrent les Productions 6 et 7.



Production 6



Production 7

Nous observons, à la différence des représentations de la production 6, que les 180 voitures sont ici dessinées et que les groupements s'effectuent en prenant 9 éléments ; ces 9 éléments étant déterminés par comptage. La technologie de comptage **Θ_{Compt}** est donc celle principalement impliquée dans UA4.

IV.2 Dimension N : gestion de la numération décimale

De nombreuses recherches issues de la didactique (évoquées par Tempier 2013, p. 10) montrent les difficultés que peuvent rencontrer les élèves avec la numération écrite chiffrée, en particulier, lorsqu'ils ne maitrisent pas l'aspect décimal de la numération. Ces constats sont confirmés par les résultats aux évaluations CEDRE en fin d'école, comme nous l'avons observé dans le chapitre précédent.

Nous avons pu observer dans la description de l'OML 2 que la technique de position **$\tau_{pos,}$** définie pour des tâches de traduction mettant en jeu des écritures canoniques, était généralisée à une technique de juxtaposition **τ_{juxt}** définie par Tempier (2013) pour les types de tâches de conversion en général ; si **τ_{pos}** est sous-tendue principalement par **Θ_P**, **τ_{juxt}** est justifiée par les trois principes de la numération décimale, à savoir : **Θ_P**, **Θ_{Max}** et **Θ_D**.

Par ailleurs, nous avons pu observer que la justification des techniques de conversion ou de traduction pouvait aussi reposer sur des arguments de calcul, notamment pour les types de tâches mettant en jeu des décompositions additives ou en puissances de dix ; ces technologies de calcul étant elles-mêmes justifiées par **Θ_P**, **Θ_{Max}** et **Θ_D**. La technique **τ_{pos}** peut être utilisée en dehors de son domaine de validité si les technologies **Θ_{Max}** et **Θ_D** ne sont pas présentes pour en percevoir sa limite et comprendre la nécessité d'employer **τ_{juxt}**. Les technologies impliquées dans N1 à N3 sont donc liées aux éléments de la numération **Θ_P**, **Θ_{Max}** et **Θ_D**.

La technologie de comptage **Θ_{Compt}** peut intervenir en parallèle de la récitation de la comptine, avec comme éventuel support une file numérique où sont écrits les premiers nombres de la comptine : l'écriture chiffrée des nombres est alors uniquement associée à la désignation parlée pour des petits nombres.

Technologies impliquées dans N1 et N2 :

Les trois éléments de la numération écrite chiffrée **Θ_P**, **Θ_{Max}** et **Θ_D** et le principe de la numération orale **Θ_{np}** sont les technologies impliquées dans N1 et N2. Ce qui se traduit par une maitrise des techniques relatives aux types de tâches de l'OMR 2. La distinction entre N1 et N2 sur cette dimension est relative aux technologies qui sous tendent les techniques :

Technologies impliquées dans N1 : la justification et la production des différentes techniques reposent sur des arguments technologiques relevant strictement de la numération c'est à dire **Θ_P**, **Θ_{Max}** et **Θ_D**.

Technologies impliquées dans N2 : des technologies de calcul (elles-mêmes issues de techniques de la numération) peuvent être mises en œuvre pour expliquer certaines techniques.

Dans une tâche représentant un type de tâche de traduction $\mathbf{T}_{\mathbf{Tepd/ec}}$ (écriture en décomposition selon les puissances de 10 - écriture chiffrée) comme par exemple : *écrire en chiffres : 45 × 100 + 36 × 10 + 20.*

La technique $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{juxt}}$ conduit à :
45 × 100 + 36 × 10 + 2 × 10
= 4 × 1 000 + 5 × 100 + 3 × 100 + 6 × 10 + 2 × 10 si l'on convertit l'écriture en une écriture canonique
= 4 × 1 000 + 8 × 100 + 8 × 10
= 4 880

L'ostensif EPD donne à voir des relations de calcul à la différence de l'ostensif unité de numération qui donne plutôt à voir des technologies de la numération ; il est d'autant plus difficile de déterminer les technologies sous-jacentes à la technique que les productions des élèves ne vont pas faire apparaître ces étapes de raisonnement. Nous estimons néanmoins qu'une production montrant le calcul d'une des multiplications ou de la somme (4 000 + 800 + 80) témoigne qu'une des trois éléments $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{P}}$, $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{Max}}$ ou $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$ de la numération est remplacé par une technologie de calcul.
Une des technologies $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{P}}$, $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{Max}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$ peut alors ne pas être stabilisée lorsque les praxéologies ne sont plus convoquées à un niveau technique et que les tâches sont complexes.

La distinction entre les technologies impliquées dans N1 et N2 est assez difficile à cerner puisque de nombreuses techniques ont été naturalisées durant tout le processus d'enseignement de la numération à l'école et que le discours technologique tend à disparaître en fin d'école. Comme nous l'avons observé sur certains types de tâches, en particulier celles où le nombre apparaît comme outil dans la résolution de problèmes de dénombrement, des techniques relevant de la numération ou du calcul ($\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{Dc\text{-}ec}}$ ou $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{Dc\text{-}calc}}$) peuvent apparaître et permettre ainsi une distinction de ces deux modes.

On peut aussi distinguer ces deux modes dans les types de tâches de multiplication ou de division par une puissance de 10 dont les techniques respectives $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{multPD}}$ ou $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{divPD}}$ peuvent être justifiées par des éléments technologiques relevant de la numération (en lien avec $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{juxt}}$ ou $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{tronc}}$) ou avec des arguments relavant du calcul. Il est néanmoins délicat de ne se baser que sur des arguments de ce type qui sont le plus souvent issus de règles naturalisées (ajout ou retrait de zéros dans l'écriture du nombre lors de multiplication ou de division par une puissance de 10 sans référence aux technologies de la numération).

<u>Technologies impliquées dans N3 :</u>

L'aspect décimal $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$ de la numération écrite chiffrée n'est pas toujours mobilisé, en particulier lorsque les tâches deviennent plus complexes, ce qui empêche la généralisation de la technique de position $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{pos}}$ à la technique de juxtaposition $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{juxt}}$: les relations entre les unités de différents ordres ne sont pas connues, ce qui ne permet pas la réussite aux tâches de conversion et de traduction $\mathbf{T}_{\mathbf{T.../...}}$ lorsqu'elles ne mettent pas en jeu des écritures canoniques. Les techniques $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{comp}}$ relatives aux types de tâche de comparaison ou de rangement ne sont pas disponibles, dans le sens où elles peuvent être maitrisées sur des écritures canoniques, mais ne peuvent être adaptées si d'autres écritures sont mises en jeu.

Par exemple, dans la tâche : *écrire en chiffres 4 centaines 12 dizaines et 5 unités*, la réponse correcte produite à l'aide de $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{juxt}}$ conduit à 525 après la conversion de 12 dizaines en 1 centaine et 2 dizaines justifiée par $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{Max}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$. Sans ces deux éléments, et en généralisant de façon incorrecte $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{pos}}$ à des écritures non canoniques, la réponse produite est 4 125.

$\mathbf{\Theta_P}$ est donc la technologie qui caractérise N3 : le principe de position permet de justifier les traductions d'écritures canoniques en écriture chiffrée (et réciproquement), ce qui explique que les élèves réussissent des tâches de ce type à l'aide de $\boldsymbol{\tau_{juxt}}$, mais échouent dès lors qu'il faut utiliser $\boldsymbol{\tau_{juxt}}$ parce qu'ils ne maitrisent pas le principe décimal $\mathbf{\Theta_D}$.

<u>Technologies impliquées dans N4 :</u>

L'écriture chiffrée des nombres ne repose pas de façon assurée sur les principes de la numération décimale. Les élèves mettent en jeu une technologie de comptage $\mathbf{\Theta_{Compt}}$ associant l'écriture chiffrée d'un nombre avec sa désignation parlée, en lien avec la comptine numérique. Nous avons montré, lors de la description des praxéologies, que $\boldsymbol{\tau_{Compt}}$ pouvait être employée pour résoudre des tâches représentant des types de tâche de numération, mais avec une portée très limitée ; une des conditions sur les nombres étant d'être petits. Les technologies de la numération $\mathbf{\Theta_P}$, $\mathbf{\Theta_{Max}}$ et $\mathbf{\Theta_D}$ ne sont pas construites, ce qui amène l'élève à percevoir la désignation écrite chiffrée comme une suite de chiffres juxtaposés sans valeur de position, mais uniquement avec des valeurs unitaires.

Une telle dominante technologique peut être associée à la conception « concaténation » définie dans le modèle de Fuson. D'un point de vue de l'enseignement, les technologies de comptage peuvent continuer à vivre en classe, même à la fin du cycle 2, en particulier pour le dénombrement de petites collections ou lors de la résolution de problèmes additifs ou soustractifs (ce qui est lien avec la dimension CA que nous explicitons ci-après).

IV.3 Dimension CA : calcul arithmétique

L'arithmétique est considérée ici avec un aspect *objet*, cette dimension étant relative au calcul, aussi bien posé que réfléchi. Les technologies impliquées sont donc définies à partir des praxéologies de calcul définies dans l'OMR 3 et sont aussi en lien avec les technologies impliquées dans la dimension N. Comme les techniques des types de tâches de calcul se justifient, en partie, par des propriétés de la numération décimale (mais aussi par les propriétés des opérations), les modes technologiques de ces deux dimensions sont construits en cohérence.

<u>Technologies impliquées dans CA 1 et CA 2 :</u>

CA1 et CA2 sont caractérisés par la maitrise des répertoires additifs et multiplicatifs (tables, compléments, etc.).

Les technologies de la numération $\mathbf{\Theta_P}$, $\mathbf{\Theta_{Max}}$ et $\mathbf{\Theta_D}$ sont considérées comme impliquées dans CA1 et CA2 et sont en lien avec celles de la dimension numération (N1 et N2) ; en cohérence avec N2, les technologies de la numération dans CA2 sont présentes, mais peuvent ne pas être assurées et conduire à des écritures intermédiaires moins expertes que dans CA1.

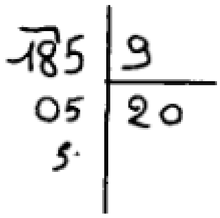
Les technologies des opérations communes à CA 1 et CA 2 sont celles des propriétés des opérations ($\mathbf{\Theta_{comm\_+}}$, $\mathbf{\Theta_{ass\_+}}$, $\mathbf{\Theta_{ass\_\times}}$, $\mathbf{\Theta_{comm\_\times}}$, $\mathbf{\Theta_{dist}}$, $\mathbf{\Theta_{div\text{-}euc}}$) qui découlent directement de leur définition. Par conséquent, les techniques de calcul posé sont maîtrisées quelque soit l'opération et sont simplifiées pour CA1. Les techniques de calcul réfléchi sont adaptées aux nombres intervenant dans le calcul et reposent aussi bien sur les propriétés des opérations que sur des décompositions arithmétiques ou canoniques des nombres.

La distinction entre les technologies impliquées dans CA1 et dans CA2 est caractérisée par :
- une convocation assez experte des technologies de la numération est caractéristique de CA1 : elle conduit par exemple à une simplification des écritures dans le calcul posé ;

- une maitrise, pour les opérations, de propriétés plus variées et plus élaborées pour CA1. Par conséquent, les techniques correspondant à CA1 reposent aussi sur des éléments technologiques plus complexes articulant des propriétés des opérations, mais aussi celles de la numération.

Par exemple, pour la soustraction, l'emploi de la technique $\boldsymbol{\tau}_{\text{CR\_-\_écart}}$ relève de CA1 (parce qu'elle mobilise $\boldsymbol{\Theta}_{\text{écart}}$ qui est indépendant des propriétés de la numération décimale) alors que l'emploi de $\boldsymbol{\tau}_{\text{CR\_-\_dec\_eapdc}}$ relève de CA2 puisqu'il peut être justifié en se ramenant à des décompositions en unités de numération[9].

Technologies impliquées dans CA1 : les technologies impliquées dans CA1 sont donc celles de la numération (avec une maîtrise experte) et les propriétés arithmétiques des opérations. Elles conduisent alors à la mise en œuvre de techniques de calcul posé et de calcul réfléchi adaptées au niveau d'enseignement auquel on se place et simplifiées lorsque c'est possible. En particulier, il n'y a pas de lignes de zéros non nécessaires lors de l'emploi de $\boldsymbol{\tau}_{\text{CP\_}\times}$ ou $\boldsymbol{\tau}_{\text{CP\_:}}$ (comme dans la Production 8) ; en revanche, dans la division, les soustractions intermédiaires peuvent être écrites.



Production 8

Les techniques de calcul réfléchi sont adaptées et mobilisent des technologies avancées reposant à la fois sur des décompositions arithmétiques ($\boldsymbol{\Theta}_{\text{dec\_+}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\text{dec\_}\times}$) et canoniques des nombres, mais aussi sur les propriétés arithmétiques des opérations (lorsque le calcul s'y prête). Les techniques de CA1 sont caractérisées par leur complexité (à la différence de celles de CA2), en particulier elles sont relatives à des propriétés qui portent sur deux opérations telles que $\boldsymbol{\Theta}_{\text{sous-somme}}$, $\boldsymbol{\Theta}_{\text{sous-diff}}$, $\boldsymbol{\Theta}_{\text{div-euc\_mult}}$…

Technologies impliquées dans CA2 : elles sont caractérisées par les technologies de la numération, mais avec une convocation moins experte que dans CA1 ; ce qui se traduit par une mise en œuvre des techniques de calcul posé correcte, mais avec des écritures qui ne sont pas simplifiées (lorsque c'est possible) en particulier en laissant apparaître les lignes de zéros.

Les technologies des opérations caractérisant CA2 sont celles liées à la numération et aux propriétés de base des opérations : associativité, commutativité, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et définition de la division euclidienne. Ces propriétés permettent de justifier les techniques de calcul posé des quatre opérations et sont mobilisées, de façon implicite, dans les techniques de calcul réfléchi mettant en jeu des décompositions canoniques.

Les techniques de calcul réfléchi sont celles basées uniquement sur les propriétés de la numération par le biais des décompositions canoniques, même quand ce ne sont pas les plus adaptées relativement aux nombres mis en jeu ; par exemple, retrancher 199 se fait en mobilisant $\boldsymbol{\tau}_{\text{CR\_-\_dec\_eapdc}}$, c'est-à-dire en retranchant 100, puis 90 puis 9, alors que $\boldsymbol{\tau}_{\text{CR\_-\_excès}}$ se révèle, selon les nombres mis en jeu, plus adaptée (soustraire 200 puis ajouter 1).

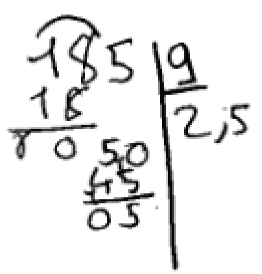
[9] Nous ne rappelons pas ici l'ensemble des techniques de calcul réfléchi qui ne reposent que sur les propriétés de la numération ; nous renvoyons pour cela aux tableaux de synthèse réalisés à la fin de la description de chacun des types de tâche en calcul dans l'OML 3B (chapitre 3).

Nous avons explicité la différence entre les technologies impliquées dans CA1 et dans CA2 et la façon dont cette différence se traduit au niveau des techniques mises en jeu. La différence entre CA1 et CA2 ne peut être détachée de la connaissance des répertoires qui interviennent dans chacune des techniques. En effet, la mobilisation de techniques de calcul réfléchi reposant sur la décomposition arithmétique des nombres (correspondant à CA1) demande une maitrise plus importante des répertoires additifs et multiplicatifs que celles liées à des décompositions canoniques (qui correspondent plutôt à CA2).

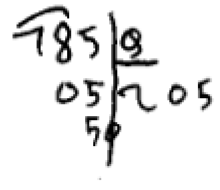
Technologies impliquées dans CA3 :

Le mode technologique N3 est caractérisé par $\boldsymbol{\Theta_P}$; $\boldsymbol{\Theta_{Max}}$ et $\boldsymbol{\Theta_D}$ n'étant pas toujours mobilisés. Nous retrouvons donc une même caractérisation pour CA3. Les technologies des opérations sont présentes en ce qui concerne l'associativité ou la commutativité de l'addition et de la multiplication ($\boldsymbol{\Theta_{comm\_+}}$, $\boldsymbol{\Theta_{ass\_+}}$, $\boldsymbol{\Theta_{ass\_\times}}$, $\boldsymbol{\Theta_{comm\_\times}}$), mais les autres propriétés ne sont pas suffisamment stables pour constituer des éléments technologiques permettant une utilisation correcte des techniques et une compréhension de leur portée. De la même façon, les répertoires additifs et multiplicatifs sont mobilisés, mais avec des erreurs.

Les technologies impliquées dans CA3 se traduisent par la mise en œuvre incorrecte de calculs techniques, aussi bien en calcul posé (notamment pour les multiplications et les divisions) que réfléchi ; leur portée peut être étendue de façon inadaptée ou elles ne sont pas correctement utilisées. Ce qui engendre des erreurs :
- de calcul, liées à un manque de maitrise des répertoires ;
- dans les techniques de calcul posé : $\boldsymbol{\Theta_D}$ n'étant pas suffisamment stable, les techniques de calcul, justifiées en partie par cette technologie ne peuvent pas être correctement mises en œuvre et peuvent conduire à des erreurs de retenue, d'alignement dans les calculs posés d'additions ou de soustractions... Dans les cas classiques où la technique est suffisamment naturalisée pour être opérationnelle, elle peut être utilisée correctement dans des cas simples, sans retenue, mais ne l'est plus dès que les calculs font, par exemple, intervenir des nombres avec des zéros ou font apparaître des zéros dans les calculs intermédiaires ; ce qu'illustrent les Productions 9 et 10 suivantes.



Production 9



Production 10

Des erreurs peuvent aussi apparaître dans le calcul posé des multiplications avec des écritures de produits partiels qui ne sont pas adaptés (leur écriture présentant un manque de zéros ou un nombre incorrect de zéros, elles traduisent en partie l'absence de $\boldsymbol{\Theta_D}$) ;
- dans les techniques de calcul réfléchi : des propriétés arithmétiques des opérations peuvent être mobilisées, mais de façon incorrecte. Par exemple, retrancher 19 revient à appliquer $\boldsymbol{\tau_{CR\_-\_excès}}$ de façon inadaptée, c'est à dire à retrancher 20 puis 1 ; l'élément technologique $\boldsymbol{\Theta_{sous\text{-}diff}}$ justifiant $\boldsymbol{\tau_{CR\_-\_excès}}$ n'étant pas maîtrisé, même implicitement. De la même façon, l'emploi de $\boldsymbol{\tau_{CR\_\times\_dist}}$ pour

calculer 21 × 37 se traduit par 20 × 37 + 1et non par 20 × 37 + 37 ; la technologie $\boldsymbol{\Theta_{dist}}$ n'étant pas suffisamment construite pour produire un calcul correct.

<u>Technologies impliquées dans CA4</u> :

Comme pour N4, la technologie de comptage $\boldsymbol{\Theta_{Compt}}$ est celle définie comme étant impliquée dans CA4. Les élèves effectuent des calculs à partir du comptage et éventuellement de groupements ou de partage, mais ne mobilisent pas les répertoires additifs ou multiplicatifs. En lien avec N4, les propriétés de la numération ne sont pas reconnues ; par conséquent, aucune des techniques opératoires ne peut être justifiée.

Les techniques de calcul posé ne peuvent pas être maitrisées puisqu'elles sont sous-tendues principalement par les propriétés de la numération. Ce qui se traduit par l'effectuation de calculs avec des techniques infondées mathématiquement, comme par exemple :
- dans la somme de 426 + 38, il s'agit ajouter le 4 avec le 3, le 2 avec le 5 et donner comme résultat 798 (ce qui correspond à une méconnaissance de $\boldsymbol{\Theta_P}$, $\boldsymbol{\Theta_{Max}}$ et $\boldsymbol{\Theta_D}$),
- dans le produit de 526 par 38, un raisonnement du type : 8 × 6 =48 ; j'écris 8 et je retiens 4 ; 3 × 2 = 6 et 6 + 4 =10 ; j'écris 0 et je retiens 4, que j'ajoute à 5, j'obtiens 9. Le résultat serait alors de 908.

Les tâches de calcul réfléchi peuvent être résolues par la technique de comptage $\boldsymbol{\tau_{compt}}$; si un des nombres est suffisamment petit, cette technique peut se révéler efficace, mais son domaine d'efficacité est restreint. Elle peut d'ailleurs être favorisée par des élèves qui ne maitrisent pas les répertoires additifs.

<u>En conclusion</u>, la description des modes technologiques de la dimension CA sont articulés avec ceux de la dimension N. La hiérarchisation des technologies est alors assurée verticalement sur chacune des dimensions, mais aussi horizontalement sur chacun des modes, amenant ainsi une cohérence au modèle d'analyse multidimensionnelle tel qu'il est défini. Nous le mettons en évidence sur l'ensemble du modèle en conclusion de cette partie.

Une dernière dimension intervient dans le modèle d'analyse, de façon globale sur l'ensemble des praxéologies et porte sur la réécriture des expressions arithmétiques. Si nous ne la considérons pas comme une dimension centrale dans notre travail, puisque les attentes institutionnelles concernant les écritures arithmétiques ne sont pas fortes, la réécriture d'expressions est omniprésente dans la résolution de nombreuses tâches, ce qui explique que nous la prenions néanmoins en compte de façon transversale.

IV.4 Dimension RE: réécriture d'expressions arithmétiques

Cette dimension concerne principalement l'utilisation du signe égal et des symboles opératoires dans la réécriture d'expressions arithmétiques. Nous conservons l'expression de « technologies impliquées » pour caractériser les différents ostensifs intervenant dans la réécriture d'expressions arithmétiques et leur emploi.

<u>Technologies impliquées dans RE1 et RE2 :</u>

Les expressions arithmétiques mobilisent des symboles opératoires utilisés correctement et le signe égal est employé comme relation d'équivalence.

Technologies impliquées dans RE1 : le signe égal est utilisé à la fois comme relation d'équivalence entre deux expressions arithmétiques mettant en jeu plusieurs opérations et à la fois pour exprimer la décomposition d'un nombre. Les expressions arithmétiques peuvent éventuellement comporter des parenthèses.

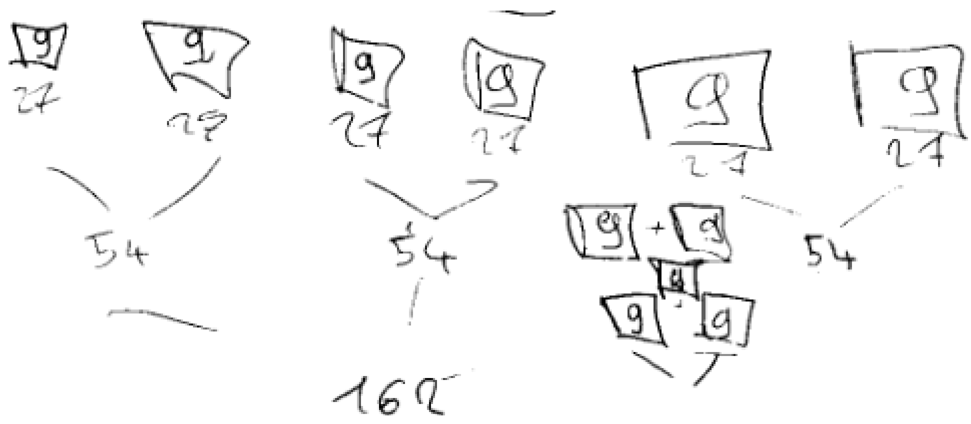
La symétrie de la relation d'égalité est caractéristique de RE1 : le signe égal pouvant être utilisé à la fois pour exprimer la décomposition de 126 sous la forme 126 = 100 + 26 et à la fois pour traduire 120 + 6 en une écriture chiffrée (120 + 6 = 126) ; il en est de même avec des décompositions arithmétiques.

Technologies impliquées dans RE2 : le signe égal est utilisé comme relation d'équivalence, mais à la différence de RE1, les relations arithmétiques correspondant à la succession de plusieurs opérations sont écrites sous la forme de plusieurs égalités séparées ; la symétrie de la relation d'égalité est moins maitrisée. Le signe égal comme annonciateur de résultat est privilégié.

Par exemple, dans RE1, les étapes du calcul 126 + 14 peuvent apparaître sous la forme des écritures suivantes :
126 + 14 = (100 + 26) + 14 = 100 + 26 + 14 = 100 + 40 = 140

Alors que dans RE2, les écritures sont de la forme :
26 + 14 = 40 ; 126 + 14 = 140

Des ostensifs transitoires comme les arbres à calcul (production 11 ci-dessous) ou des flèches peuvent être utilisés pour représenter les calculs menés en particulier lors du calcul réfléchi. Ils caractérisent aussi RE2 lorsque les flèches ou les branches annoncent un résultat (comme dans la Production 11), mais peuvent aussi caractériser RE1 lorsque les flèches ou les branches traduisent une décomposition arithmétique ou additive en numération.



Production 11

Technologies impliquées dans RE3 :

Le signe égal est utilisé sans respecter l'équivalence, ce qui peut se traduire par :
- des égalités enchaînées (Production 12) entre des expressions arithmétiques signifiant que la transitivité de la relation d'équivalence n'est pas respectée ;
- des égalités fausses entre un calcul et un résultat comme dans la Production 13.

Production 12

Production 13

Nous avons évoqué dans le chapitre 3 la difficulté spécifique aux divisions euclidiennes pour écrire le résultat de l'opération ; ce résultat n'est pas donné par un nombre, mais par un couple de nombres. Par conséquent, l'écriture d'une égalité entre l'expression arithmétique correspondant au calcul (ici 185 : 9) et son résultat dans la division euclidienne (ici un quotient égal à 20 et un reste égal à 5) passe par l'écriture de l'égalité caractéristique de la division euclidienne (ou des écritures transitoires comme vues dans la collection J'apprends les maths CM2 dans le chapitre 3). Ce qui est une source de difficulté en fin d'école et peut expliquer la présence d'égalités fausses lorsque la division n'est pas exacte (comme celle de la production 13).

Technologies impliquées dans RE4 :

Aucune ou très peu d'utilisation du signe égal ou d'autres ostensifs ne sont mobilisés pour symboliser correctement les calculs effectués : les résultats des différents calculs sont écrits les uns à la suite des autres sans qu'il n'y ait de signes entre eux. Nous retrouvons à ce niveau une cohérence avec UA4, N4 et CA4 définis dans les autres dimensions : comme les techniques de comptage persistent et que les opérations sur les nombres ne sont pas construites, l'utilisation des symboles opératoires et du signe égal ne font pas sens et donc n'apparaissent pas ou très peu dans les écritures produites.

V TECHNOLOGIES DOMINANTES ET DÉFINITION DES PROFILS

A la fin de la description de la dimension CA nous avons observé la cohérence du modèle selon les quatre modes et relativement aux trois dimensions UA, N, et CA. Nous montrons dans cette synthèse la cohérence du modèle de deux façons différentes :

- par dimension : nous reprenons de façon synthétique les technologies impliquées dans chacune des dimensions afin de mettre en évidence les hiérarchies suivant les quatre modes technologiques ;

- sur l'ensemble des dimensions et du modèle à partir des quatre modes technologiques.

En repérant des cohérences de fonctionnement sur l'ensemble des tâches proposées, il sera ensuite possible de définir des technologies dominantes et de caractériser les connaissances des élèves de fin d'école sur la numération et l'arithmétique des nombres entiers selon les caractéristiques définies dans le paragraphe III.2.1 ; nous les exploitons pour définir les profils des élèves dans la dernière partie. Ainsi, nous retrouvons par le biais de ce modèle, sur le domaine de la numération et de l'arithmétique des entiers, une structure similaire à celle définie en l'algèbre par Grugeon (1997).

V.1 Synthèse par dimension

Nous récapitulons de façon synthétique dans le Tableau 2 les technologies caractérisant chacune des dimensions et les technologies dominantes correspondant à une certaine hiérarchie : celles qui sont correctes et attendues (1), correctes mais non attendues (2), incorrectes ou incomplètes (3), de comptage (4).

Dimension	Technologies	Technologies impliquées
UA Usage de l'arithmétique	- $\Theta_{RP\_Prod\_ea}$ - Modèles mathématiques sous jacents à la définition des opérations - Comptage : Θ_{compt}	1 : $\Theta_{RP\_Prod\_ea}$ - modèles mathématiques adaptés conduisant à un calcul posé ou à une écriture en ligne du type a : b = ... 2 : $\Theta_{RP\_Prod\_ea}$ - modèles mathématiques adaptés conduisant à un calcul posé à trous ou à une écriture en ligne du type : a × ... = b. 3 : $\Theta_{RP\_Prod\_ea}$ - modèles additifs et soustractifs uniquement (pas de modèle multiplicatif ni de division). 4 : Θ_{compt}
N Gestion de la numération décimale	- Technologies de la numération : Θ_P - Θ_D et Θ_{max} - Technologies du calcul - Comptage : Θ_{compt}	1 : Θ_P - Θ_D et Θ_{max} 2 : Θ_P - Θ_D et Θ_{max} selon le contexte avec présence de technologies de calcul. 3 : Θ_P 4 : Θ_{compt}
CA Calcul arithmétique	- Technologies de la numération : Θ_P - Θ_D et Θ_{max} - Technologies du calcul : propriétés des opérations - Décomposition arithmétiques (Θ_{dec_+} et $\Theta_{dec\_\times}$) - Comptage : Θ_{compt} - *Connaissance des répertoires*	1 : Θ_P - Θ_D et Θ_{max} - décompositions arithmétiques Θ_{dec_+} et $\Theta_{dec\_\times}$ - propriétés complexes des opérations. *Connaissance des répertoires.* 2 : Θ_P - Θ_D et Θ_{max} selon contexte - pas de décomposition arithmétique à l'aide de Θ_{dec+} et $\Theta_{dec\times}$. - propriétés de base des opérations. *Connaissance des répertoires.* 3 : Θ_P Propriétés des opérations non maitrisées. *Référence aux répertoires, mais avec des erreurs*. 4 : Θ_{compt}
RE Réécriture d'expressions arithmétiques	- Statut du signe =	1 : signe = comme relation d'équivalence ; écriture arithmétique unique pour traduire une suite d'opérations. 2 : signe = comme annonciateur de résultat ; écritures arithmétiques pas à pas séparés ou utilisation d'ostensifs transitoires. 3 : signe = non perçu comme relation d'équivalence (égalités enchaînées ou fausses) 4 : pas d'utilisation du signe =.

Tableau 2 - Synthèse des technologies et hiérarchie des technologies dominantes par dimension

V.2 Synthèse par modes technologiques

Le modèle d'analyse multidimensionnelle permet de regrouper les technologies impliquées, non plus par dimension, mais sur l'ensemble du domaine (numération et arithmétique des entiers) selon les quatre modes technologiques. Le Tableau 3 suivant présente alors cette synthèse.

Modes technologiques	Technologies impliquées
1 : technologies correctes et attendues au niveau fin d'école	**- $\Theta_{RP\_Prod\_ea}$** - Modèles mathématiques adaptés conduisant à un calcul posé ou à une écriture en ligne du type a : b = ... **- Θ_P** - **Θ_D** et **Θ_{max}** - Décompositions arithmétiques **Θ_{dec_+}** et **$\Theta_{dec\_\times}$** - Propriétés complexes des opérations. - Connaissance des répertoires. - Signe = comme relation d'équivalence ; écriture arithmétique unique pour traduire une suite d'opérations.
2 : correctes, mais non attendues au niveau fin d'école	**- $\Theta_{RP\_Prod\_ea}$** **- $\Theta_{RP\_Prod\_ea}$** - modèles mathématiques adaptés conduisant à un calcul posé à trous ou à une écriture en ligne du type : a × ... = b. **- Θ_P** - **Θ_D** et **Θ_{max}** selon le contexte avec présence de technologies de calcul. - Pas de décomposition arithmétique à l'aide de **Θ_{dec_+}** et **$\Theta_{dec\_\times}$**. - Propriétés de base des opérations. - Connaissance des répertoires. - Signe = comme annonciateur de résultat ; écritures arithmétiques pas à pas séparés ou ostensifs transitoires.
3 : incorrectes, mais faisant référence à des technologies attendues ou qui ne sont pas complètes	**- $\Theta_{RP\_Prod\_ea}$** - Modèles additifs et soustractifs uniquement (pas de modèle multiplicatif ni de division). **- Θ_P** - Propriétés des opérations non maitrisées. *- Référence aux répertoires mais avec des erreurs*. - Signe = non perçu comme relation d'équivalence.
4 : incorrectes, mais sans faire référence à des technologies ou qui se réfèrent à du comptage.	**Θ_{compt}** - Pas d'utilisation du signe =

Tableau 3 - Synthèse par modes technologiques

V.3 Définition des profils

La synthèse des technologies définies selon quatre modes hiérarchisés sur l'ensemble du domaine permettra ainsi, lors de l'analyse des réponses à l'évaluation diagnostique, une analyse transversale selon un même codage des techniques relativement aux technologies sous-jacentes. Il sera dès lors possible de repérer sur chacune des dimensions, des cohérences de fonctionnement se traduisant par des technologies dominantes.

Nous observons que les modes technologiques 1 et 2, correspondant à des technologies correctes, ont des caractéristiques communes (maitrise des répertoires, technologies de la numération), mais diffèrent sur la complexité des éléments technologiques (plus expert, dans le sens où les propriétés en jeu sont plus complexes dans le mode 1 que dans le 2). Nous choisissons alors de regrouper ces deux modes technologiques (1) et (2) pour aboutir à la définition de trois profils.

Profil 1 :

Les technologies $\boldsymbol{\Theta_P}$ et $\boldsymbol{\Theta_D}$ et $\boldsymbol{\Theta_{max}}$ de la numération et celles liées aux propriétés des opérations sont mobilisées et permettent de traiter les différents types de tâches de la numération et du calcul (posé et réfléchi).

Les répertoires additifs et multiplicatifs sont maitrisés ; ils permettent l'effectuation correcte des calculs. Les propriétés sur les nombres et les opérations sont exploitées pour réécrire les expressions arithmétiques dans le calcul réfléchi.

Les modèles mathématiques impliqués dans la résolution de problèmes sont adaptés et conduisent à des écritures arithmétiques correctes ; le signe = est utilisé à bon escient, comme relation d'équivalence.

Profil 2 :

Les élèves mobilisent des techniques sous-tendues par $\boldsymbol{\Theta_P}$; $\boldsymbol{\Theta_D}$ et $\boldsymbol{\Theta_{max}}$ n'étant pas mobilisés, ou rarement. Les éléments technologiques correspondant aux propriétés des opérations (tels que $\boldsymbol{\Theta_{dist}}$ ou $\boldsymbol{\Theta_{écart}}$) sont présents, mais pas toujours mobilisés. Par conséquent, les techniques de calcul posé, comme celles de calcul réfléchi, sont utilisées de façon erronée ou en dehors de leur domaine de validité. La réussite dépend de la complexité des tâches.

Les répertoires additifs et multiplicatifs ne sont pas suffisamment maitrisés et peuvent conduire à des erreurs de calcul.

Les modèles mathématiques utilisés dans la résolution de problèmes ne sont pas ceux attendus en fin d'école : des modèles additifs et soustractifs interviennent au lieu de modèles multiplicatifs et de division. Les écritures arithmétiques produites ne sont pas correctes, le signe = n'étant pas utilisé comme relation d'équivalence.

Profil 3 :

La technologie dominante caractérisant ce profil est celle de comptage $\boldsymbol{\Theta_{compt.}}$ Les démarches de comptage ou de groupements/partage impliquent qu'aucune expression arithmétique ou calcul ne soit produit et qu'il n'y a pas d'usage du signe =.

Les élèves conçoivent alors l'écriture chiffrée comme une juxtaposition de chiffres. Par conséquent, les techniques de calcul posé comme celles de calcul réfléchi ne s'appuient pas sur des propriétés mathématiques ; les répertoires additifs comme multiplicatifs ne sont pas maitrisés. Des techniques de comptage peuvent néanmoins être employées pour calculer.

Nous exploitons dans le prochain chapitre ce modèle d'analyse pour concevoir une évaluation diagnostique permettant de caractériser les connaissances numériques des élèves ; nous expérimentons ensuite ce dispositif d'évaluation auprès de classes de CM2 pour étudier la pertinence du modèle et du test.

CHAPITRE 7

TEST DIAGNOSTIQUE

Ce dernier chapitre est consacré à la conception d'un test diagnostique réalisé dans la lignée de celui de *Pépite* en algèbre, à son opérationnalisation et à l'analyse des réponses des élèves dans des classes de CM2. Nous exploitons pour ce faire les résultats des autres chapitres de la thèse : la définition de l'OM de référence relative au domaine des nombres entiers définie dans les chapitres 2 et 3, les critères de validité de contenu d'une évaluation présentés dans le chapitre 4 et le modèle d'analyse multidimensionnelle conçu au chapitre 6. Un des enjeux est de situer certains des résultats obtenus par les élèves de notre échantillon ayant passé le test diagnostique avec ceux de l'évaluation CEDRE présentés dans le chapitre 5.

Ce test diagnostique doit permettre de repérer, à partir de cohérences de fonctionnement, les praxéologies apprises. Elles sont caractérisées par des technologies impliquées sur les quatre dimensions structurant les connaissances arithmétiques des élèves de fin d'école - début de collège sur la numération et l'arithmétique des entiers : **UA** - usage de l'arithmétique ; **N** - gestion de la numération ; **CA** - calcul arithmétique ; **RE** - réécriture d'expressions. Une analyse globale des codes des réponses des élèves sur chacune des dimensions, à partir de classes anticipées de réponses, conduit ensuite à catégoriser les élèves en différents profils pour ensuite pouvoir réguler l'enseignement au sein de la classe.

Le chapitre se structure en cinq parties qui reprennent de façon chronologique la conception d'une évaluation :

- la présentation des objectifs, des enjeux et des principes de l'évaluation diagnostique que nous avons conçue suivie d'une étude de sa validité, comme nous avons pu la mener dans le chapitre 5 pour les évaluations CEDRE ;
- l'explicitation du codage des réponses permettant de déterminer les technologies impliquées pour chacun des exercices afin de caractériser les praxéologies apprises sur les quatre dimensions du modèle ;
- les résultats globaux de l'expérimentation menée sur un échantillon d'élèves de fin de CM2 après mise à l'épreuve du test[1] ;

[1] L'expérimentation a été menée en fin d'année en CM2, mais l'utilisation du test par l'enseignant dans la classe est prévue en début de 6ème.

- des exemples de profils d'élèves définis à partir de cohérences de fonctionnement ;
- des remarques sur les conditions d'exploitation informatique en vue de l'automatisation de ce test diagnostique,
- des pistes sur des situations à travailler pour réguler l'enseignement sur le domaine des nombres entiers, en fonction des aspects épistémologiques relatifs aux nombres entiers repérés, pour permettre aux élèves de poursuivre la construction des savoirs visés.

I DESCRIPTION ET VALIDITÉ DU TEST

I.1 Enjeux et des principes

Les enjeux de ce test sont à la fois diagnostiques et formatifs, selon les définitions que nous avons données dans le chapitre 1. Chevallard (1998) apporte certaines prescriptions quant au contenu d'une évaluation (un test d'entrée) se situant à l'entrée d'un thème d'étude et visant à repérer les besoins didactiques des élèves :

> « D'une manière générale, la principale difficulté de fabrication d'un tel test est liée à la contrainte de temps : parce qu'il doit *relancer* l'étude, et non l'arrêter durablement, un test d'entrée, on l'a dit, doit être *bref*. Cette exigence conduit à renoncer à représenter, dans l'échantillon de tâches mathématiques proposées, l'*ensemble* des types de tâches qui ont pu être rencontrées dans les classes précédentes, et à s'en tenir à *quelques* spécimens de difficulté graduée. [...]Un test d'entrée n'est qu'un élément de l'organisation d'ensemble de l'entrée dans l'étude du thème. Censé permettre la détection – et l'auto-détection – des élèves présentant un déficit net sur le thème considéré, il ne vise pas à contrôler les élèves sur l'ensemble des points sensibles du thème.» Chevallard (1998)

Le test que nous proposons diffère d'une évaluation diagnostique habituelle (test d'entrée), telle qu'elle peut être mise en œuvre par l'enseignant dans sa classe : le diagnostic qu'il permet est beaucoup plus fin et est conçu pour permettre une meilleure adaptation de l'enseignement par la suite aux besoins d'apprentissage repérés des élèves en fonction de l'étude épistémologique. Ainsi, nous envisageons la passation et le contenu de ce test de façon différente à celle décrite par Chevallard (1998) : si nous le situons avant l'enseignement des nombres entiers et de l'arithmétique au début du collège nous le considérons plutôt comme un outil permettant un moment de reprise (Larguier 2009), une relance de l'étude pour poursuivre la construction des savoirs visés.

Pour pouvoir repérer des cohérences de fonctionnement et caractériser les technologies dominantes sur chacune des dimensions, le test doit comporter des tâches évaluant les « points sensibles ». L'étude épistémologique a montré que différentes ruptures telles que l'abandon du comptage au profit du calcul ou la construction des modèles mathématiques (chapitre 3, partie IV) étaient incontournables pour construire des apprentissages sur les nombres entiers et l'arithmétique en fin d'école. C'est pourquoi, le test que nous proposons est composé de types de tâches représentant différentes OML et ciblant ces ruptures : il est dès lors possible d'évaluer les productions des élèves selon les techniques et les éléments technologiques attendus en fin d'école et de caractériser les technologies impliquées selon ces attentes et selon la validité de la technique employée.

Comme pour toute évaluation, il est impossible de proposer une liste exhaustive de tâches correspondant à l'ensemble des types de tâches du domaine et prenant en compte toutes les déclinaisons de variables didactiques possibles. Nous avons choisi les tâches du test diagnostique en ciblant ces points sensibles et en veillant à ce qu'elles soient de complexité variée, les critères de validité dégagés dans le chapitre 4 permettant de concevoir un test valide. Par ailleurs, le modèle d’analyse multidimensionnelle qui accompagne le test ne fonctionne que si les tâches permettent de repérer des techniques et des technologies différentes (non seulement celles attendues en fin d’école, mais aussi d’autres qui relèveraient des niveaux scolaires précédents) : ce qui impose un autre critère de sélection des tâches lors de la conception du test. Nous explicitons et montrons ces principes en lien avec le codage des productions d’élèves et l’interprétation des résultats dans la deuxième partie de ce chapitre ; préalablement, nous présentons le contenu du test diagnostique et justifions sa validité.

I.2 Description générale du test et analyse de sa validité

Nous présentons dans ce paragraphe les différents exercices du test diagnostique et l’analyse de sa validité. Pour justifier de cette dernière, nous suivons la même méthodologie que celle utilisée pour les évaluations CEDRE ; nous montrons un exemple d’analyse *a priori* sur un des items du test (les autres figurant dans les Annexes) et étudions ensuite de façon globale le contenu du test.

I.2.1 Exercices du test

Le test, prévu pour une passation d’environ 50 minutes, est composé de 21 questions réparties en 12 exercices présentés dans le paragraphe 1.2.1. Les 12 exercices du test sont présentés ci-dessous les uns à la suite des autres, sans la place laissée aux élèves pour répondre ; le test tel qu’il a été proposé aux élèves figure en Annexe 1.

Exercice 1

1a. Écris en lettres 127050.

1b. Écris en chiffres deux-millions-trois-cents.

Exercice 2

Complète la suite de nombres :

4677 – 4777 – 4877 – .... - …..............

Exercice 3

Coche pour chaque question la bonne réponse :

3a. Combien y a t-il de milliers dans 5 millions ?

□ 5 □ 50 □ 500 □ 5 000

3b. 20 centaines et 15 dizaines est égal à :

□ 2 015 unités □ 200 150 unités □ 215 unités □ 2 150 unités □ 20 150 unités

Exercice 4

Entoure le nombre le plus grand parmi les deux:

2 milliers et 26 centaines 3 milliers et 15 centaines

Explique comment tu as fait.

Exercice 5

Écris en ligne les différents calculs que tu fais pour trouver le résultat de chaque calcul. <u>Tu ne dois pas poser l’opération.</u>

358 + 99 150 - 19

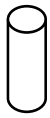
<u>Sans poser la division</u>, donne le quotient entier et le reste de 243 : 10

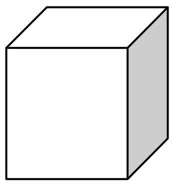
Explique avec des calculs en ligne ou une phrase comment tu as fait.

Exercice 6

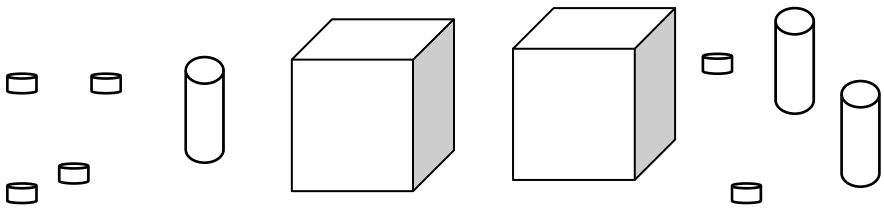
Une entreprise de fabrication de bonbons a différents emballages selon le nombre de bonbons emballés :

1 sachet  contient 10 bonbons

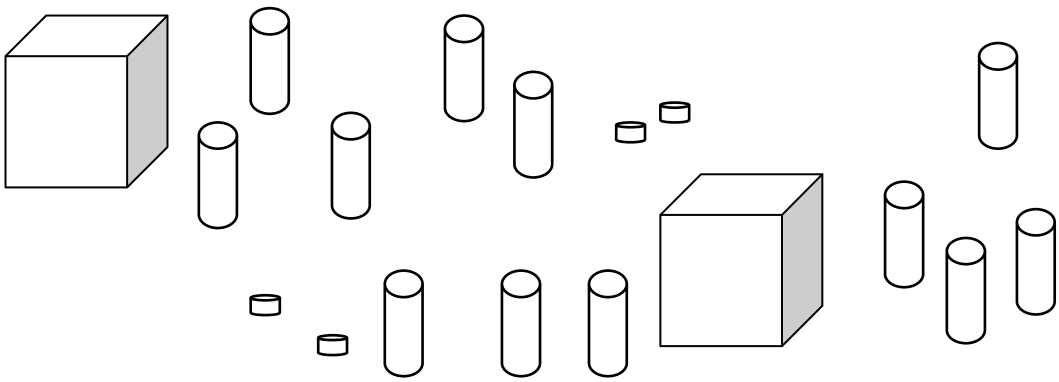
1 tube  contient 10 sachets

1 boîte  contient 10 tubes

1. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? ....



2. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? ....



3. De combien de tubes a-t-on besoin pour emballer 859 bonbons ?

Exercice 7

a. Pose et effectue : 538 x 702

b. Pose et effectue la division euclidienne 8 463 : 12

Exercice 8

Dans une librairie, les 3 vendeuses doivent ranger des livres dans des cartons.

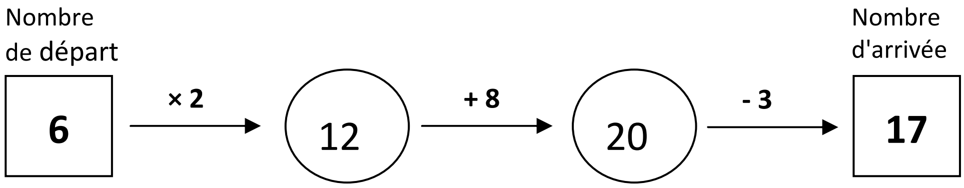
Dans chaque carton, il faut placer 8 livres ; elles doivent mettre en tout moins de 4 heures pour ranger l'ensemble.

De combien de cartons auront-elles besoin pour ranger 427 livres ?

Exercice 9
Coche <u>les expressions</u> qui sont égales à 345 012 :

□ 34 + 5 012 □ 300 000 + 45 012 □ 34 000 + 5 012
□ 10 + 345 000 + 2 □ 12 + 40 000 + 300 000 + 5000

Exercice 10



Dans ce programme de calcul, si je choisis 6 comme nombre de départ, le nombre d’arrivée est 17

1. Si je choisis 30 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée que j'obtiens est ....
Écris les calculs que tu as faits :

2. J'ai obtenu 125 comme nombre d'arrivée. Quel nombre avais-je choisi au départ ?
Écris les calculs que tu as faits :

Exercice 11
Noam a voulu calculer 1 379 + 562 à la calculatrice, mais il a tapé par erreur : 1 279 + 562.
A partir du résultat qu’il a obtenu, que doit-il faire pour corriger son erreur sans taper à nouveau tout le calcul ? *Coche la bonne réponse*

□ Ajouter 10 □ Ajouter 100 □ Soustraire 10 □ Soustraire 100

Exercice 12
Dans une boulangerie, Pierre a vendu 3 fois moins de brioches que de croissants. Il a vendu 24 croissants. Combien a t-il vendu de brioches ? *Coche la bonne réponse*

□ 21 □ 8 □ 27 □ 72

I.2.2 Exemple d’analyse *a priori*

L’analyse *a priori* de l’ensemble des tâches du test figure en Annexe 2 ; nous reviendrons dans la suite de la thèse sur certains éléments de cette analyse pour l’étude des technologies impliquées dans les dimensions. Nous présentons ci-dessous un exemple d’analyse *a priori* à partir des questions de l’exercice 3. Cet exercice vise à évaluer la maitrise des aspects positionnel et décimal de la numération décimale de position à travers deux tâches de conversion d’écritures en unités de numération.

3a. Combien y a t-il de milliers dans 5 millions ?
□ 5 □ 50 □ 500 □ 5 000

3b. 20 centaines et 15 dizaines est égal à :
□ 2 015 unités □ 200 150 unités □ 215 unités □ 2 150 unités □ 20 150 unités

	Question 3a	Question 3b
Caractère outil ou objet du savoir en jeu :	objet	
Type de tâches convoqué et le nombre de types de tâches convoqués	$\mathbf{T_{C\_eun}}$	$\mathbf{T_{C\_eun}}$
Ancienneté de l'objet de savoir	ancien	
Types de représentation sémiotiques	Départ : EUNC Arrivée : EUNC	Départ : EUNC Arrivée : EUNC
La (ou les) technique(s) attendue(s)	$\boldsymbol{\tau_{conv}}$	$\boldsymbol{\tau_{conv}}$
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche	technique	technique
Les différentes variables didactiques	Nombres de l'ordre des millions	Nombres de l'ordre du millier

<u>Choix des variables :</u>

Nous avons choisi dans cet exercice des « grands nombres » (de l'ordre du million) afin d'évaluer la maitrise de la relation entre le million et le millier ; ce qui correspond à un savoir spécifique du cycle 3. Par contre, pour évaluer les techniques de conversion entre unités de numération, nous avons choisi de travailler la conversion centaines - milliers, qui devrait, selon les programmes être enseignée depuis le CE1 ; les travaux en didactique de Chambris (2008) et Tempier (2013) ayant montré que ce type de tâche est peu présent actuellement dans l'enseignement, nous avons préféré ne pas augmenter la complexité de l'exercice en proposant des nombres plus grands. Les praxéologies sont convoquées à un niveau technique puisqu'il s'agit de mettre directement en application la technique de conversion.

<u>Choix du format et des distracteurs :</u>

Nous avons choisi de poser la question 3a sous une forme QCM pour éviter une mauvaise interprétation de la question, l'élève pouvant répondre 0, puisqu'il n'y a pas de milliers « isolés » dans 5 millions. Les distracteurs de la question 3a sont rangés par ordre croissant pour avoir une certaine régularité dans les écritures (aucun d'eux n'est mis ainsi en avant) et la bonne réponse se situe en dernière position ; dans la question 3b, les distracteurs ne sont pas écrits dans un ordre donné, la réponse se situe aussi en 4ème position, mais n'est pas la dernière de la liste.

<u>Techniques :</u>

Comme nous l'avons exposé dans le chapitre 3, deux techniques sont possibles selon l'utilisation de l'écriture chiffrée comme un registre de représentation sémiotique intermédiaire ou non.

Pour la première question :
La technique de conversion $\boldsymbol{\tau_{conv}}$ permet une résolution uniquement avec les EUN ; le passage par les écritures chiffrées demande successivement la mise en œuvre de la technique de traduction canonique $\boldsymbol{\tau_{pos}}$, puis de la technique de troncature $\boldsymbol{\tau_{tronc}}$ afin de déterminer le nombre de milliers pour la question 3a ; le nombre d'unités est donné directement par l'écriture chiffrée :

- avec $\boldsymbol{\tau_{conv}}$: 1 million = 1 000 milliers et par conséquent 5 millions = 5 milliers ;
- avec $\boldsymbol{\tau_{pos}}$: 5 millions s'écrit 5 000 000, il s'agit ensuite de déterminer le nombre de milliers ($\mathbf{T_{CNd}}$) à l'aide de la technique de troncature $\boldsymbol{\tau_{tronc}}$.

Pour la seconde question :
Les distracteurs reposent sur une utilisation erronée du principe décimal $\mathbf{\Theta_D}$, sur l'écriture du nombre de dizaines (et non d'unités qui pourrait traduire une utilisation incorrecte du principe positionnel $\mathbf{\Theta_P}$) et sur la juxtaposition de nombres obtenus après conversion de chacun des éléments composant le nombre. Plus précisément :

□ 2015 unités : juxtaposition des chiffres présents dans l'énoncé (pas de prise en compte du principe décimal)

□ 200 150 unités : conversion de chacun des nombres évoqués dans l'énoncé en unités (20 centaines = 200) et (15 dizaines = 150), puis juxtaposition des deux écritures.

□ 215 unités : confusion nombre de dizaines - nombre d'unités

□ 2 150 unités : bonne réponse

□ 20 150 unités : conversion en unités du nombre de dizaines et juxtaposition avec le nombre de centaines.

Les distracteurs choisis dans chacun des items correspondent à une mise en œuvre de techniques erronées ; les deux questions de cet exercice sont ainsi cohérentes par rapport à leur objectif d'évaluation.

L'analyse *a* priori de tous les items a été réalisée à partir de la même grille ; nous avons pris en compte pour la réaliser des éléments issus des approches épistémo-didactique et psycho-didactique. L'analyse locale de la cohérence de chacun des items avec son objectif d'évaluation est menée sur chaque item et précède une analyse globale que nous présentons dans le paragraphe suivant.

I.2.3 Analyse globale du contenu du test

Une première synthèse de l'analyse *a priori* des tâches figure dans le tableau page suivante (Tableau 1), dans lequel nous recensons, pour chaque tâche, les éléments descripteurs suivants : les praxéologies convoquées et leur niveau d'intervention, ainsi que les types de représentation sémiotique de départ et d'arrivée et le format de la question. Nous précisons que, pour l'ensemble du test, tous les objets de savoirs sont anciens, aucun n'étant en cours d'enseignement.

D'un point de vue méthodologique, à la différence de ce que nous avons fait pour CEDRE :
- nous identifions les différentes sous-tâches intervenant dans chacun des exercices et les considérons comme représentant autant de types de tâches dans la répartition globale ; par exemple dans la résolution d'un problème, nous prenons en compte une praxéologie de l'OMR1 et une praxéologie de calcul (OMR3). En revanche, nous ne considérons pas comme des types de tâches spécifiques les praxéologies de la numération intervenant dans le calcul (posé ou réfléchi) ;
- nous considérons, relativement à la dimension RE (réécriture des expressions), les expressions arithmétiques produites et l'utilisation du signe égal ;
- nous codons les productions des élèves à partir de classes de réponses anticipées : déterminées par l'analyse *a priori* et correspondant à des erreurs identifiées par une mise en œuvre de techniques inadaptées (en dehors de leur domaine de validité) ou non attendues en fin d'école.

Le test se compose ainsi de 29 types de tâches répartis de la façon suivante : 8 représentant l'OMR 1, 13 l'OMR 2 (OML 2A : 7 -OML 2B : 3 - OML 2C : 3) et 8 l'OMR 3 (OML3A : 3 et OML 3B : 5). Chacune des OMR est ainsi représentée par au moins 3 tâches différentes, ce qui apporte une première garantie de validité épistémo-didactique au contenu du test. Si les niveaux d'intervention des praxéologies sont majoritairement techniques (16 sur 29), nous avons néanmoins veillé à ce qu'ils soient variés (TCST : 4 - TCAT : 6 - RCAT[2] : 3) afin d'avoir un certain équilibre au niveau de la complexité.

Nous soulignons aussi que le test contient des tâches représentant des types de tâches qui, dans l'évaluation CEDRE, caractérisent les groupes de hauts niveaux de l'échelle des scores alors qu'ils sont convoqués à un niveau technique et considérés comme peu complexes (les types de tâches de traduction $\mathbf{T_{Teun/ec}}$ ou les problèmes de division-quotition $\mathbf{T_{RP\_:}}$ par exemple). En effet, si les résultats des évaluations CEDRE montrent des difficultés relatives à certains types de tâches, il nous semble nécessaire d'intégrer, dans le test diagnostique, des tâches les représentant afin de cibler les besoins d'apprentissage spécifiques des élèves. L'articulation entre les résultats d'une évaluation quantitative bilan à l'échelle de CEDRE et la conception d'une évaluation individuelle diagnostique prend ainsi tout son sens.

Exercice & question	Type de tâche	OML	Niveau de convocation	Type de représentation départ[3]	Type de représentation arrivée	Format de question
1a	$T_{Tec/np}$	OML2A	technique	EC	NP	QROC
1b	$T_{Tnp/ec}$	OML2A	technique	NP	EC	QROC
2a	T_{AR}	OML2C	technique	EC	EC	QROC
2b	T_{AR}	OML2C	TCST	EC	EC	QROC
3a	T_{CNd}	OML2A	technique	EUNC	EC	QCM
3b	T_{C_eun}	OML2A	technique	EUNC	EUNC	QCM
4	T_{C_eun}	OML2A	TCST	EUN	EUN	QCM & QRO
	T_{Comp}	OML2C	technique	EUNC	LN	
5a	T_{CR_+}	OML3B	TCAT	EA	EA & EC	QRO
5b	T_{CR_-}	OML3B	TCAT	EA	EA & EC	QRO
5d	$T_{CR\_:}$	OML3B	TCAT	EA	EA (ou LN) & EC	QRO
6a	T_{Dc}	OML2B	RCAT	RI & LN	EC	QROC
6b	T_{Dc}	OML2B	RCAT	RI & LN	EC	QROC
6c	T_{CNd}	OML2B	RCAT	RI & LN&EC	EC	QROC
7a	$T_{CP\_\times}$	OML3A	technique	EA	EC	QRO
7b	$T_{CP\_:}$	OML3A	technique	EA	EC	QRO
8	T_{RP_x}	OMR1	TCAT	LN	EA	QRO
	$T_{CP\_:}$	OML3A	technique	EA	EC	
9	T_{C_eapd}	OML2A	technique	EAPD	EAPDC	QCM
	$T_{Tec/eapd}$ et/ou $T_{Teapd/ec}$	OML2A	technique	EAPD	EC	
10a	$T_{CR\_\times}$; T_{CR_+} et T_{CR_-}	OML3B	technique	EA	EC	QRO
10b	T_{RP_x} ; T_{RP_x}	OMR1	TCST	Schéma & EA	EA	QRO
	$T_{CR\_:}$ T_{CR_+} T_{CR_-}	OML3B	technique	EA	EC	
11	T_{CNd}	OML2A	TCAT	LN & EA	EA	QCM
12	T_{RP_ass}	OMR1	TCST	LN	EA&EC	QCM

Tableau 1 - Description synthétique des tâches du test diagnostique

[2] Rappel de quelques sigles utilisés : pour les niveaux de convocation des praxéologies : t-convoqué sans choix de technique (TCST) ; t-convoqué avec choix de technique (TCAT) ; r-convoqué sans choix de technique (RCST) ; r-convoqué avec choix de technique (RCAT). La liste complète des sigles utilisés dans la thèse figure après la bibliographie.

[3] LN : langage naturel et RI : représentation iconique.

En ce qui concerne les descripteurs psycho-didactiques :
- les contextes des problèmes du test sont sociétaux ou scientifiques et évoquent des situations que l'élève peut facilement se représenter (emballage de bonbons, calculatrice, boulangerie) mais pour lesquels l'élève ne peut pas avoir d'élément de contrôle sur sa réponse à partir d'un ordre de grandeur établi uniquement à partir de la situation du problème ;
- différents formats de questions sont proposés. Il était particulièrement important que les élèves soient confrontés à des questions ouvertes, non seulement pour la validité du test, mais aussi pour que la dimension RE (réécriture d'expressions) du modèle puisse intervenir dans l'analyse. Toutes les questions auraient pu aussi être proposées sous la forme de questions ouvertes, mais nous en avons proposé certaines sous forme de QCM en vue d'une potentielle implémentation informatique et afin de faciliter le traitement des réponses.

Les différents éléments descripteurs des tâches entrant en jeu dans l'analyse de la validité suivant une facette épistémologique et psychodidactique montrent que les tâches sont variées au regard de ces éléments et équilibrées dans leur répartition. Les questions ne sont pas placées dans un ordre de complexité croissant, même si nous avons veillé à ce que les premiers exercices soient suffisamment habituels pour que tous les élèves puissent s'engager dans le test ; les exercices les plus complexes se situent dans le milieu du test afin que les élèves aient le temps de les aborder et éventuellement de ne pas aller à leur terme pour poursuivre la suite du test.

I.3 Dimension 0 : score de l'élève

Avant d'aborder la question du codage des réponses en lien avec le modèle d'analyse, nous explicitons dans ce paragraphe ce que nous considérons comme réponse juste ou comme réponse fausse pour chacune des questions du test. En effet, la première des dimensions relative à chaque exercice du test concerne la qualité de la réponse donnée par l'élève. Nous la codons par : correcte, correcte mais sous une forme non attendue à ce niveau scolaire, fausse ou absente.

Nous avons choisi d'attribuer 1 point pour chacune des réponses justes (attendues ou non) et 0 point pour une réponse fausse ou absente : ce qui donne un total de 21 points sur l'ensemble du test. Nous ne prenons en compte pour attribuer ce score que les réponses des élèves et pas leurs éléments de justification ou la qualité de la réécriture des expressions algébriques.

Si pour certaines questions, il n'y a pas d'ambigüité sur les réponses que nous considérons comme correctes et les autres comme fausses, certaines précisions apparaissent comme nécessaires pour d'autres :
- exercice 5 et exercice 7 (calcul réfléchi et posé) : nous attendons le résultat correct (une erreur de calcul implique une réponse considérée comme fausse) ;
- exercice 8 (division-quotition) : nous considérons comme correcte la réponse 54 (attendue) et toutes celles qui expliquent que 53 cartons sont pleins et qu'un 54ème n'est pas plein (il manque 5 livres) ou qu'il faut 53 cartons, mais qu'il reste 3 livres. La réponse 53 cartons, sans autre précision, est considérée comme fausse ;
- exercice 9 : les trois réponses correctes (et uniquement celles-ci) doivent être choisies pour que la réponse soit considérée comme juste et que l'élève ait un score de 1 point.

Le score obtenu au test intervient par la suite lors de la conception des profils, mais nous dépassons le codage binaire (juste ou faux) en codant aussi les réponses selon des technologies dominantes définies pour chacune des dimensions. Si le contenu de ce test apparaît ainsi comme valide au regard des critères de validité relatifs à une évaluation, il faut aussi qu'il présente une seconde forme de validité relativement au modèle d'analyse multidimensionnelle.

II DÉTERMINATION DES MODES TECHNOLOGIQUES SUR LES DIFFÉRENTES DIMENSIONS ET CODAGE DES RÉPONSES

Pour étudier l'adéquation entre le test construit et le modèle d'analyse, nous commençons par montrer globalement les différentes dimensions que chacune des questions du test permet d'évaluer ; puis, afin de pouvoir déterminer les dominantes technologiques développées par les élèves sur chacune des dimensions, nous déterminons pour chacun des exercices des classes de réponses anticipées. Ces dernières sont issues de l'analyse *a priori* menée avec une approche anthropologique et cognitive puisque nous prenons en compte les conceptions des élèves et nous nous basons sur certaines études cognitives ; pour chaque exercice, nous définissons ainsi des classes de réponses qui correspondent à la mise en œuvre :

- de techniques correctes et d'éléments technologiques attendus au regard des attentes institutionnelles de la fin d'école ;
- de techniques non idoines au vu du savoir enseigné (techniques ou technologies relevant éventuellement d'un niveau scolaire précédent) ;
- de techniques incorrectes provenant de conceptions erronées ;
- de techniques correctes en dehors de leur domaine de validité.

Pour les deux derniers cas, nous interprétons l'erreur soit d'un point de vue cognitif en lien avec les conceptions de l'élève, soit comme l'absence de mobilisation ou l'inadaptation des technologies sous-jacentes à la technique mise en œuvre.

II.1 Répartition des questions et évaluation des dimensions

Nous avons récapitulé dans le Tableau 2 (page suivante) les dimensions évaluées par chacune des questions ; nous avons choisi de cibler davantage les dimensions N (numération) et CA (calcul arithmétique). Comme la réécriture d'expressions n'est pas un des objectifs affichés comme prioritaires dans les programmes, il est cohérent que la dimension RE qui lui corresponde apparaisse de façon réduite dans le diagnostic que nous proposons.

Nous observons que certains exercices ne convoquent qu'un seul type de tâches et n'évaluent qu'une seule dimension ; en revanche, d'autres, plus complexes, convoquent plusieurs types de tâches ou conduisent à la réécriture d'expressions et permettent par conséquent d'évaluer plusieurs dimensions : c'est le cas par exemple du problème de division-quotition (exercice 8) qui permet d'évaluer les dimensions UA et CA.

<table>
<tr><th>Ex</th><th>Types de tâches</th><th>UA : usage de l’arithmétique</th><th>N : Gestion de la numération décimale</th><th>CA : Calcul arithmétique</th><th>RE : Réécriture d’expression</th></tr>
<tr><td>1a</td><td>$T_{Tec/np}$</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1b</td><td>$T_{Tnp/ec}$</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>T_{AR}</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3a</td><td>T_{C_eun}</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3b</td><td>T_{C_eun}</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>T_{C_eun} et T_{Comp}</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5a</td><td>T_{CR_+}</td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>5b</td><td>T_{CR_-}</td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>5c</td><td>$T_{CR\_:}$</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>6a</td><td>T_{Dc}</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6b</td><td>T_{Dc}</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6c</td><td>T_{CNd}</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7a</td><td>$T_{CP\_\times}$</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>7b</td><td>$T_{CP\_:}$</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>T_{RP_x}et $T_{CP\_:}$</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>T_{C_Teapd} ;
$T_{Tec/eapd}$ ou
$T_{Teapd/ec}$</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10a</td><td>$T_{CR\_\times}$; T_{CR_+} et
T_{CR_-}</td><td></td><td></td><td rowspan="2">X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>10b</td><td>$T_{CR\_:}$;T_{CR_+} ;
T_{CR_-}</td><td>X</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>11</td><td>T_{CNd}</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>12</td><td>$T_{RP\_\times}$ et T_{RP_ass}</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tableau 2 - Dimensions évaluées selon les différentes questions

II.2 Codage des réponses par dimension selon les technologies impliquées

L’exploitation des technologies impliquées dans les techniques pour coder les réponses des élèves évite non seulement de coder indépendamment chacune des techniques utilisées pour résoudre les différents exercices, mais permet surtout d’avoir initialement un codage transversal pour réaliser une analyse sur l’ensemble des exercices qui évaluent une même dimension ; la définition des technologies dominantes étant construite en cohérence sur les dimensions UA, N et CA, le codage sur ces trois dimensions mène à une analyse globale sur l’ensemble du test, selon les technologies en jeu. La dimension RE apparaît comme spécifique par rapport aux trois autres puisqu’elle n’est pas définie à partir de praxéologies. Il est dès lors possible de repérer des cohérences de fonctionnement sur certaines dimensions puis sur l’ensemble du test et par la suite, de définir des profils d’élèves et des géographies de classe en fonction d’élèves ayant des profils proches.

Nous menons ici l’étude non pas item par item dans l’ordre du test, mais dimension par dimension : en procédant de cette façon, nous montrons qu’il est possible, à partir des exercices proposés, de repérer des cohérences de fonctionnement du côté de l’élève et d’arriver à dégager des éléments technologiques caractérisant les praxéologies apprises à partir de ces cohérences de fonctionnement. Pour chacune des dimensions (UA, N, CA et RE), nous codons les techniques utilisées par des codes UA*i*, N*i*, CA*i*, RE*i* décrivant des éléments technologiques qui sous-tendent les techniques réalisées. Ces codes sont hiérarchisés ($1 \leq i \leq 4$) selon les modes technologiques définis dans le chapitre précédent :

1 : technologies correctes et attendues au niveau donné,

2 : technologies correctes, mais non attendues à ce niveau,

3 : technologies incorrectes mais faisant référence à des technologies attendues ou qui sont incomplètes,

4 : technologies incorrectes, mais sans faire référence à des technologies ou qui se réfèrent à du comptage.

Nous procédons de la même façon pour chacun des items, quelle(s) que soi(en)t la (les) dimensions qu'il évalue : nous explicitons les techniques de résolution possibles et les éléments technologiques sur lesquels elles reposent, puis anticipons des réponses correctes et erronées en les reliant à des techniques selon les technologies impliquées sur lesquelles elles reposent potentiellement. Nous faisons ensuite une synthèse pour chacune des dimensions montrant la transversalité du codage selon les technologies impliquées.

Nous illustrons ci-après, à l'aide de quelques exercices du test, la façon dont nous repérons, à partir d'une analyse praxéologique, les technologies impliquées dans chacune des dimensions. Les analyses des exercices en termes de technologies impliquées ne figurant pas dans le corps du texte de la thèse sont placées en Annexe 3 et sont exploitées pour montrer, à la fin de chaque paragraphe, la façon dont le codage réalisé sur chacun des exercices permet d'accéder à des technologies dominantes.

II.2.1 Dimension UA : usage de l'arithmétique

Nous définissons quatre codes (UA1, UA2, UA3, UA4) selon les modèles arithmétiques impliqués dans la résolution d'un problème. Nous rappelons ci-après la caractérisation des quatre modes technologiques de cette dimension :

UA1 : utilisation de modèles mathématiques adaptés et idoines.

UA2 : utilisation de modèles mathématiques adaptés conduisant à des opérations à trous.

UA3 : utilisation de modèles additifs et soustractifs uniquement (pas de modèle multiplicatif ni de division) ou utilisation de modèles mathématiques en dehors de leur domaine de validité.

UA4 : mise en œuvre de $\mathbf{\Theta_{compt}}$ technologie de comptage ou pas de reconnaissance d'un modèle adapté.

<u>Codages des réponses de l'exercice 8 en termes de technologies impliquées</u>

Exercice 8 :
Dans une librairie, les 3 vendeuses doivent ranger des livres dans des cartons.
Dans chaque carton, il faut placer 8 livres ; elles doivent mettre en tout moins de 4 heures pour ranger l'ensemble.
De combien de cartons auront-elles besoin pour ranger 427 livres ?

Il s'agit d'un problème de division-quotition, dans lequel il faut interpréter le quotient pour répondre au problème posé (ajouter 1 au quotient entier) ; ce problème est similaire à celui des wagons (relève de $\mathbf{T_{RP\_x}}$) pour lequel nous avons explicité, lors de la description du modèle, la façon dont nous traitions les réponses des élèves selon les quatre dominantes technologiques.

Les codes UA1, UA2 et UA3 sont définis selon le modèle mathématique de division choisi : les expressions arithmétiques correspondant à une division posée ou en ligne ou avec une écriture caractéristique de la division euclidienne sont celles attendues et idoines et par conséquent sont codées UA1.

Les calculs de produits par essais erreurs ou la production d'une écriture à trous du type 8 × ... = 427, sont corrects et issus de modèles multiplicatifs, non idoines en fin d'école ; ces techniques sont codées UA2.

UA3 code l'utilisation d'un modèle additif ou soustractif conduisant à des écritures du type : 427 - 8 = 419 ; 419 - 8 = 411... La taille des nombres choisis est assez dissuasive quant à l'utilisation de tels modèles ; par ailleurs, ils ne sont pas adaptés à la résolution du problème et non attendus à ce niveau scolaire.

Dans ce problème, il est nécessaire de sélectionner les données utiles et d'écarter les autres, à savoir le nombre de vendeuses et la durée du travail. Les expressions arithmétiques produites mettant en jeu ces données inutiles témoignent d'une non reconnaissance du modèle en jeu et sont par conséquent codées UA4 ; il en est de même pour des expressions arithmétiques conduisant à la somme de 427 et de 8 ou au produit de 427 et de 8.

Nous synthétisons dans le tableau 3 suivant le codage des techniques de l'exercice 8 selon les technologies impliquées :

UA1	Utilisation d'un modèle de division adapté et idoine ; écriture d'une division euclidienne ou décimale sous la forme d'un calcul en ligne ou posé.
UA2	Utilisation d'un modèle de division adapté : écriture à trous sous la forme d'un calcul en ligne ou posé ou utilisation d'un modèle multiplicatif (essais-erreurs plus ou moins organisés).
UA3	Utilisation d'un modèle additif ou soustractif conduisant à l'écriture d'additions ou de soustractions successives ou à la réalisation de schémas faisant apparaître des groupes symbolisant une collection de 8 éléments.
UA4	Non reconnaissance d'un modèle arithmétique se traduisant soit par : - un dessin ou d'un schéma faisant apparaître les livres avec différents éléments sous la forme de points, de bâtons avec d'éventuelles traces de groupements par 8 caractérisant $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{compt}}$; - une sélection incorrecte des données ou un choix d'opérations relevant d'un modèle inadapté (addition des nombres en jeu).

Tableau 3 - Codage des réponses de la question 8 selon les technologies impliquées dans UA

Le codage des techniques de calcul mises en jeu par la convocation d'un type de tâche de calcul (réfléchi ou posé) est pris en compte dans la dimension CA ; nous n'exploitons pas cet exercice pour évaluer la dimension RE parce que, bien souvent, les calculs ne sont pas écrits en ligne, mais posés directement et par conséquent, les productions d'élèves ne montrent pas d'utilisation du signe égal sur ce type de problème.

Codage transversal des techniques en fonction des technologies impliquées dans la dimension UA :

Trois questions (8, 10b et 12) permettent de repérer des technologies impliquées dans UA ; l'analyse similaire des questions 10b et 12 est placée en Annexe 2. En regroupant ces différents codages, il sera possible de repérer des cohérences de fonctionnement sur ces trois questions en lien avec les technologies dominantes, telles qu'elles sont définies sur la dimension UA (Tableau 4).

UA1	Utilisation d'un modèle mathématique adapté et idoine conduisant à la bonne réponse : - écriture d'une division euclidienne ou décimale dans l'exercice 8, - utilisation des opérations inverses pour la question 10b (remontée du programme de calcul), - reconnaissance du modèle adapté pour l'exercice 12 (réponse correcte 8).
UA2	Utilisation d'un modèle adapté mais non idoine conduisant à la bonne réponse : - écriture à trous ou utilisation d'un modèle multiplicatif (essais-erreurs) dans l'exercice 8, - utilisation d'écritures à trous ou égalités dans le sens direct dans la question 10b.
UA3	Utilisation d'un modèle additif ou soustractif caractérisant un manque de reconnaissance des modèles multiplicatifs ou de division ou utilisation de techniques en dehors de leur domaine de validité: - écriture de sommes ou de différences successives dans l'exercice 8, - erreur dans la remontée du programme de calcul ou retrait de 11 *(ou ajout de 11)* dans la question 10b, - choix d'un modèle multiplicatif au lieu d'un modèle de division (réponse incorrecte 72).
UA4	Non reconnaissance d'un modèle arithmétique et utilisation de technologies de comptage : - utilisation de $\mathbf{\Theta_{compt}}$ et d'un modèle « collection » dans l'exercice 8, - sélection incorrecte des données ou choix d'opérations qui révèlent d'un modèle inadapté (modèles additifs ou soustractifs qui ne prennent pas en compte la structure du problème dans l'exercice 8 et l'exercice 12 (réponses incorrectes 21 ou 27)), - prise en compte des nombres 6, 12, 20 ou 17 pour traiter la question 10b.

Tableau 4 - Codage des réponses selon les technologies dominantes dans la dimension UA

II.2.2 Dimension N : gestion de la numération décimale

Douze questions permettent de repérer les techniques utilisées par les élèves et de les caractériser à partir des aspects de la numération décimale ($\mathbf{\Theta_P}$, $\mathbf{\Theta_D}$ et $\mathbf{\Theta_{max}}$) et éventuellement du comptage ($\mathbf{\Theta_{compt}}$). Quatre codes (N1, N2, N3, N4) sont définis selon les technologies de la numération impliquées ; ils correspondent aux modes technologiques de cette dimension définis dans le chapitre 6 :

N1 : utilisation de techniques sous-tendues par $\mathbf{\Theta_P}$ et $\mathbf{\Theta_D}$ et $\mathbf{\Theta_{max}}$.

N2 : utilisation de techniques sous-tendues par $\mathbf{\Theta_P}$ et $\mathbf{\Theta_D}$ et $\mathbf{\Theta_{max}}$ avec présence de technologies de calcul pouvant éventuellement suppléer à $\mathbf{\Theta_D}$.

N3 : utilisation de techniques sous-tendues par $\mathbf{\Theta_P}$. Les technologies $\mathbf{\Theta_D}$ et $\mathbf{\Theta_{max}}$ ne sont pas encore construites et conduisent à l'utilisation de techniques (en particulier $\boldsymbol{\tau_{pos)}}$ en dehors de leur domaine de validité.

N4 : utilisation de techniques sous-tendues par $\mathbf{\Theta_{compt}}$; les technologies de la numération ne sont pas encore construites.

Nous illustrons d'abord les codes des techniques sur quatre questions, puis montrons la transversalité du codage avec un tableau reprenant l'ensemble des 11 questions repérant les technologies impliquées dans cette dimension.

<u>Codages des réponses de l'exercice 2</u>

Complète la suite de nombres : 4677 – 4777 – 4877 – .... - ....

Il s'agit de compléter deux termes manquants d'une suite arithmétique de raison 100 avec la nécessité de passer à l'unité d'ordre supérieur pour le deuxième des deux nombres. Cette tâche représentant T_{AR} peut être résolue par les techniques $\tau_{AR\text{-}np}$ dans le cas où les nombres sont désignés par leur nom (numération parlée) ou τ_{pos} ou τ_{juxt} dans le cas de nombres désignés en écriture chiffrée. S'il est possible ici de traduire les EC par le nom de nombres, puis d'utiliser $\tau_{AR\text{-}np}$, la technique attendue repose sur l'utilisation uniquement des écritures chiffrées.

Nous utilisons un seul codage pour les deux réponses à fournir car la première réponse sert surtout à faire entrer l'élève dans la tâche. Pour le premier nombre, seul l'aspect positionnel Θ_P de la numération entre en jeu, la technique τ_{pos} étant suffisante : il suffit de remarquer que le chiffre des centaines varie et que leur nombre augmente de 1 pour remplacer le 8 par un 9 dans l'écriture chiffrée. Pour déterminer le second nombre, il est nécessaire de maitriser les éléments technologiques Θ_D et Θ_{max} pour passer à une unité de rang supérieur de 4 977 à 5 077. La technique mise en jeu repose donc sur les technologies de la numération caractérisant N1.

Nous distinguons N1 et N2 si nous observons des traces de calcul sur la production de l'élève pour déterminer les nombres à trouver ; la présence d'éléments de calcul, surtout s'il est posé, renvoie à des technologies de calcul justifiant les techniques de traduction et nous les interprétons comme un manque de stabilité dans la maitrise de la technologie Θ_D.

N3 est caractérisée par la technologie Θ_P et par la non mobilisation (ou pas en totalité) des deux autres technologies Θ_D et Θ_{max} ; ce qui conduit à l'utilisation de la technique τ_{pos} en dehors de son domaine de validité et empêche l'utilisation de τ_{juxt}. L'utilisation erronée de τ_{pos} conduit alors à écrire le dernier nombre de la suite comme étant : 41077 (pas de prise en compte de Θ_D ou de Θ_{max}) ou 50 077 ou encore 5, au lieu de 5077.

N4 indique l'usage de comptage ; aucune technologie de la numération n'étant mise en œuvre. Les techniques de comptage ou l'utilisation de techniques erronées (utilisées sans appui sur Θ_P, Θ_D ou Θ_{max}) conduisent à des réponses comme 4878 - 4879 (comptage de un en un pour obtenir les successeurs de 4877), ou 4 888 - 4 999 ou encore 47 777 (ajout d'un chiffre 7) qui relèvent de la mise en œuvre de techniques erronées.

Les codages des réponses à cet exercice selon les technologies dominantes de la dimension N sont effectués de la façon suivante (Tableau 5), sur les deux nombres de la suite à compléter :

N1	4 977 - 5 077
N2	4 977 - 5 077 avec trace de calculs posés
N3	4 977 puis 41077 - 50077 - 5177 - 4 077 - 4 178... traduisant une référence erronée à Θ_D (et Θ_{max})
N4	4 878 - 4 879 témoignant de technologie de comptage Θ_{compt} 4 777 - 4 888 pour le premier nombre 4 978 - 5 000 - 4 800... - etc. témoignant de techniques inadaptées et donc de technologies de la numération qui ne sont pas encore construites.

Tableau 5 - Codage des réponses de l'exercice 2 selon les technologies impliquées dans la dimension N

<u>Codages des réponses de l'exercice 3 en termes de technologies impliquées</u>

L'analyse *a priori* de cet exercice a été menée dans la première partie de ce chapitre ; nous l'exploitons pour coder les techniques utilisées en fonction des choix de réponses du QCM.

3a. Combien y a t-il de milliers dans 5 millions ?
□ 5 □ 50 □ 500 □ 5 000

La technique de conversion τ_{conv} ne repose que sur Θ_D et permet une résolution uniquement avec les EUN ; le passage par les écritures chiffrées demande successivement la mise en œuvre de la technique de traduction canonique τ_{pos}, puis de la technique de troncature τ_{tronc} afin de déterminer le nombre de milliers. Ces deux dernières techniques reposent davantage sur l'aspect positionnel Θ_P que sur l'aspect décimal et peuvent être mises en œuvre à partir d'un tableau de numération comme support intermédiaire. L'interprétation des erreurs que nous faisons ci-dessous est formulée avec les technologies Θ_P et Θ_D.

Les distracteurs 50 et 500 choisis dans le QCM correspondent à des rapports erronés entre le millier et le million (rapport de 10 pour 50 et de 100 pour 500) ; ils évoquent des technologies de la numération Θ_P et Θ_D, mais de façon erronée. Ces deux réponses sont codées N3.

En revanche, la réponse 5 signifie qu'aucune différence n'est perçue entre le nombre de millions et le nombre de milliers ; ce que nous interprétons comme une non prise en compte des aspects positionnel et décimal (Θ_P et Θ_D) de la numération décimale : ce qui est codé N4.

Le codage des réponses au QCM selon les technologies impliquées est donc le suivant (Tableau 6) :

N1	5 000 justifié par Θ_P et Θ_D
N2	5 000 avec trace de calculs
N3	50 - 500 traduisant des technologies Θ_P et Θ_D non encore maitrisées ou incomplètes
N4	5 traduisant le manque des technologies Θ_P et Θ_D

Tableau 6 - Codage des réponses de la question 3a selon les technologies impliquées dans la dimension N

La seconde question de l'exercice 3 est traitée de façon similaire ; elle représente aussi un type de tâche de conversion (T_{C_eun}) assez spécifique, puisqu'il s'agit de convertir le nombre donné en un nombre d'unités simples.

3b. 20 centaines et 15 dizaines est égal à :

□ 2 015 unités □ 200 150 unités □ 215 unités □ 2 150 unités □ 20 150 unités

Comme pour la question précédente, τ_{conv} permet une résolution uniquement avec les EUN alors qu'il est possible d'utiliser aussi des technologies de calcul. Comme pour la question précédente, si l'élève choisit la bonne réponse, mais réalise des calculs en les posant par exemple, nous codons sa réponse N2 : les technologies de calcul venant suppléer celles de la numération, en particulier Θ_D.

Le distracteur 215 unités est interprété comme une confusion entre le nombre d'unités et le nombre de dizaines ; l'élève fait référence à la technologie Θ_D mais de façon erronée. Cette réponse relève donc de N3.

Les distracteurs 2 015 et 20 150 sont des écritures composées par la juxtaposition des écritures chiffrées 20 et 15 présentes dans l'EUN initiale ; le choix de ces réponses montre que l'élève ne cherche pas à convertir 15 dizaines en une centaine et que par conséquent les technologies Θ_D et Θ_{max} ne sont pas mobilisées. Il en est de même pour la réponse 200 150 qui correspond à la juxtaposition de 200 (traduction en EC erronée de 20 centaines) et de 150 (traduction de 15 dizaines). Nous codons N4 ces trois réponses.

N1	2 150
N2	2 150 avec présence de calculs
N3	215 témoignant d'une maitrise non encore complète de $\mathbf{\Theta_D}$
N4	200 150 - 2 015 ou 20 150 traduisant le manque des technologies $\mathbf{\Theta_P}$ et $\mathbf{\Theta_D}$

Tableau 7 - Codage des réponses de la question 3b selon les technologies impliquées dans la dimension N

<u>Codages des réponses de l'exercice 4 en termes de technologies impliquées</u>

Entoure le nombre le plus grand parmi les deux : 2 milliers et 26 centaines   3 milliers et 15 centaines Explique comment tu as fait.

La réussite à l'exercice passe d'abord par la convocation d'un type de tâche de conversion $\mathbf{T_{C\_eun}}$ ou de traduction $\mathbf{T_{Teun/ec}}$ des nombres en écriture chiffrée, puis par la convocation du type de tâche de comparaison $\mathbf{T_{Comp}}$. La technique de comparaison $\boldsymbol{\tau_{Comp\text{-}ec}}$ est justifiée par la technologie issue de la définition de la relation d'ordre $\mathbf{\Theta_{Def\_RO}}$, mais aussi par les technologies de la numération ($\mathbf{\Theta_P}$, $\mathbf{\Theta_D}$ et $\mathbf{\Theta_{max}}$).

Ainsi, l'erreur la plus fréquente risque d'être l'utilisation de $\boldsymbol{\tau_{Comp\text{-}ec}}$ pour conclure que 2 milliers et 26 centaines est inférieur à 3 milliers et 15 centaines parce que le chiffre des milliers du premier nombre (2) est inférieur à celui du second (3) : ce type de raisonnement fait référence à la technique de comparaison $\boldsymbol{\tau_{Comp\text{-}ec}}$. Nous interprétons son utilisation en dehors de son domaine de validité par un manque de référence aux éléments technologiques de la numération qui la justifient ($\mathbf{\Theta_P}$ et $\mathbf{\Theta_D}$). Par conséquent, ces réponses sont codées N3.

Les réponses correctes justifiées par des arguments relatifs à la numération et faisant référence à $\mathbf{\Theta_P}$ et $\mathbf{\Theta_D}$ sont codées N1 ; celles justifiées par des conversions reposant sur des technologies de calcul apparentes sont codées N2.

Nous anticipons aussi des réponses fausses provenant d'une traduction ou d'une conversion erronée (par exemple : 2 milliers 26 centaines = 2260 et 3 milliers 15 centaines = 3150), suivie d'une utilisation adaptée de $\boldsymbol{\tau_{Comp\text{-}ec}}$. Nous estimons dans ce cas, que l'aspect décimal de la numération $\mathbf{\Theta_D}$ n'est pas suffisamment maitrisé et codons ces réponses N3.

Par contre, les réponses qui justifient le choix de 2 milliers 26 centaines comme nombre le plus grand parce que 6 (ou 26) est supérieur à 5 (ou à 25) montrent que $\boldsymbol{\tau_{Comp\text{-}ec}}$ n'est pas maitrisée et n'est justifiée par aucune des technologies de la numération : ces réponses sont codées N4.

Les classes de réponse anticipées et leur codage selon les technologies impliquées pour la dimension N sont synthétisés dans le Tableau 8 pour l'exercice 4.

N1	2 milliers et 26 centaines avec des traductions ou des conversions basées sur des technologies de la numération $\mathbf{\Theta_p}$, $\mathbf{\Theta_d}$ et $\mathbf{\Theta_{max}}$.
N2	2 milliers et 26 centaines avec des traductions ou des conversions basées faisant apparaître des calculs.
N3	2 milliers et 26 centaines avec des erreurs de traduction ou de conversion. 3 milliers et 15 centaines avec utilisation de $\boldsymbol{\tau_{Comp\text{-}ec}}$ en dehors de sa portée.
N4	2 milliers et 26 centaines avec des justifications basées sur la comparaison entre 6 et 5 ou entre 15 et 26.

Tableau 8 - Codage des réponses de l'exercice 4 selon les technologies impliquées dans la dimension N

Codage transversal des techniques en fonction des technologies impliquées dans la dimension N

Les codages des réponses selon les technologies dominantes pour les exercices 2, 3 et 4 illustrent la transversalité de ce codage en fonction des technologies de la numération mises en œuvre dans la résolution. Une analyse similaire est menée sur les 11 questions évaluant cette dimension et conduit au tableau 9 récapitulatif du codage des technologies impliquées dans la dimension N.

N1	Ex. 1 : traduction réussie de la numération parlée en écriture chiffrée et réciproquement témoignant de la maitrise de $\mathbf{\Theta_P}$ et $\mathbf{\Theta_{np}}$. Ex. 2 - 3 - 4 : réponses correctes avec une mise en œuvre de techniques correctes reposant sur les technologies de la numération $\mathbf{\Theta_P}$, $\mathbf{\Theta_D}$ et $\mathbf{\Theta_{max}}$. Ex. 6 : le cardinal des collections représentées est correct ; la technique mise en œuvre repose sur $\mathbf{\Theta_P}$, $\mathbf{\Theta_D}$ et $\mathbf{\Theta_{max}}$. Ex. 11 : la réponse est correcte et met en jeu principalement $\mathbf{\Theta_P}$ et $\mathbf{\Theta_D}$.
N2	Ex. 1 : réponse correcte de la traduction de la numération parlée en écriture chiffrée et réciproquement témoignant d'une certaine fragilité dans $\mathbf{\Theta_P}$. Ex. 2 - 3 - 4 : réponses correctes avec une mise en œuvre de techniques correctes reposant sur les technologies de la numération $\mathbf{\Theta_P}$, $\mathbf{\Theta_D}$ ou du calcul. Ex. 6 : réponses correctes avec une mise en œuvre de techniques correctes reposant sur les technologies du calcul (en particulier pour 6a et 6b). Ex. 11 : réponse correcte avec trace de calcul.
N3	Ex. 1 : traduction incorrecte de la numération parlée en écriture chiffrée et réciproquement témoignant d'un manque de maitrise ou pas de mobilisation de $\mathbf{\Theta_P}$ et $\mathbf{\Theta_{np}}$. Ex. 2 - 3 - 4 : réponses incorrectes résultant de l'utilisation de techniques en dehors de leur domaine de validité et non justifiées par les technologies de la numération, en particulier $\mathbf{\Theta_D}$ et $\mathbf{\Theta_{max}}$. Ex. 6 : l'écriture chiffrée du cardinal des collections témoigne d'un manque de maitrise dans $\mathbf{\Theta_{max}}$ mais aussi d'un manque de maitrise dans $\mathbf{\Theta_D}$ principalement : les rapports de 10 existant entre les différents contenants étant incorrectement pris en compte. Ex. 11 : confusion entre l'ajout et le retrait d'une centaine. La technologie $\mathbf{\Theta_P}$ permet de reconnaître le chiffre des centaines mais ne suffit pas pour produire une réponse correcte (manque de maitrise ou pas de mobilisation de $\mathbf{\Theta_D}$).
N4	Ex. 1 : traduction incorrecte de la numération parlée en écriture chiffrée et réciproquement témoignant d'une absence des technologies $\mathbf{\Theta_P}$ et $\mathbf{\Theta_{np}}$. Ex. 2 - 3 - 4 : réponses incorrectes résultant de l'utilisation de techniques ne faisant pas référence aux éléments technologiques de la numération. Ex. 6 : réponses incorrectes résultant de techniques de comptage et/ou ne faisant pas référence aux éléments technologiques de la numération. Ex. 11 : pas de reconnaissance du chiffre des centaines interprété comme un défaut de la technologie $\mathbf{\Theta_P}$.

Tableau 9 - Codage transversal des technologies impliquées dans la dimension N

En repérant des cohérences de fonctionnement sur ces différents exercices à partir du codage des réponses des élèves, il sera alors possible de définir des technologies dominantes caractérisant les praxéologies apprises et par la suite définir des profils d'élèves. Nous y reviendrons dans la dernière partie de ce chapitre.

Nous précisons enfin que la distinction entre les technologies de calcul et de numération qui, d'un point de vue théorique, dans la définition du modèle, sépare les codes N1 et N2, risque d'être difficile à établir à partir des productions d'élèves, à moins qu'il n'y ait des traces de calcul posé. Nous y reviendrons lors de l'analyse des résultats, lorsque nous éprouverons le modèle d'analyse et le test diagnostique construits.

II.2.3 Dimension CA : calcul arithmétique

Les quatre codes de la dimension CA ont été définis de la façon suivante dans le chapitre 6 selon les technologies qui interviennent dans le calcul posé ou réfléchi :

CA1 : utilisation de techniques sous-tendues par les technologies de la numération ($\boldsymbol{\Theta_P}$, $\boldsymbol{\Theta_D}$ et $\boldsymbol{\Theta_{max}}$), des décompositions arithmétiques des nombres ($\boldsymbol{\Theta_{dec\_+}}$ et $\boldsymbol{\Theta_{dec\_\times}}$) et l'ensemble des propriétés des opérations, y compris celles complexes. *Les répertoires sont maitrisés.*

CA2 : utilisation de techniques sous-tendues par les technologies de la numération ($\boldsymbol{\Theta_P}$, $\boldsymbol{\Theta_D}$ et $\boldsymbol{\Theta_{max}}$) et des propriétés de base des opérations. *Les répertoires sont maitrisés.*

CA3 : utilisation de techniques sous-tendues par $\boldsymbol{\Theta_P}$ et par les propriétés d'associativité et d'associativité ($\boldsymbol{\Theta_{ass\_+}}$, $\boldsymbol{\Theta_{ass\_\times}}$ et $\boldsymbol{\Theta_{comm\_+}}$ et $\boldsymbol{\Theta_{comm\_\times}}$). Les technologies $\boldsymbol{\Theta_D}$ et $\boldsymbol{\Theta_{max}}$ ne sont pas encore construites et conduisent à l'utilisation de techniques en dehors de leur domaine de validité ; ce qui induit des erreurs de retenues, de décalage, etc. Les autres propriétés des opérations ne sont pas encore construites et conduisent à la mise en œuvre de techniques erronées. *Les calculs font référence aux répertoires, mais avec des erreurs*.

CA4 : utilisation de techniques sous-tendues par la technologie de comptage $\boldsymbol{\Theta_{compt}}$; les technologies des calculs ne sont pas construites (pas de référence aux propriétés de la numération, des opérations, ni aux répertoires).

Huit questions permettent de repérer les techniques de calcul ; nous illustrons les codages des réponses sur une question de calcul réfléchi (exercice 5, question 5b) et sur une question de calcul posé (exercice 7 question 7a) et nous plaçons les autres éléments de codage en Annexe 3.

<u>Codage des réponses des questions 5b</u>

L'exercice 5 est composé de trois questions ; pour les deux premiers calculs (5a et 5b), la consigne engage l'élève à écrire les étapes de son raisonnement :

Écris en ligne les différents calculs que tu fais pour trouver le résultat de chaque calcul. <u>Tu ne dois pas poser l'opération.</u>

En demandant à l'élève d'écrire en ligne les calculs qu'il réalise, nous avons accès aux techniques qu'il emploie pour réaliser son calcul et nous pouvons aussi évaluer la qualité des expressions arithmétiques écrites ainsi que l'emploi adapté ou non du signe égal (dimension RE du modèle). Dans ce paragraphe, nous ne traitons que de la dimension CA ; le codage pour la dimension RE est traité dans le paragraphe II.2.4.

5b. 150-19

Avant d'expliciter le codage des techniques à partir des classes de réponse anticipées et des technologies qui les sous-tendent, nous listons dans le Tableau 10 les différentes techniques permettant de produire la réponse demandée et faisons apparaître les technologies en jeu.

Techniques	Éléments technologiques	Réponse élève correcte
$\tau_{CR\_posé}$	Θ_P - Θ_D - Θ_{max} (et $\Theta_{écart}$)	10 unités - 9 unités = 1 unités ; 4 dizaines - 1 dizaines = 3 *... mise en œuvre mentale de l'algorithme du calcul posé*
τ_{compt}	Θ_{compt}	*J'ai décompté de un en un...*
$\tau_{CR\_-\_dec\_eapd}$	Θ_P - Θ_D - Θ_{max}	150 - 19 = 150 - 10 - 9 = 140 - 9 = 131 150 - 19 = 100 + 50 - 10 - 9 = 100 + 40 - 9 = 130 - 9 = 131
$\tau_{CR\_-\_dec-arithm+\_}$	Θ_{Dec_+}	150 - 19 = (149 + 1) -19 = (149 - 19) + 1 = 131
$T_{CR\_-\_compens}$	$\Theta_{écart}$; Θ_D et Θ_P	150 - 19 = (150 + 1) - (19 + 1) = 151 - 20 = 131
$\tau_{CR\_-\_excès}$	Θ_{Dec_+} - $\Theta_{sous-diff}$	150 - 19 = 150 - 20 + 1 = 130 + 1 150 - 19 = 150 - 10 - 10 + 1 = 130 + 1
$\tau_{CR\_-\_add\_trous}$	Θ_D et Θ_P	19 + ... = 150 19 + 100 = 119 ; 119 + 30 = 149 ; 149 + 1 = 150

Tableau 10 - Analyse des réponses correctes d'élèves selon les techniques mises en jeu (question 5b)

Les techniques attendues ici sont $\tau_{CR\_-\_excès}$ et $\tau_{CR\_-\_dec\_eapd}$; $\tau_{CR\_-\_excès}$ repose sur Θ_{Dec_+} et $\Theta_{sous-diff}$ correspondant aux propriétés arithmétiques des nombres et de la soustraction, alors que $\tau_{CR\_-\_dec\_eapd}$ repose uniquement sur des technologies de la numération Θ_D et Θ_P. Par conséquent, ces deux techniques, conduisant à la réponse correcte, sont codées respectivement CA1 (pour $\tau_{CR\_-\_excès}$) et CA2 (pour $\tau_{CR\_-\_dec\_eapd}$).

CA3 code l'utilisation de $\tau_{CR\_posé}$, mais aussi des réponses fausses émanant d'erreurs dans les répertoires ou de l'utilisation non maitrisée des techniques listées précédemment. Ces erreurs proviennent d'un manque de contrôle sur la technique lié à des technologies sous-jacentes qui sont incomplètes ou non mobilisées ; par exemple, l'utilisation de :
- $\tau_{CR\_-\_excès}$ avec une technologie $\Theta_{sous-diff}$ non mobilisée conduit au calcul :
150 - 19 = 150 - 20 - 1 = 129 (19 est décomposé sous la forme 20 - 1 ; $\Theta_{sous-diff}$ permet la réécriture 150 - 19 = 150 - 20 + 1. La technologie n'est donc pas mobilisée lorsque l'élève obtient 129 comme résultat).
- $\tau_{CR\_-\_dec\_eapd}$ sous-tendue de façon inadaptée par $\Theta_{sous-diff}$ amène aussi à des erreurs du type :
150 - 19 = 150 - 10 + 9 = 149 ou 150 - 19 = 100 - 10 - 50 - 9 = 41

CA4 indique du comptage (Θ_{compt}) se traduisant par un décomptage de 1 en 1, mais aussi par une mise en œuvre erronée des techniques de calcul posé ; ces dernières ne font pas référence aux technologies de la numération ou de l'écart constant et conduisent à des justifications du type :

0 - 9 = 9 ; 5 - 1 = 4 ; 150 - 19 =149 (soustraction chiffre à chiffre)
0 - 9 = 1 ; 5-1 = 4 ; 1 - 0 = 1 ; 150- 19 =141

Le Tableau 11 reprend la description des codages pour la question 5b ; une analyse identique est menée pour la question 5a en Annexe 3.

CA1	Réponses correctes reposant sur une décomposition arithmétique d'un des nombres et sur les propriétés de la soustraction ($\mathbf{\Theta_{Dec\_+}}$ - $\mathbf{\Theta_{sous\text{-}diff}}$) et correspondant à la mise en œuvre de $\mathbf{\tau_{CR\_-\_excès}}$.
CA2	Réponses correctes reposant uniquement sur des décompositions en EAPD ($\mathbf{\Theta_P}$ et $\mathbf{\Theta_D}$) et correspondant à la mise en œuvre de $\mathbf{\tau_{CR\_-\_dec\_eapd}}$.
CA3	Réponses correctes avec $\mathbf{\tau_{CR\_posé}}$ et réponses incorrectes dues à des erreurs dans les répertoires ou dans l'utilisation d'une des techniques de calcul réfléchi due à un manque de maîtrise des technologies $\mathbf{\Theta_{Dec\_+}}$ ou $\mathbf{\Theta_{sous\text{-}diff}}$ (exemples de réponses : 129, 149,...).
CA4	141 ; 149...Réponses faisant référence à la technique de comptage ($\mathbf{\Theta_{compt}}$).

Tableau 11 - Codage des réponses de la question 5b selon les technologies impliquées dans la dimension CA

Nous ne prenons pas en compte dans le codage des réponses de la qualité de la réécriture des expressions arithmétiques ; nous l'évaluerons pour la dimension RE.

<u>Codage des réponses de l'exercice 7</u>

L'exercice 7 est composé de deux opérations à poser et à effectuer : une multiplication et une division euclidienne. Le choix des nombres intervenant dans ces opérations est justifié dans l'analyse *a priori* de la tâche réalisée en Annexe 2 et le codage de la question 7b figure en Annexe 3.

Nous rappelons que dans le calcul posé, la distinction entre les codes CA1 et CA2 se situe dans la présence ou non de l'écriture des étapes de calcul intermédiaire (lignes de zéros pour la multiplication) qui peut traduire une maîtrise moins experte des technologies relatives à la numération impliquées pour N2.

7a. Pose et effectue : 538 x 702

La réponse attendue pour cet exercice correspond à la mise en œuvre de $\mathbf{\tau_{CP\_\times}}$ et est codée CA1 : elle est justifiée par les technologies relatives à la numération et par $\mathbf{\Theta_{dist,}}$ mais aussi par $\mathbf{\Theta_{comm\_\times}}$ pour l'inversion éventuelle des nombres dans l'opération posée.

Toutes les productions faisant apparaitre une ligne de zéros intermédiaire sont codées CA2.

$$\begin{array}{r} 5\,3\,8 \\ \times\ 7\,0\,2 \\ \hline 1\,0\,7\,6 \\ 3\,7\,6\,6\,0\,0 \\ \hline 3\,7\,7\,6\,7\,6 \end{array}$$

Les erreurs attendues peuvent être dues à :

- une maitrise incorrecte des répertoires multiplicatifs, mais avec une mise en œuvre correcte de $\mathbf{\tau_{CP\_\times}}$;

- une utilisation erronée de $\mathbf{\tau_{CP\_\times}}$ qui se traduit par l'absence de décalage sur la deuxième ligne, ou du décalage d'un seul rang (comme ci-contre). Nous interprétons cette erreur comme provenant d'une maitrise incorrecte des technologies $\mathbf{\Theta_P}$ et $\mathbf{\Theta_D}$ qui justifient $\mathbf{\tau_{CP\_\times}}$.

$$\begin{array}{r} 5\,3\,8 \\ \mathrm{X}\ 7\,0\,2 \\ \hline 1\,0\,7\,6 \\ 3\,7\,6\,6\,0 \\ \hline 3\,8\,7\,3\,6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,3\,8 \\ \times\ 7\,0\,2 \\ \hline 1\,0\,7\,6 \\ 3\,7\,6\,6 \\ \hline 4\,8\,4\,2 \end{array}$$

- la combinaison des deux types d'erreurs précédents (méconnaissance des répertoires et technique erronée).
Ces trois types d'erreurs sont codés N3.

D'autres erreurs peuvent être dues à la mise en œuvre de techniques de calcul ne correspondant pas à $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_\times}}$ et ne faisant à référence à aucun élément technologique de la numération ou des opérations. Par exemple, il peut s'agir de transposer $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_+}}$ pour l'effectuation du calcul avec des calculs du type : 2 × 8 = 16 ; 0 × 3= 0 ; 7 × 5 = 35 ; le résultat obtenu est du type 35016 ou 3516.

Le dernier type d'erreur correspond à l'absence de prise en compte des technologies intervenant dans $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_\times}}$ et est par conséquent codé N4.

CA1	377 676 avec des écritures simplifiées
CA2	377 676 avec des lignes zéros apparentes dans la pose du calcul
CA3	38 736 ou 4842 ou tout autre résultat provenant d'une maitrise encore insuffisante de $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{P}}$et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$ (application inadaptée de $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CP\_\times}}$) ou d'une méconnaissance des répertoires
CA4	35016 ou 3516 ou toute autre utilisation d'un procédé qui ne relève pas des technologies de la numération ou du calcul.

Tableau 12 - Codage des réponses de la question 7a selon les technologies impliquées dans la dimension CA

Comme pour les dimensions UA et N étudiées précédemment, nous montrons dans le tableau de synthèse ci-dessous (Tableau 13) la façon dont sont codées les réponses sur la dimension CA sur l'ensemble des 7 questions.

<u>Codage transversal des techniques en fonction des technologies impliquées dans la dimension CA :</u>

CA1	<u>Ex. 5a et 5b :</u> le calcul réfléchi de sommes et de différences appelle des propriétés arithmétiques des nombres et des opérations (telles que $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{Dec\_+}}$ - $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{sous\text{-}diff}}$ ou $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{écart}}$) pour justifier les techniques employées. <u>Ex. 5c :</u> les techniques de calcul font référence aux propriétés de la division (égalité caractéristique de la division). <u>Ex. 7a et 7b :</u> les calculs aboutissent à un résultat correct avec une technique adaptée ; ils témoignent d'une maitrise des répertoires, des propriétés des opérations et de la numération. <u>Ex. 8 :</u> le calcul de la division est correct (qu'il soit effectué de façon posée ou mentalement) et témoigne d'une maîtrise des répertoires et des propriétés de la division. <u>Ex. 10 :</u> les calculs sont réalisés correctement et témoignent de la maitrise des répertoires et de la connaissance des opérations inverses de l'addition, de la soustraction et de la multiplication.
CA2	<u>Ex. 5a et 5b :</u> le calcul réfléchi de sommes et de différences appelle des propriétés de la numération (telles que $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{p}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{np}}$). <u>Ex. 5c :</u> le résultat donné est correct et est justifié par une règle de décalage de la virgule, ou par le fait que l'on enlève le chiffre des unités et relève donc d'arguments technologiques liés à la numération : $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{P}}$, $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{max}}$. <u>Ex. 7a et 7b :</u> les calculs aboutissent à un résultat correct avec une technique adaptée, mais ils pourraient être simplifiés ; ils témoignent d'une maitrise des répertoires mais les propriétés des opérations comme celles de la numération sont connues mais pas encore de façon assurée pour rendre les techniques plus efficaces. <u>Ex. 8 :</u> les calculs aboutissent à un résultat correct, mais correspondent à des multiplications (modèle multiplicatif utilisé). Le quotient de la division est obtenu par essais-erreurs. <u>Ex. 10 :</u> utilisation du calcul posé à la place de calcul mental ou réécritures peu efficaces.

CA3	<u>Ex. 5a et 5b :</u> les propriétés des opérations sont incomplètes ou non mobilisées et conduisent à des erreurs dans la technique employée (l'ajout de 99 pouvant par exemple conduire à l'ajout de 100 puis de 1) <u>Ex. 5c :</u> réponses correctes avec $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_pos\acute{e}}}$ ou erreur due à des technologies $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{div\text{-}euc}}$ ou $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{P}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$ incomplètes ou non mobilisées qui peuvent conduire par exemple à l'ajout d'un zéro dans une division par 10. <u>Ex. 7a et 7b :</u> les techniques de calculs sont utilisées de façon incorrecte, les technologies $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{P}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$ ou $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{div\_euc}}$ sont incomplètes ou non mobilisées. Ce qui se traduit par des erreurs de retenues ou de décalage liées à la numération. <u>Ex. 8 :</u> réponse fausse provenant d'une technique de division erronée ou d'additions ou soustractions successives pour l'effectuer. <u>Ex. 10 :</u> utilisation de techniques en dehors de leur domaine de validité, en particulier, méconnaissance des propriétés des opérations et de leur inverse. Dans chacun des exercices, des erreurs peuvent aussi être dues à un manque de maitrise des répertoires.
CA4	<u>Ex. 5a et 5b et c :</u> utilisation de technique de comptage ou de techniques qui ne se réfèrent pas à des propriétés des opérations ou à des technologies de la numération. <u>Ex. 7a et 7b :</u> mise en œuvre de techniques erronées ne se référant pas à des technologies attendues (de la numération ou des opérations). <u>Ex. 8 :</u> mise en œuvre de techniques erronées ou calcul correct mettant en jeu des nombres « simples » de l'énoncé (8 + 4 ou 8 + 3...). <u>Ex. 10 :</u> mise en œuvre de techniques erronées ou calcul correct mettant en jeu des nombres « simples » de l'énoncé (17 + 6, 12 + 20...).

Tableau 13 - Codage transversal des technologies dominantes caractérisant la dimension CA

II.2.4 Dimension RE : Réécriture d'expressions

Lors de la description du modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves, nous avons insisté sur le statut du signe égal et sa définition comme relation d'équivalence par rapport au type d'expressions arithmétiques produites : un problème ou un calcul demandant plusieurs opérations enchaînées peut être traduit par une seule expression arithmétique ou par plusieurs. A la fin de l'école élémentaire, il n'est pas attendu des élèves qu'ils produisent des écritures arithmétiques complexes traduisant une succession d'opérations. Nous avions alors déterminé les codes suivants (chapitre 6) pour interpréter les réponses liées aux écritures :

RE1 : écritures arithmétiques en ligne correctes produites pour traduire une suite d'opérations montrant un emploi du signe « = » comme relation d'équivalence.

RE2 : écritures arithmétiques pas à pas séparées pour traduire une suite d'opérations montrant un emploi du signe « = » comme annonce de résultat ou utilisation d'ostensifs transitoires (arbres à calcul par exemple).

RE3 : le signe égal n'est pas perçu comme relation d'équivalence : ce qui se traduit par des égalités enchaînées ou des égalités fausses, le signe égal apparaissant comme une abréviation.

RE4 : utilisation du signe « = » comme abréviation à l'intérieur d'une phrase (et non comme symbole mathématique) ou absence d'utilisation du signe égal.

Nous donnons ci-dessous des exemples d'écritures illustrant chacun de ces codes pour les trois exercices concernés par l'évaluation de cette dimension ; les productions qui ne font apparaitre que les résultats finaux ne permettent pas de codage sur cette dimension.

Codage des réponses de l'exercice 5 :

	Question 5a	Question 5b
RE1	358 + 99 = 358 + 100 - 1 = 458 - 1 = 457	150 - 19 = 150 - 20 + 1 = 130 + 1 = 131
RE2	358 + 100 = 458 458 - 1 = 457	150 - 20 = 130 130 + 1 = 131
RE3	358 + 100 = 458 - 1 = 457	150 - 20 = 130 + 1 = 131
RE4	358 + 100 458 457 *le résultat étant éventuellement entouré ou souligné* ou*« Je fais 358 + 100 et c'est = à 458. »*	150 - 20 130 131 *le résultat étant éventuellement entouré ou souligné* ou*« Je fais 150 - 20 et c'est = à 130. »*

Tableau 14 - Codage des réponses des questions 5a et 5b selon les technologies impliquées dans RE

Codage transversal des techniques en fonction des technologies impliquées dans la dimension RE :

Nous évaluons la réécriture d'expressions sur quatre questions réparties en 2 exercices : 5a, 5b et 10a, 10b.

RE1	Écritures arithmétiques correctes uniques Ex 5a : 358 + 99 = 358 + 100 - 1 = 458 - 1 = 457 Ex 5b : 150 - 19 = 150 - 20 + 1 = 130 + 1 = 131 Ex 10a : 30 × 2 + 8 - 3 = 60 + 8 - 3 = 65 Ex10b : (125 + 3 - 8) : 2 = 120 : 2 = 60 *ou* 60 × 2 + 8 - 3 = 120 + 8 - 3 = 125		
RE2	Écritures arithmétiques correctes pas à pas séparées ; utilisation du schéma du programme de calcul pour l'exercice 10 avec les flèches (ostensif transitoire). Ex 5a : 358 + 100 = 458 458 - 1 = 457 Ex 5b : 150 - 20 = 130 130 + 1 = 131	Ex 10a : 30 × 2 = 60 60 + 8 = 68 68 - 5 = 65	Ex10b : 125 + 3 = 128 128 - 8 = 120 120 : 2 = 60
RE3	Égalités enchaînées ou des égalités fausses du type : Ex 5a : 358 + 100 = 458 - 1 = 457 Ex 5b : 150 - 20 = 130 + 1 = 131 Ex 10a : 30 × 2 = 60 + 8 = 68 - 3 = 65 Ex 10b : 125 + 3 = 138 - 8 = 120 : 2 = 60		
RE4	Utilisation du signe « = » comme abréviation à l'intérieur d'une phrase ou pas d'utilisation Ex 5a et 5b : 358 + 100 458 457 *le résultat étant éventuellement entouré ou souligné* Ex 10a : 30 60 68 65.		

Tableau 15 - Codage transversal des technologies dominantes caractérisant la dimension RE

En conclusion, les tableaux récapitulatifs sur chacune des quatre dimensions montrent la transversalité du codage correspondant aux éléments technologiques mobilisés dans la résolution chaque exercice. Nous ne les exploitons pas dans cette partie de la thèse, mais y reviendrons lors de la définition des profils des élèves à partir d'exemples de production.

III Expérimentation

205 élèves de CM2 ont passé le test en juin 2015[4] afin de le mettre à l'épreuve par rapport à des contraintes de passation (durée du test, compréhension de la tâche, clarté des consignes, etc.) et d'étudier sa validité relativement au modèle d'analyse multidimensionnelle construit. Nous nous sommes efforcée de sélectionner des classes provenant d'écoles avec des profils variés[5], mais notre échantillon ne prétend pas être représentatif de la population des élèves de fin d'école.

Nous avons donné pour consigne aux enseignants de relever le temps mis par chaque élève pour faire la totalité du test et d'arrêter les élèves après 55 minutes de composition ; ce temps nous paraissait suffisant pour la réalisation des tâches proposées et dans un objectif futur d'exploitation en classe par les enseignants, il nous semblait aussi nécessaire de ne pas dépasser cette durée pouvant correspondre à celle d'une séance en classe. Les élèves ne disposaient pas de calculatrice et ont été invités à utiliser comme brouillon l'envers des feuilles distribuées, ce qui nous a permis de repérer les traces de techniques de calcul dans les exercices pour lesquelles des techniques de numération étaient attendues. Aucune consigne supplémentaire de passation n'a été donnée.

Nous présentons dans ce paragraphe les premiers retours généraux sur le déroulement de la passation en classe (durée, compréhension des consignes), ainsi que des résultats sur la réussite des élèves au test et aux items.

III.1 Passation du test

Les élèves de notre échantillon ont mis en moyenne 43 minutes pour réaliser l'ensemble du test ; les durées de passation s'étendent de 20 à 55 minutes. Seuls sept élèves n'ont pas pu terminer le test et n'ont plus répondu à partir des exercices 7 ou 8. Le test semble donc adapté à la durée de passation prévue.

La formulation de la consigne de certains exercices n'est pas suffisamment claire pour l'ensemble des élèves : la formulation de la question 5c, comme celle de la question 7b sur les divisions euclidiennes est problématique, les élèves calculant des quotients décimaux ou questionnant l'enseignant, à de multiples reprises, sur la signification de l'expression « division euclidienne ».

En ce qui concerne l'exercice 6, il est demandé le nombre de bonbons contenus dans les configurations situées *en dessous* des questions et non *au-dessus*. Nous avons constaté certaines erreurs provenant d'une mauvaise lecture de la consigne ; un cadre délimitant la question et la configuration concernée permettront vraisemblablement de lever cette ambigüité.

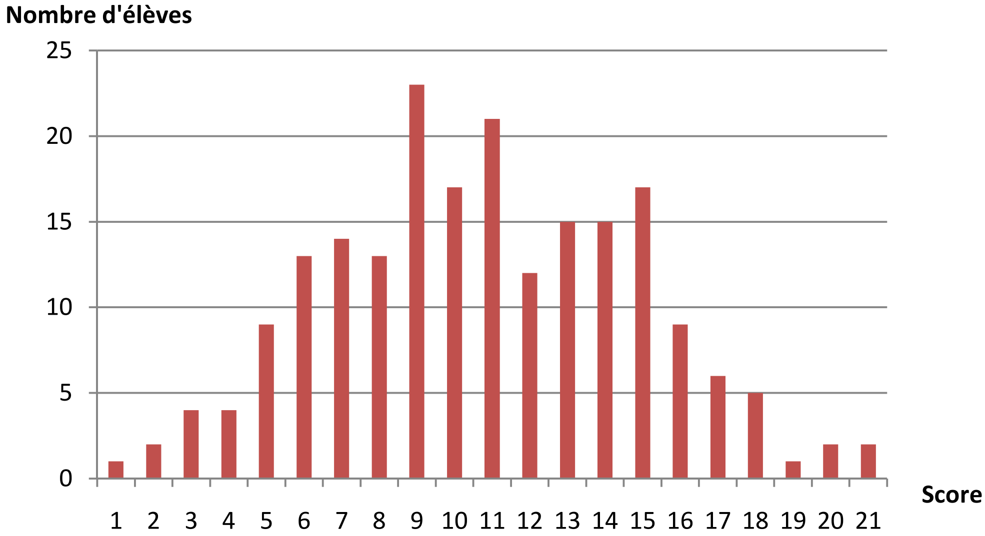
Nous retrouvons à travers ces observations la question de la validité psycho-didactique des exercices d'évaluation ; une étude similaire à celle menée sur les stratégies de réponses aux QCM (Sayac & Grapin 2014a) afin d'observer les processus mis en jeu par les élèves pour répondre aux QCM du test apporterait des preuves de validité complémentaires.

[4] Pour notre recherche, l'expérimentation a été menée en juin, en fin de CM2. L'évaluation diagnostique est conçue pour une exploitation par l'enseignant de 6ème, à l'entrée du collège.

[5] Deux classes d'une école située en REP en Seine-Saint-Denis (soit 40 élèves), 2 classes d'une école parisienne (47 élèves), 5 classes d'une même commune située en Seine et Marne (118 élèves).

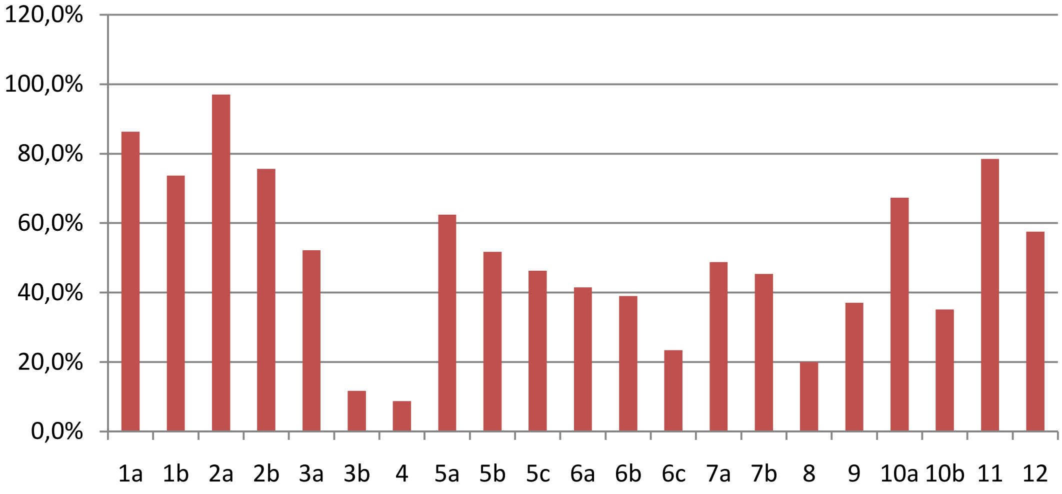
III.2 Résultats de l'expérimentation en termes de réussite

Le score moyen de réussite est de 10,8 sur un total de 21 réponses considérées ; les scores s'étendent entre 1 et 21 points (Graphique 1) ; la médiane est 11, le premier et le troisième quartile sont positionnés tous deux à 3 points de la médiane ($q_1 = 8$ et $q_2 = 14$).



Graphique 1 - Répartition des élèves selon le score

Nous complétons cette analyse globale par les scores de réussite moyens par item (Graphique 2) :



Graphique 2 - Score de réussite moyen par item

Les exercices portant sur une conversion d'unités de numération (3b et 4) figurent parmi les moins bien réussis, ce qui confirme les résultats obtenus par Chambris (2008) et Tempier (2013) ; par ailleurs, l'exercice 6, considéré comme un des plus complexes du test (les praxéologies étant r-convoquées avec choix de techniques), est très moyennement réussi (autour de 40 % pour les deux premières questions et 20 % pour la dernière). La résolution de problèmes de division partition (exercice 8) est elle aussi échouée (moins de 20 %), $\mathbf{T}_{\mathbf{RP\_:}}$ étant t-convoqué avec choix de technique. Les tâches relevant de types de tâches convoqués à des niveaux techniques (1a, 1b, 2a, 2b) sont pour certaines bien réussies, mais échouées pour d'autres (questions 3b et 4). Nous préciserons ces résultats par l'étude des réponses selon les technologies impliquées dans la partie IV de ce chapitre.

Nous observons aussi une cohérence de nos résultats avec ceux de l'évaluation CEDRE ; les exercices les mieux réussis (au-delà de 70 %) sont :

- la traduction d'une écriture en lettres en une écriture en chiffres (1a) et réciproquement (1b);
- la détermination d'un élément d'une suite arithmétique sans passage (2a) à une unité de rang supérieur ou inférieur ou avec (2b) ;
- la reconnaissance du nombre de centaines dans un nombre donné contextualisé en situation de résolution de problèmes (11).
- Les savoirs mis en jeu dans ces exercices correspondent à ceux caractérisant les groupes 1 et 2 de l'échelle de CEDRE.

De la même façon, les exercices les plus échoués au test diagnostique (problème de division-quotition et exercices avec conversion d'unités de numération) coïncident exactement avec les types de tâches représentées dans le groupe 5 de l'échelle de performance de CEDRE. Globalement, les questions portant sur le calcul posé (exercice 7) sont réussies entre 60 % et 40 %, ce qui rejoint aussi les résultats de CEDRE. En revanche, pour le calcul réfléchi, les résultats divergent par rapport à ceux de CEDRE, mais les formats de questions n'étant pas identiques entre les deux évaluations, l'écart constaté entre les résultats obtenus est difficilement interprétable.

III.3 Répartition des technologies impliquées dans les dimensions

Les codages des réponses selon les dimensions ont été appliqués pour toutes les réponses des élèves. Au-delà de l'analyse *a priori*, des réponses non anticipées sont apparues ; nous les avons codées en fonction des éléments technologiques qui sous-tendaient les techniques. Néanmoins, certaines des réponses ne permettent pas de repérer les techniques mises en jeu pour produire la réponse. Par exemple, certains élèves, comme Arthur (Figure 1), donnent leurs réponses sans donner trace des étapes de calcul, aussi bien pour le calcul réfléchi que pour la résolution de problèmes.

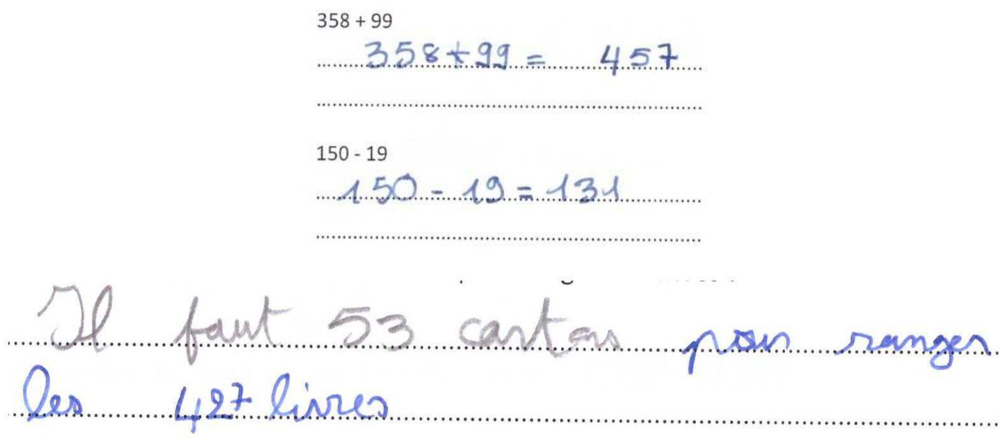


Figure 1 - Extrait de la production d'Arthur sur des questions de calcul réfléchi et de résolution de problème

Pour de telles réponses, il est impossible de les coder en termes de techniques ; le calcul du score au test intervenant dans la définition des profils, le fait que les réponses soient correctes (comme pour Arthur) est pris en compte dans ce cadre. Pour certaines réponses fausses, anticipées par l'analyse *a priori*, il est en revanche possible d'interpréter l'erreur réalisée par la mise en œuvre d'une technique inadaptée. Par exemple, pour l'exercice 6, les réponses de Fabio (Figure 2a) sont construites à partir du nombre d'objets et sont codées N4 alors que celles de Ryem (Figure 2b), incorrectes elles-aussi, ne peuvent être interprétées.

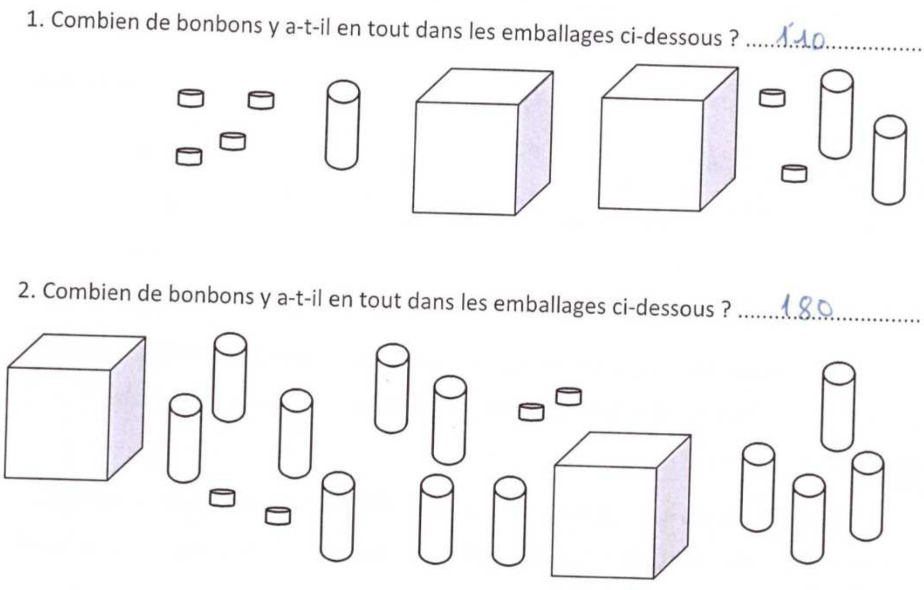


Figure 2a - Extrait de la production de Fabio - questions 6a et 6b

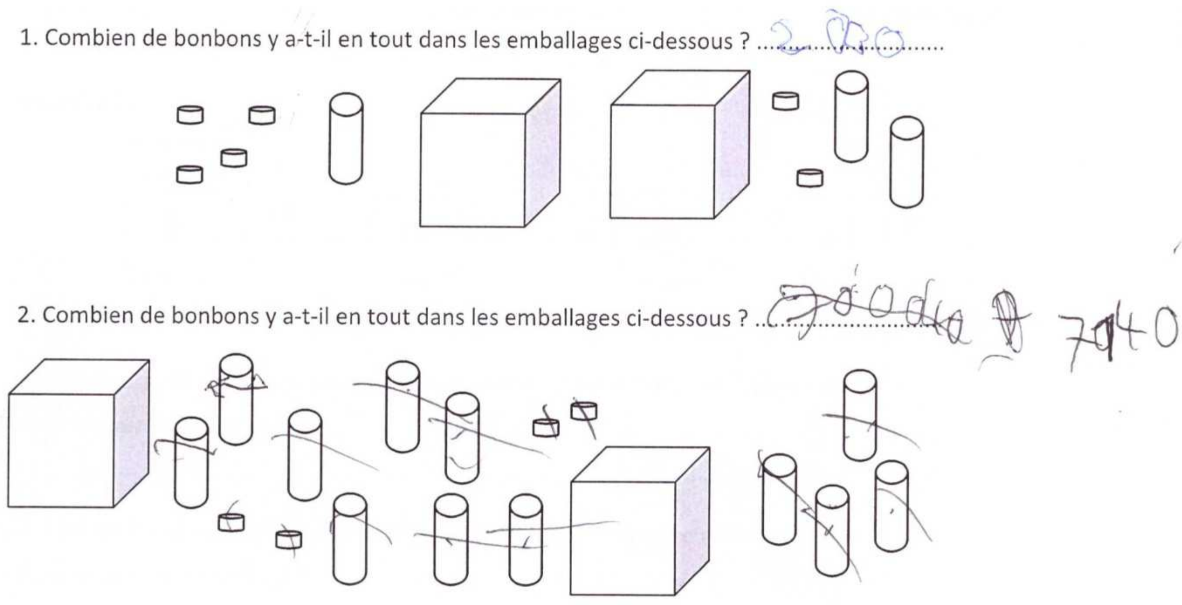


Figure 2b - Extrait de la production de Ryem - questions 6a et 6b

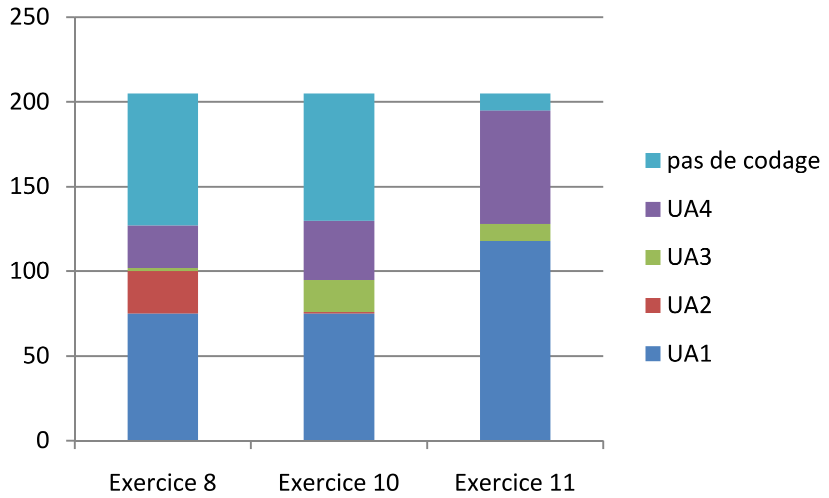
Il avait été demandé aux enseignants de conserver les brouillons utilisés par les élèves ou de faire utiliser l’envers des feuilles du test comme brouillon, mais nous n’avons pas pu récupérer de façon systématique ces éléments ; ce qui explique sur certains exercices un nombre conséquent de réponses non codées. Nous y reviendrons.

Pour chacune des dimensions, nous présentons sous forme de graphiques la répartition des technologies dominantes et exploitons ce graphique pour commenter les résultats. Nous illustrons le codage des techniques selon les technologies les sous-tendant par différentes productions d’élèves.

III.3.1 Répartition selon la dimension UA

III.3.1.i Répartition globale

Le graphique 3 indique la répartition des réponses des élèves selon les codes définis, en tenant compte des réponses non codées (soit parce que les élèves n'ont pas répondu, soit parce que la réponse n'est par interprétable).



Graphique 3 - Répartition des technologies impliquées selon les questions évaluant la dimension UA

Si de nombreuses productions n'ont pu être codées à partir des questions ouvertes, les élèves donnant la réponse sans trace de technique, nous observons néanmoins qu'entre 37 % et 58 % des élèves produisent une expression arithmétique correspondant à celle attendue en fin d'école (UA1). Par contre, entre 17 % et 33 % des élèves ne reconnaissent pas les modèles mathématiques en jeu dans des problèmes relevant des structures multiplicatives (de division pour l'exercice 8 ou de comparaison multiplicative pour l'exercice 11) ; cette observation interroge l'enseignement dispensé autour de la division à l'école, puisque 12 % (UA2 pour l'exercice 8) des élèves adoptent un modèle multiplicatif pour traiter un problème de division-quotition.

III.3.1.ii Exemples de productions d'élèves

UA 1 : les techniques codées UA1 correspondent à l'utilisation d'un modèle de division et conduisent à des divisions posées, accompagnées ou non d'une écriture en ligne de la division comme dans la production de Perle (Figure 3) ou à des écritures en lignes, comme pour Sébastien (Figure 5).

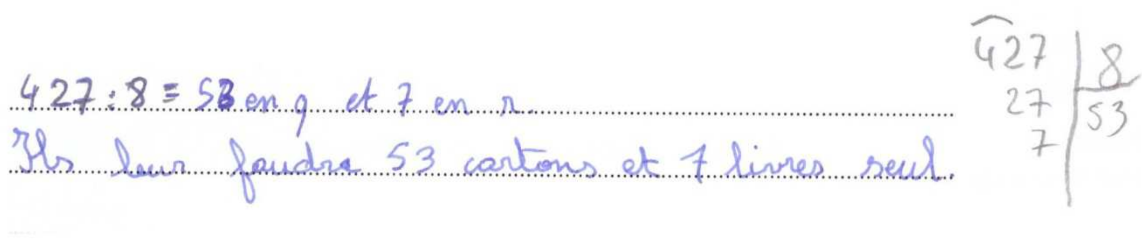
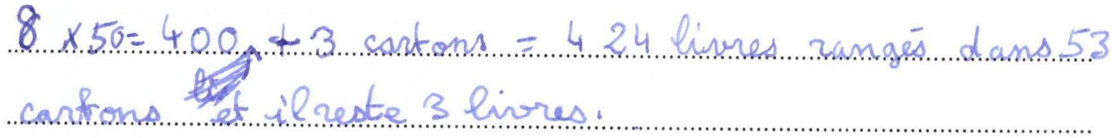


Figure 3 - Extrait de la production de Perle - Exercice 8

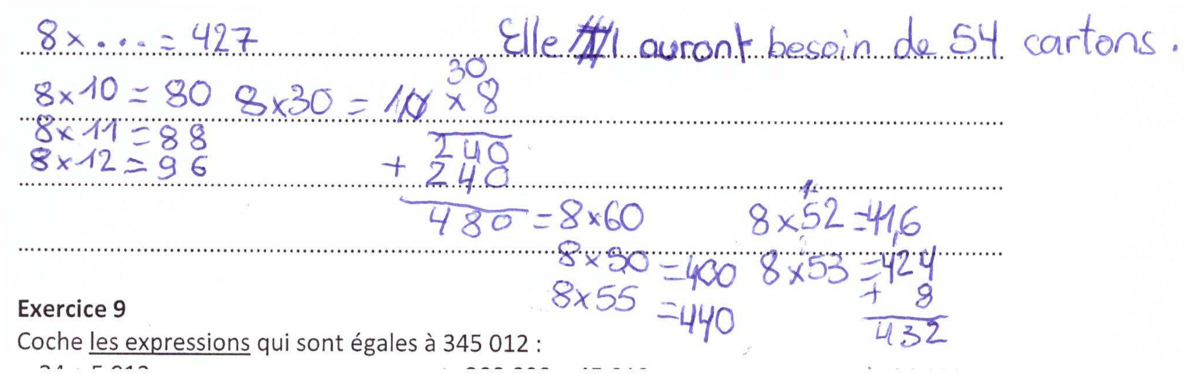
La production de Sébastien (Figure 4) n'est pas accompagnée d'un calcul posé ou d'essais-erreurs (comme dans la Figure 5). Nous l'interprétons comme la convocation d'un modèle de division, avec une gestion du calcul de façon réfléchie ; ce qui se traduit par l'écriture en ligne de l'égalité caractéristique de la division euclidienne. L'utilisation inadaptée du signe égal étant traitée dans la dimension RE.



8 x 50 = 400 + 3 cartons = 4 24 livres rangés dans 53 cartons et il reste 3 livres.

Figure 4 - Extrait de la production de Sébastien - Exercice 8

UA2 : il s'agit de techniques reposant sur l'utilisation de modèles mathématiques adaptés conduisant à des opérations à trous, et amenant ensuite à des calculs par encadrement du dividende avec les multiples du diviseur. La réponse de Carla (Figure 5) est représentative de ce type de technique : l'écriture de l'égalité à trou 8 × ... = 427 est établie au début de la résolution, les calculs menés ensuite visent à chercher le nombre manquant.



8 × ... = 427

Elle auront besoin de 54 cartons.

8×10 = 80
8×11 = 88
8×12 = 96

8×30 = 30 × 8

240
+ 240
480 = 8×60

8×50 = 400
8×55 = 440

8×52 = 416
8×53 = 424
+ 8
432

Exercice 9

Coche les expressions qui sont égales à 345 012 :

Figure 5 - Extrait de la production de Carla - Exercice 8

Les techniques mises en jeu par Carla, Perle et Sébastien dans les deux autres questions évaluant la dimension UA, sont codées UA1 ; ce qui témoigne d'une cohérence de fonctionnement sur cette dimension.

UA3 : les techniques utilisent des modèles additifs et soustractifs uniquement (pas de modèle multiplicatif ni de division), en particulier pour les problèmes de division. La production de Mohamed (Figure 6) illustre la mise en œuvre de telles techniques. Il utilise un arbre à calcul pour symboliser les additions successives du nombre 8. Il ne poursuit pas ses calculs et n'apporte pas de réponse à la question posée.

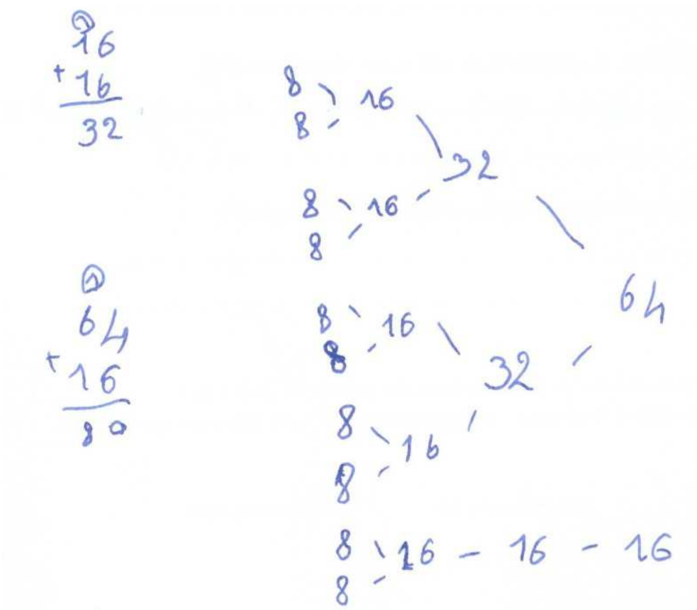


Figure 6 - Extrait de la production de Mohamed

Dans l’exercice 12 (reconnaissance d’un modèle multiplicatif), Mohamed a choisi la réponse 21 correspondant à la reconnaissance d’un modèle additif et n’a pas répondu à la question 10b. Les deux réponses qu’il fournies sont donc cohérentes et montrent, pour cet élève, la prégnance des modèles additifs au détriment de la construction des autres.

UA4 : mise en œuvre de $\mathbf{\Theta_{compt}}$ technologie de comptage ou pas de reconnaissance d’un modèle adapté.
La production de Yohann (figure 7) est représentative des élèves qui ne reconnaissent pas de modèle adapté (pas de tri sur les données utiles et inutiles et pas de reconnaissance de la structure du problème).

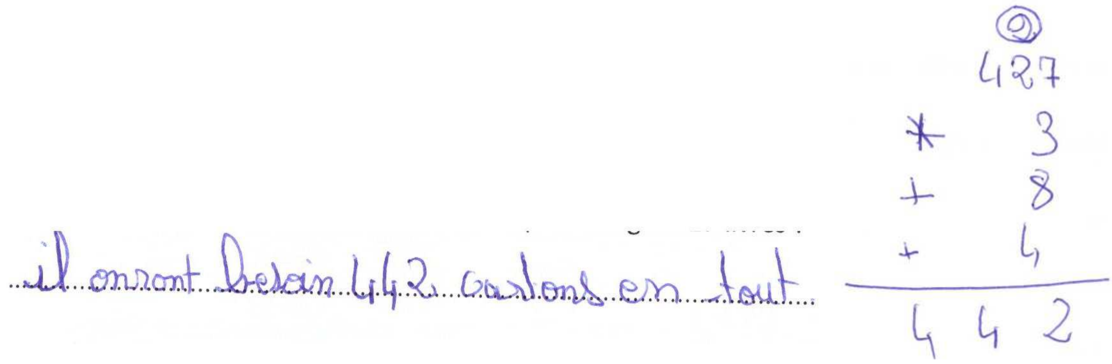


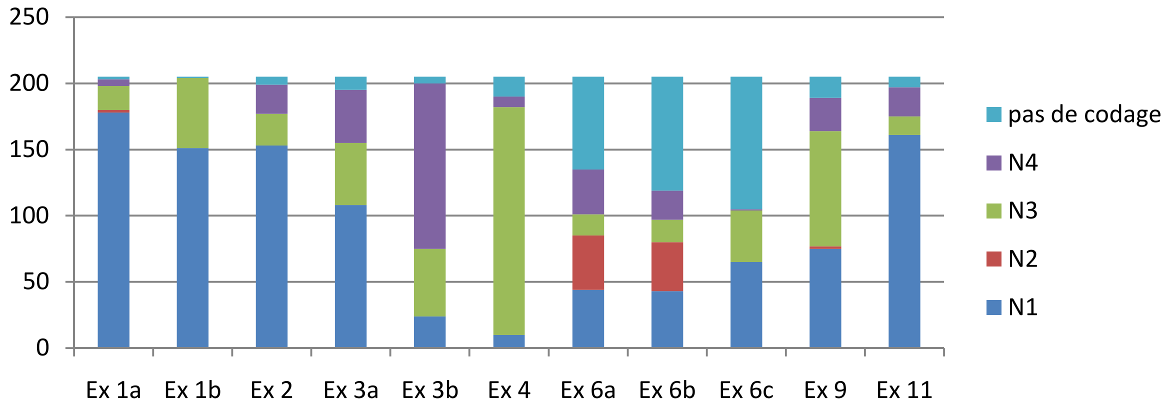
Figure 7 - Extrait de la production de Yohann

Yohann n’a pas répondu à la question 10b et a choisi, comme Mohamed, la réponse 21 à l’exercice 12. En plus de la prégnance des modèles additifs chez cet élève, il n’est pas en mesure de sélectionner les données qui interviennent dans la résolution du problème et à la différence de Mohammed, ne met pas en œuvre un modèle additif en lien avec la multiplication.

III.3.2 Répartition selon la dimension N

III.3.2.i Répartition globale

La répartition des réponses selon le codage des dimensions est très variable d'une question à l'autre (Graphique 4) et éclaire les constats que nous avions pu établir à partir des scores de réussite pour les exercices les moins bien réussis.



Graphique 4 - Répartition des technologies dominantes selon les questions évaluant la dimension N

Pour l'exercice 3b *(20 centaines et 15 dizaines est égal à ...),* nous observons que les réponses majoritairement employées sont codées N4, les techniques employées ne se référant pas aux technologies de la numération, en particulier à $\boldsymbol{\Theta_D}$. Pour l'exercice 4 *(comparer 2 milliers et 26 centaines avec 3 milliers et 15 centaines)*, les réponses sont majoritairement codées N3 et indiquent elles aussi le manque de mobilisation de la technologie $\boldsymbol{\Theta_D}$.

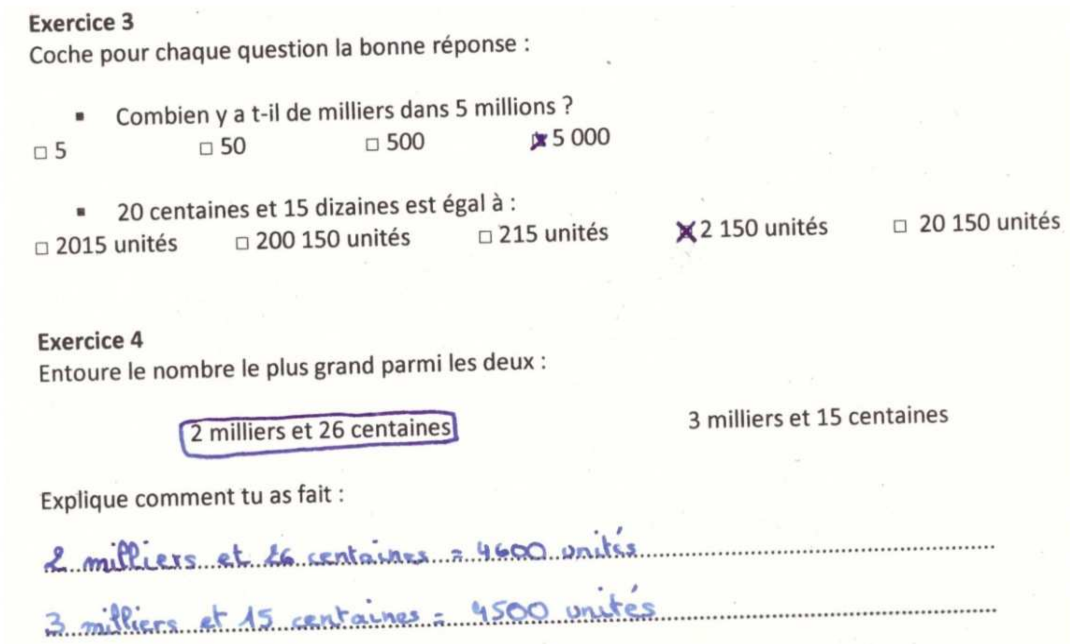
Si la répartition des codes sur l'ensemble des exercices permet d'avoir une vision globale de l'ensemble des technologies sous-tendant les réponses, il est nécessaire de retrouver des cohérences de fonctionnement pour pouvoir déterminer des profils d'élèves.

III.3.2.ii Exemples de productions d'élèves

Nous illustrons les codages pour certains exercices à partir de productions d'élèves : l'ensemble des réponses données sur la dimension N pour ces élèves est fournie en Annexe 5.

N1 : les techniques sont sous-tendues par l'utilisation des propriétés de la numération $\boldsymbol{\Theta_P}$ et $\boldsymbol{\Theta_D}$ et $\boldsymbol{\Theta_{max}}$.

Les réponses de Maili (Figure 8) à l'exercice 3 montrent la maitrise de l'aspect décimal de la numération et sont par conséquent codées N1.


Exercice 3
Coche pour chaque question la bonne réponse :

- Combien y a t-il de milliers dans 5 millions ?

□ 5 □ 50 □ 500 ☒ 5 000

- 20 centaines et 15 dizaines est égal à :

□ 2015 unités □ 200 150 unités □ 215 unités ☒ 2 150 unités □ 20 150 unités

Exercice 4
Entoure le nombre le plus grand parmi les deux :

2 milliers et 26 centaines 3 milliers et 15 centaines

Explique comment tu as fait :

2 milliers et 26 centaines = 4600 unités

3 milliers et 15 centaines = 4500 unités

Figure 8 - Extrait de la production de Maili - Exercices 3 et 4

N2 : les techniques sont sous-tendues par Θ_P et Θ_D et Θ_{max} mais elles sont accompagnées de techniques de calcul dans la résolution de certaines tâches.

Les techniques codées N2 font apparaître des traces de calcul, notamment dans l'exercice 6 pour indiquer le nombre de bonbons contenus dans les emballages. La distinction entre des techniques de calcul et des techniques basées sur la numération est complexe dans cet exercice, puisque les décompositions additives ou en puissances de dix peuvent être traitées avec les propriétés de la numération bien qu'elles laissent voir des ostensifs du calcul. Nous avons néanmoins choisi de coder N2 les productions d'élèves qui faisaient apparaitre des calculs en ligne amenant au résultat de façon plus ou moins détaillée comme pour la production de Sophie (Figure 9a) ou cellee de Gianni (Figure 9b).

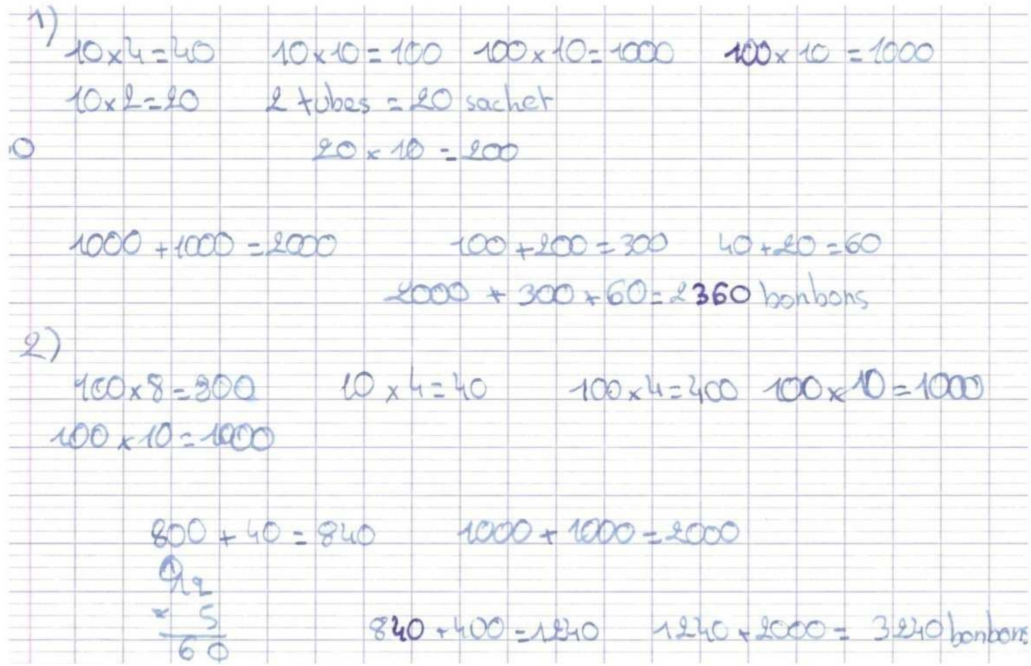

1) 10x4=40 10x10=100 100x10=1000 100x10=1000
10x2=20 2 tubes = 20 sachet
20x10=200
1000+1000=2000 100+200=300 40+20=60
2000+300+60=2360 bonbons
2) 100x8=800 10x4=40 100x4=400 100x10=1000
100x10=1000
800+40=840 1000+1000=2000
12 x 5 = 60
840+400=1240 1240+2000= 3240 bonbons

Figure 9a - Extrait de la production de Sophie - Questions 6a et 6b

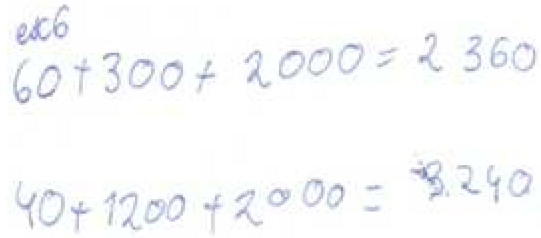


Figure 9b - Extrait de la production de Gianni - Questions 6a et 6b

N3 : les réponses codées N3 sont issues de l'utilisation de techniques sous-tendues par Θ_P et sans faire référence à Θ_D et $\Theta_{max.}$ La réponse de Swann (Figure 10) à l'exercice 4 est représentative des nombreuses réponses d'élèves qui ont effectué la comparaison entre les nombres en se limitant a nombre de milliers sans convertir d'abord les centaines en milliers.

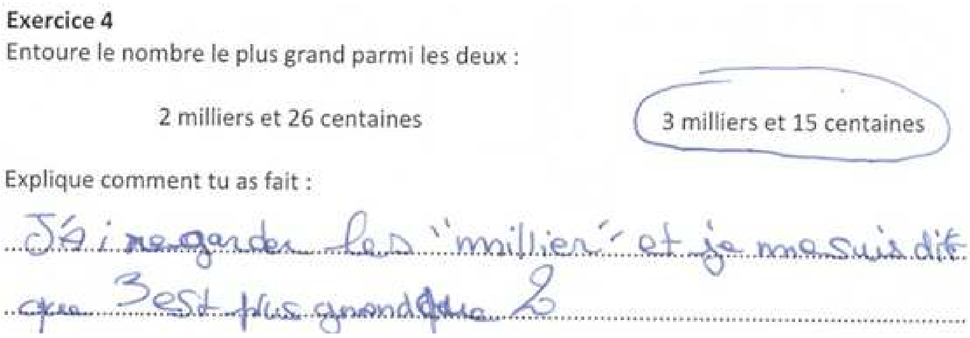


Figure 10 - Extrait de la production de Swann - Exercice 4

N4 : les réponses témoignent de l'utilisation de techniques sous-tendues par Θ_{compt} ou montrant que les technologies de la numération ne sont pas encore construites. Par exemple, dans l'exercice 6, les réponses témoignant du comptage du nombre d'objets et menant aux réponses 110 et 180 sont codées N4, comme pour la production Amandeen (Figure 11).

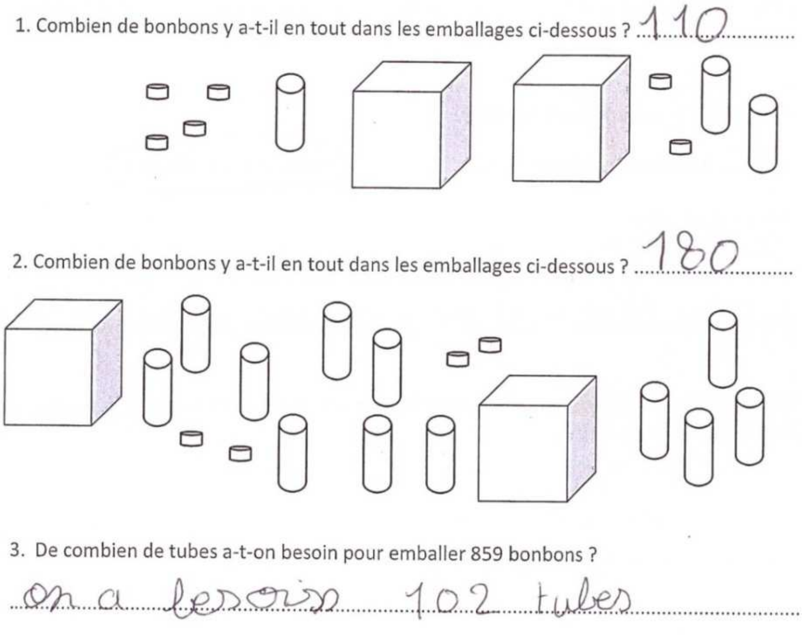
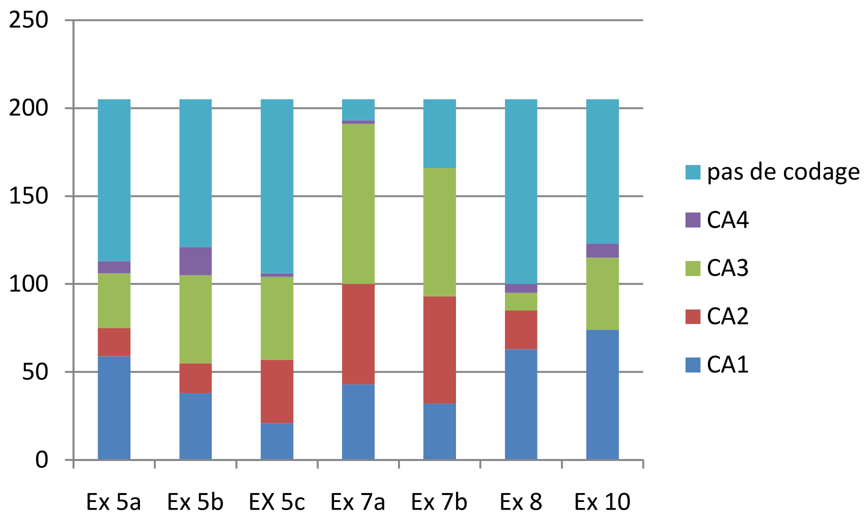


Figure 11 - Extrait de la production d'Amandeen - Exercice 6

III.3.3 Répartition selon la dimension CA

III.3.3.i Répartition globale

La répartition des codes de la dimension CA (Graphique 5) montre que peu de techniques sont codées CA4 pour l'ensemble des exercices, ce qui signifie que la plupart des élèves de fin d'école mettent en jeu des techniques de calcul reposant sur des technologies de la numération ou des opérations, même si elles ne sont pas complètes ou pas toutes mobilisées. Les techniques codées CA3 se réfèrent à des technologies n'étant pas maitrisées ; elles représentent, selon les exercices, entre 5 % et 44 % des techniques mises en œuvre.



Graphique 5 - Répartition des technologies dominantes selon les questions évaluant la dimension CA

De nombreuses réponses de l'exercice 5 ne sont pas codées selon les technologies impliquées parce que la production d'élève ne permet pas de déterminer la technique mise en jeu. Cela ne signifie pas pour autant que la réponse est fausse ou que l'élève n'a pas répondu ; nous l'avons illustré à partir de la Figure 1 au début du paragraphe III.3.

III.3.3.ii Exemples de productions d'élèves

Comme pour les dimensions précédentes, nous illustrons le codage utilisé par différentes productions d'élèves. Les réponses des élèves aux exercices relevant de cette dimension sont données en Annexe 5.

CA1 : dans les questions de calcul réfléchi, les techniques utilisées sont sous-tendues par les technologies de la numération (**Θ_P** et **Θ_D**) et par l'ensemble des propriétés des opérations, y compris celles complexes. *Les répertoires sont maitrisés.*

Ce qui se traduit dans les questions 5a et 5b par la mise en œuvre de $\tau_{CR\_+\_\text{excès}}$ et de $\tau_{CR\_-\_\text{excès}}$ comme dans la production de Sébastien (Figure 12).

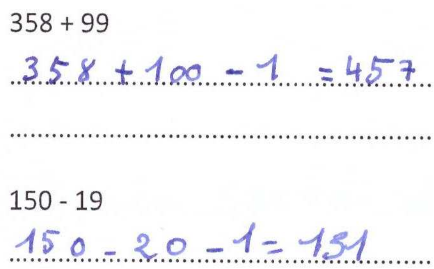


Figure 12 - Extrait de la production de Sébastien

Nous soulignons que l'écriture est incorrecte dans la question 5b, des parenthèses manquant autour de 20 - 1 ; ce qui est pris en compte dans le codage de la dimension RE.

CA2 : à la différence de CA1, les techniques mises en jeu dans le calcul réfléchi sont sous-tendues uniquement par les technologies de la numération (**Θ_P et Θ_D**) et des propriétés de base des opérations. *Les répertoires sont maitrisés.*

Dans les questions 5a et 5b du test, les techniques utilisées sont donc $\tau_{CR\_+\_dec\_eapdc}$ et $\tau_{CR\_-\_dec\_eapdc}$; la production de Lahra (Figure 13) montre l'usage de ces techniques codées CA2.

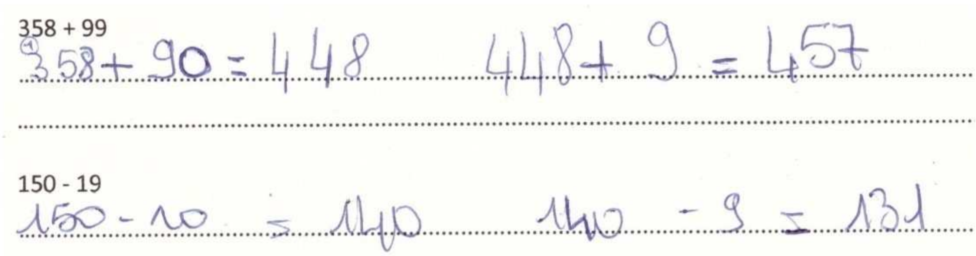


Figure 13 - Extrait de la production de Lahra - questions 5a et 5b

CA3 : le code CA3 correspond à des réponses, en calcul réfléchi, montrant la mise en œuvre erronée de technique qui ne se réfèrent pas complètement aux propriétés de la numération ou des opérations sous-jacentes. Par exemple, les deux réponses de Wekelia (Figure 14) sont codées CA3.

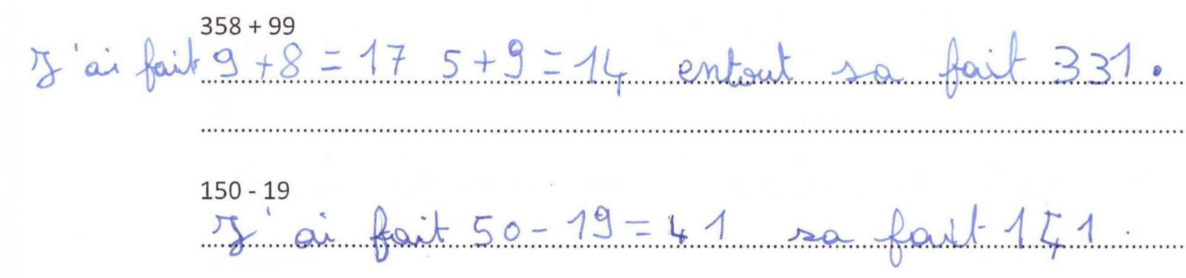


Figure 14 - Extrait de la production de Wekelia - questions 5a et 5b

Le premier calcul montre l'usage d'une technique similaire à celle du calcul posé ; la réponse témoigne d'un manque de maitrise de l'aspect décimal de la numération, l'élève additionnant le nombre d'unités avec le nombre de dizaines (17 + 14), sans conversion, pour obtenir le résultat.

Le second calcul correspond à l'usage de $\tau_{CR\_-\_dec\_eapdc}$: l'élève décompose 150 en 100 + 50 pour soustraire d'abord 19 à 50. L'erreur de calcul réalisé sur le calcul de cette différence est interprétée comme une maitrise insuffisante des compléments et est codée CA3.

CA4 : utilisation de techniques sous-tendues par la technologie de comptage **Θ_{compt}** ; les technologies des calculs ne sont pas construites (pas de référence aux propriétés de la numération, des opérations, ni aux répertoires).

Par exemple, dans le calcul posé d'une multiplication (question 7a), la technique utilisée ne s'appuie pas sur les technologies des opérations concernées. Le calcul de Mohamadou (Figure 15) montre qu'il se réfère plutôt aux techniques de calcul de l'addition posée, procédant, semble-t-il, chiffre à chiffre.

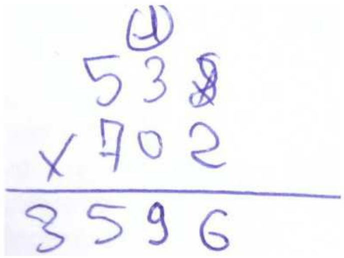
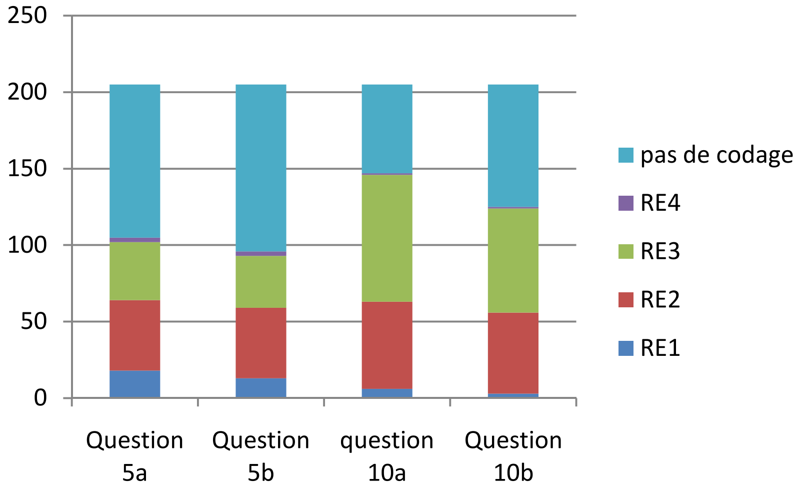


Figure 15 - Extrait de la production de Mohamadou - questions 5a et 5b

III.3.4 Répartition selon la dimension RE

III.3.4.i Répartition globale

Nous observons d'abord (à l'aide du Graphique 6) qu'entre 28 % et 53 % de réponses ne peuvent pas être codées : soit les élèves n'ont pas donné de réponse, soit la réponse qu'ils produisent est sous forme de phrase (et ne met pas en jeu le signe égal), soit ils écrivent directement le résultat sans aucune autre écriture.

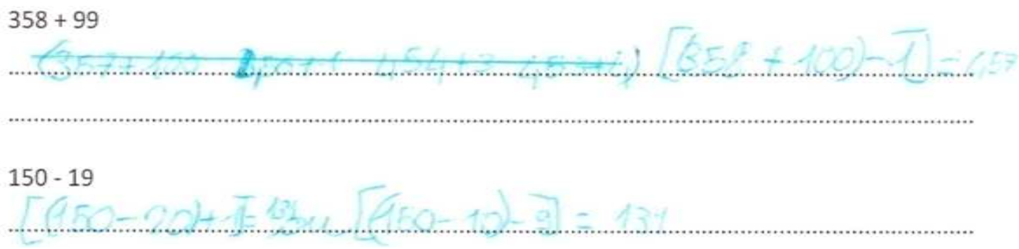


Graphique 6 - Répartition des technologies dominantes selon les questions évaluant la dimension RE

En cohérence avec les attentes des programmes de l'école, peu de productions témoignent de l'écriture d'expressions arithmétiques complexes, mettant en jeu plusieurs opérations (RE1), environ un quart des élèves utilisant les réécritures en pas à pas séparées. Entre 17% et 40 % des élèves ne perçoivent pas le signe égal comme relation d'équivalence et écrivent des égalités enchaînées ou des égalités fausses, le signe égal pouvant aussi servir d'abréviation. On peut faire l'hypothèse que ces erreurs découlent d'un manque de travail spécifique sur le statut de l'égalité à l'école primaire (en lien avec une absence de précision sur ce point dans les programmes actuels).

III.3.4.ii Exemples de productions d'élèves

RE1 : l'emploi adapté du signe « = » (comme annonce de résultat), mais surtout l'utilisation à bon escient des parenthèses dans la réécriture de l'expression de départ nous conduisent à coder RE1 la réponse de Maelle (Figure 16).



358 + 99

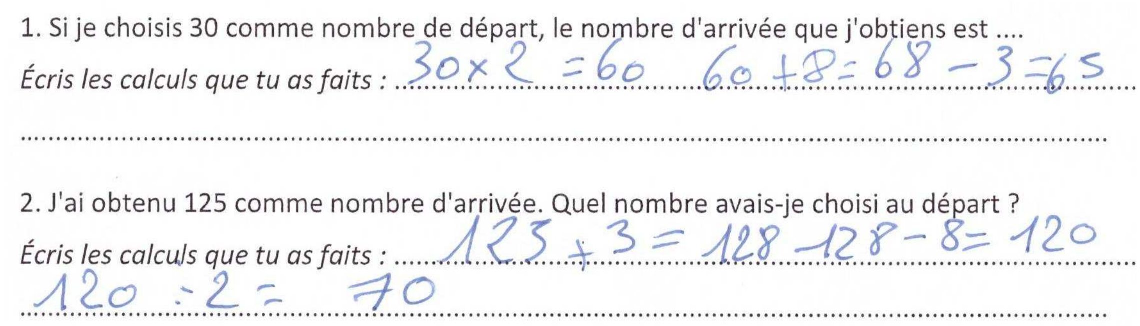
~~(357+100...~~ [(358 + 100) − 1] = 457

150 - 19

~~[(150 − 20) + 1] = 131~~ [(150 − 10) − 9] = 131

Figure 16 - Extrait de la production de Maelle - questions 5a et 5b

RE2 : les écritures arithmétiques produites, comme dans la production d’Enora (Figure 17), sont pas à pas séparées ; la cohérence de fonctionnement observée sur un tel emploi du signe égal est assez fréquent, comme en témoigne les réponses produites par Enora dans les quatre questions qui évaluent cette dimension (Annexe 5).



1. Si je choisis 30 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée que j'obtiens est ....

Écris les calculs que tu as faits : 30 × 2 = 60 60 + 8 = 68 − 3 = 65

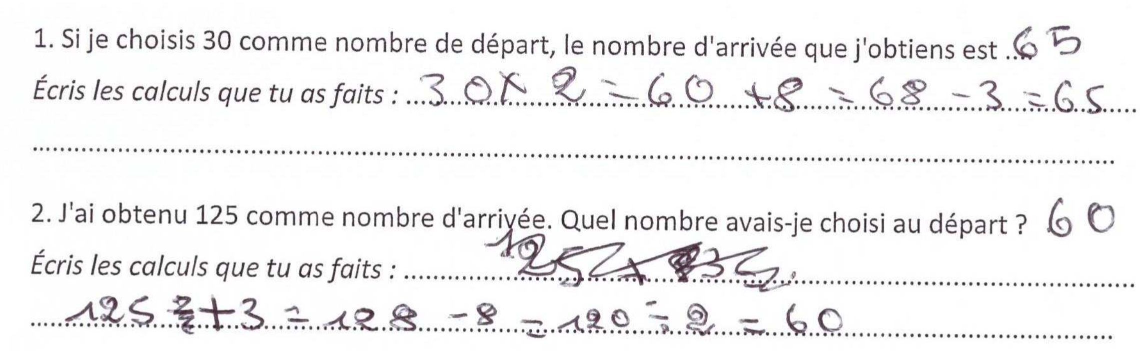
2. J'ai obtenu 125 comme nombre d'arrivée. Quel nombre avais-je choisi au départ ?

Écris les calculs que tu as faits : 125 + 3 = 128 128 − 8 = 120

120 ÷ 2 = 70

Figure 17 - Extrait de la production d’Enora - questions 10a et 10b

RE3 : les productions faisant apparaître des égalités enchaînées ou des égalités fausses, comme celle de Vaishaga (Figure 18) sont codées RE3.



1. Si je choisis 30 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée que j'obtiens est 65

Écris les calculs que tu as faits : 30 × 2 = 60 + 8 = 68 − 3 = 65

2. J'ai obtenu 125 comme nombre d'arrivée. Quel nombre avais-je choisi au départ ? 60

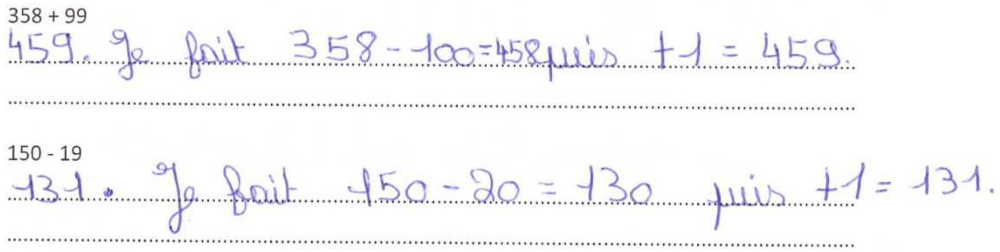
Écris les calculs que tu as faits : ~~125 × 3~~

125 + 3 = 128 − 8 = 120 ÷ 2 = 60

Figure 18 - Extrait de la production de Vaishaga - questions 10a et 10b

Comme pour le codage RE2, nous observons assez fréquemment une cohérence pour ce codage ; les écritures produites par Vaishaga en témoignent (Annexe 5).

RE4 : lorsque le signe « = » est utilisé comme abréviation à l’intérieur d’une phrase et non comme symbole mathématique, nous codons la réponse RE4, comme ci-dessous avec la réponse d’Aaliyah (Figure 19).


358 + 99
459. Je fait 358-100=458 puis +1 = 459.

150 - 19
131. Je fait 150-20 = 130 puis +1 = 131.

Figure 19 - Extrait de la production de Aaliyah - questions 5a et 5b

<u>En conclusion :</u>

Le codage défini à partir du modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves décliné en quatre dimensions est adapté au codage des réponses de notre test, quelque soit l'exercice considéré ; ce qui confirme la validité de notre test et son adaptation au modèle. Nous rappelons que l'intérêt d'un tel codage permet une analyse globale sur les exercices mettant en jeu une même dimension ; nous l'avons évoqué brièvement à partir des productions d'élèves illustrant les codages, mais nous y revenons de façon plus explicite dans la partie suivante consacrée aux profils.

Nous avons rencontré pour certaines questions une difficulté à coder les réponses notamment parce que les réponses des élèves, dans les questions ouvertes, ne permettaient pas de déterminer la technique mise en jeu, plus particulièrement dans le calcul réfléchi. L'accès aux brouillons des élèves a permis de coder leurs réponses puisqu'ils donnent trace de la technique mise en jeu ; ces traces sont nécessaires aussi bien lorsque la réponse est correcte (pour déceler d'éventuelles traces de calcul posé pour les exercices évaluant la numération) que lorsqu'elle est fausse (pour déterminer si l'erreur est liée à la méconnaissance des répertoires ou à la mise en œuvre de la technique, ou les deux). En codant l'ensemble des productions nous avons pu ainsi étoffer la base de réponses anticipées construites à partir de l'analyse *a priori*, mais un tel travail reste à poursuivre.

L'étude des codes attribués à chacune des réponses, relativement à chacune des dimensions, permet ainsi de dégager des dominantes technologiques. L'intérêt d'un tel codage en lien avec le modèle d'analyse est la potentialité de repérer des cohérences de fonctionnements dans les réponses d'un élève et de pouvoir, par la suite, construire des profils relativement à ces cohérences de fonctionnements globalement et sur chacune des dimensions.

IV Construction des profils

Nous exploitons dans cette partie le codage des réponses en termes de dominantes technologiques tel que nous l'avons explicité précédemment pour rechercher des cohérences de fonctionnement et dégager des profils caractérisant les praxéologies apprises des élèves sur le domaine étudié.

Lors de la construction du modèle d'analyse, nous avions dégagé trois profils différents : nous les reprenons comme point de départ et montrons en quoi l'usage d'un codage transversal par dimension permet de les construire en appui sur des dominantes technologiques qui caractérisent l'activité des élèves dans le domaine des nombres entiers. Nous illustrons notre propos par le codage des productions des élèves *(les cellules grisées indiquent des exercices, dans lesquels les élèves n'ont pas mobilisé toutes les technologies attendues)* et par des extraits de productions d'élèves (les productions entières sont scannées et placées en totalité en Annexe 6) ; elles correspondent à chacun des élèves représentatifs des différents profils.

IV.1 Kais : élève représentatif du profil 1

Nous avons défini dans le modèle d'analyse un premier profil d'élève de la façon suivante :

Profil 1 :

Les technologies $\boldsymbol{\Theta_P}$, $\boldsymbol{\Theta_D}$ *et* $\boldsymbol{\Theta_{max}}$ *de la numération et celles liées aux propriétés des opérations sont mobilisées et permettent de traiter les différents types de tâches de la numération et du calcul (posé et réfléchi).*

Les répertoires additifs et multiplicatifs sont maitrisés ; ils permettent l'effectuation correcte des calculs et les propriétés sur les nombres et les opérations sont exploitées pour réécrire les expressions arithmétiques dans le calcul réfléchi.

Les modèles mathématiques impliqués dans la résolution de problèmes sont adaptés et conduisent à des écritures arithmétiques correctes ; le signe = est utilisé à bon escient, comme relation d'équivalence.

Les élèves relevant de ce profil sont donc des élèves qui maitrisent globalement les savoirs en jeu et pour lesquels le score au test est élevé ; Kais est un élève représentatif de ce profil (sa production au test figure en Annexe 6.1).

Kais obtient un score de réussite élevé au test (18/21) et la répartition des codes selon les différentes dimensions montre une cohérence de fonctionnement sur l'ensemble du domaine : les techniques des tâches de numération sont presque toutes codées N1, il en est de même pour le calcul. Nous notons cependant la non reconnaissance du modèle adapté dans l'exercice 12.

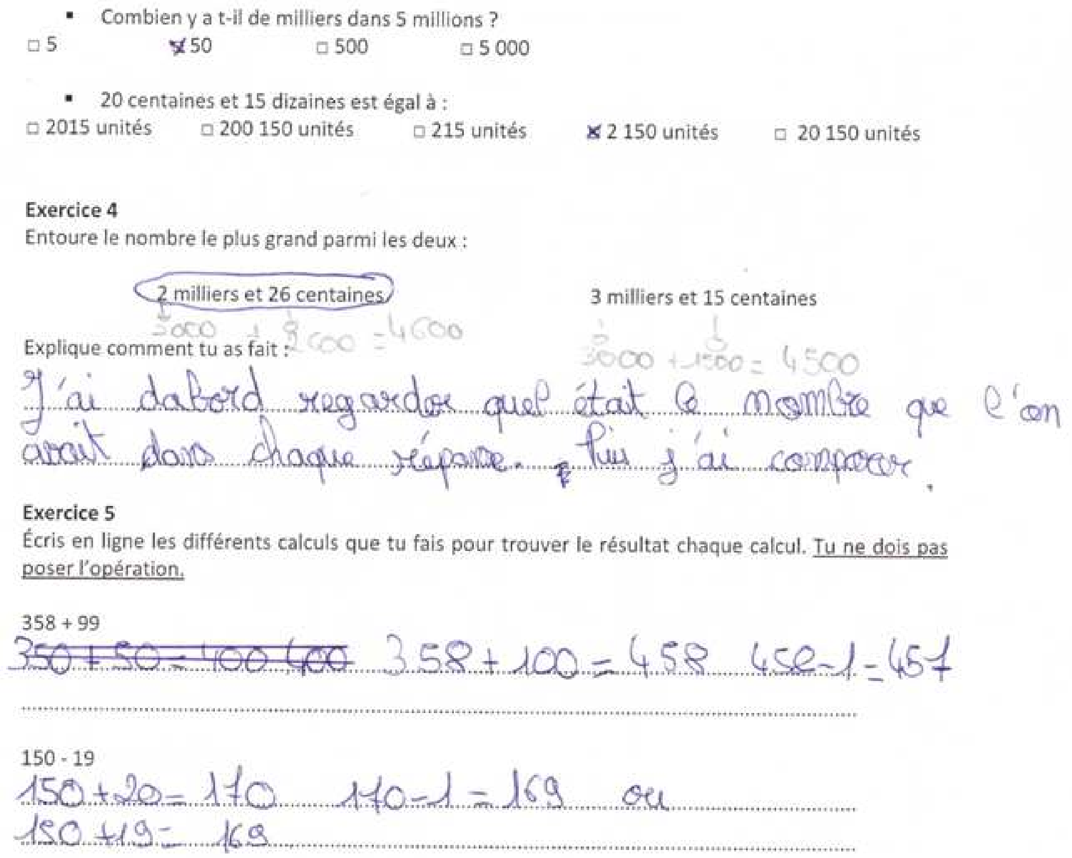
Dimension N										
Ex 1a	**Ex 1b**	**Ex 2**	**Ex 3a**	**Ex 3b**	**Ex 4**	**Ex 6a**	**Ex 6b**	**Ex 6c**	**Ex 9**	**Ex 11**
N1	N1	N1	N3	N1	N1	N1	N1	N1	N1	N1

Dimension CA						
Ex 5a	**Ex 5b**	**Ex 5c**	**Ex 7a**	**Ex 7b**	**Ex 8**	**Ex 10**
CA1		CA2	CA1	CA2	CA1	CA1

Dimension UA		
Ex 8	**Ex 10b**	**Ex 12**
UA1	UA1	UA3

Dimension RE			
Ex 5a	**Ex 5b**	**Ex 10a**	**Ex 10b**
RE2	RE2	RE2	RE2

Nous observons que cet élève maitrise globalement les technologies mises en jeu pour la numération, celles du calcul et la réécriture d'expressions. Sur ce dernier point, la cohérence des écritures proposées est visible, cet élève privilégiant les écritures pas à pas séparées plutôt que la réécriture d'expressions arithmétiques plus complexes. L'extrait de sa production (Figure 20) montre la mobilisation des propriétés de la numération dans les tâches complexes (exercice 4 du test), même s'il ne réussit pas à déterminer le nombre de milliers dans cinq millions. Nous observons aussi une confusion dans l'opération en jeu (ajoute 19 au lieu de retrancher 19).



- Combien y a t-il de milliers dans 5 millions ?

□ 5 ☒ 50 □ 500 □ 5 000

- 20 centaines et 15 dizaines est égal à :

□ 2015 unités □ 200 150 unités □ 215 unités ☒ 2 150 unités □ 20 150 unités

Exercice 4

Entoure le nombre le plus grand parmi les deux :

2 milliers et 26 centaines 3 milliers et 15 centaines

2000 + 2600 = 4600 3000 + 1500 = 4500

Explique comment tu as fait :

J'ai dabord regarder quel était le nombre que l'on avait dans chaque réponse. Puis j'ai comparer.

Exercice 5

Écris en ligne les différents calculs que tu fais pour trouver le résultat chaque calcul. Tu ne dois pas poser l'opération.

358 + 99

~~350 + 50 = 400 400~~ 358 + 100 = 458 458 - 1 = 457

150 - 19

150 + 20 = 170 170 - 1 = 169 ou

150 + 19 = 169

Figure 20 - Extrait de la production de Kais

En ce qui concerne la dimension UA, les technologies sous-jacentes à la production d'expressions arithmétiques attendues dans le cadre de la résolution de problèmes semblent maitrisées, même s'il existe une erreur dans la reconnaissance du modèle dans le problème multiplicatif de comparaison (exercice 12).

De façon plus générale, les élèves qui relèvent de ce profil mobilisent globalement les technologies de la numération et les propriétés des opérations, même dans des tâches complexes. Leurs besoins sont davantage ciblés sur des technologies spécifiques ou comme pour Kais, sur la réécriture d'expressions en ligne.

IV.2 Élèves représentatifs du profil 2

Le profil 2 est défini de la façon suivante :

<u>Profil 2 :</u>

Les élèves mobilisent des techniques sous-tendues par $\boldsymbol{\Theta_P}$ *;* $\boldsymbol{\Theta_D}$ *et* $\boldsymbol{\Theta_{max}}$ *n'étant pas mobilisés, ou rarement. Les éléments technologiques correspondant aux propriétés des opérations (tels que* $\boldsymbol{\Theta_{dist}}$ *ou* $\boldsymbol{\Theta_{écart}}$*)* *sont présents, mais pas toujours mobilisés. Par conséquent, les techniques de calcul posé,*

comme celles de calcul réfléchi, sont utilisées de façon erronée ou en dehors de leur domaine de validité. La réussite dépend de la complexité des tâches.
Les répertoires additifs et multiplicatifs ne sont pas suffisamment maitrisés et peuvent conduire à des erreurs de calcul.
Les modèles mathématiques utilisés dans la résolution de problèmes ne sont pas ceux attendus en fin d'école : des modèles additifs et soustractifs interviennent au lieu de modèles multiplicatifs et de division. Les écritures arithmétiques produites ne sont pas correctes, le signe = n'étant pas utilisé comme relation d'équivalence.

La définition de ce profil est très large et concerne des élèves pour lesquels les savoirs de la numération ou des opérations ne sont pas encore stabilisés et sont en cours de construction ; certaines cohérences de fonctionnement apparaissent notamment dans des tâches techniques, mais les technologies sous-tendant les techniques ne sont pas toutes mobilisées pour permettre la réussite à des tâches plus complexes.

Nous illustrons ce profil par les productions de deux élèves représentatifs : Pawel, Sirine (Annexes 6.2 et 6.3) présentant des spécificités différentes.

IV.2.1 Profil 2 : Pawel

Pawel est représentative d'un profil 2 correspondant aux élèves qui réussissent les tâches techniques de calcul et de numération, mais échouent dès que la tâche se complexifie ou qu'il s'agit de résoudre un problème. En particulier, toutes les tâches mettant en jeu l'usage de l'arithmétique (UA) montrent que les modèles arithmétiques de division et de multiplication sont en cours de construction (codage UA3 pour chacune des réponses).

Son score de réussite au test est de 14/21, et les codes de ses réponses selon les dimensions se répartissent de la façon suivante :

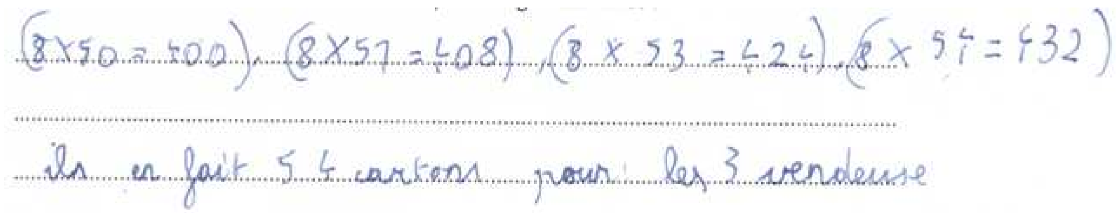
Dimension UA		
Ex 8	**Ex 10b**	**Ex 12**
UA3	UA3	UA3

Dimension N										
Ex 1a	**Ex 1b**	**Ex 2**	**Ex 3a**	**Ex 3b**	**Ex 4**	**Ex 6a**	**Ex 6b**	**Ex 6c**	**Ex 9**	**Ex 11**
N1	N1	N1	N4	N4	N3	N1	N1	N3	N1	N1

Dimension CA						
Ex 5a	**Ex 5b**	**Ex 5c**	**Ex 7a**	**Ex 7b**	**Ex 8**	**Ex 10**
CA2	CA 3	CA2	CA2	CA2	CA1	CA1

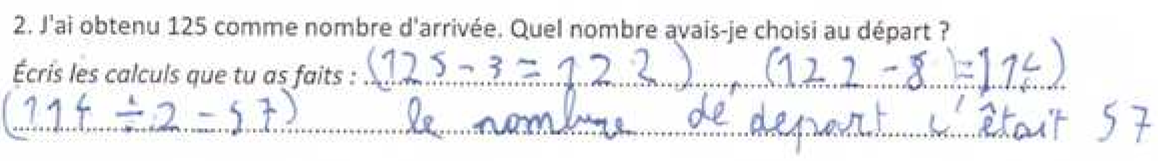
Dimension RE			
Ex 5a	**Ex 5b**	**Ex 10a**	**Ex 10b**
RE3	RE3	RE2	RE2

Le codage transversal sur l'ensemble des dimensions permet de repérer rapidement les technologies dominantes. Nous extrayons de sa production (Annexe 6.2) les réponses relevant de la dimension UA : la résolution du problème de division par l'utilisation d'un modèle multiplicatif (Figure 21a), les modèles mathématiques associés aux opérations inverses ne sont pas connus (Figure 21b) et la structure du problème multiplicatif n'est aps reconnue (Figure 21c).


(8x50 = 400) (8x51 = 408) (8 x 53 = 424) (8 x 54 = 432)

ils en fait 54 cartons pour les 3 vendeuse

Figure 21a - Extrait de la production de Pawel (exercice 8)


2. J'ai obtenu 125 comme nombre d'arrivée. Quel nombre avais-je choisi au départ ?

Écris les calculs que tu as faits : (125 - 3 = 122) (122 - 8 = 114) (114 ÷ 2 = 57) le nombre de départ c'était 57

Figure 21b - Extrait de la production de Pawel (exercice 10b)


Exercice 12

Dans une boulangerie, Pierre a vendu 3 fois moins de brioches que de croissants. Il a vendu 24 croissants. Combien a t-il vendu de brioches ?

Coche la bonne réponse

☒ 21 □ 8 □ 27 □ 72

Figure 21c - Extrait de la production de Pawel (exercice 12)

Les besoins d'apprentissage de Pawel sont plutôt orientés vers la résolution de problèmes et vers le développement du sens des opérations.

IV.2.2 Profil 2 : Sirine

Les élèves ayant un profil semblable à celui de Sirine reconnaissent les modèles mathématiques en jeu dans les problèmes, mais ne maitrisent pas encore de façon stable les propriétés de la numération et du calcul. La production de Sirine montre ainsi des cohérences de fonctionnement marquées dans les dimensions UA et RE ; à la différence de Pawel, elle réussit la résolution de problèmes (dimension UA). Les technologies impliquées dans les dimensions N et CA sont en revanche plus instables (cellules grisées pour des technologies non maitrisées). Son score au test est de 11/21.

Dimension N										
Ex 1a	**Ex 1b**	**Ex 2**	**Ex 3a**	**Ex 3b**	**Ex 4**	**Ex 6a**	**Ex 6b**	**Ex 6c**	**Ex 9**	**Ex 11**
N1	N1	N1	N3	N3	N3				N1	N1

Dimension CA						
Ex 5a	**Ex 5b**	**Ex 5c**	**Ex 7a**	**Ex 7b**	**Ex 8**	**Ex 10**
CA3	CA2		CA2	CA1	CA1	CA3

Dimension UA		
Ex 8	**Ex 10b**	**Ex 12**
UA1	UA1	UA1

Dimension RE			
Ex 5a	**Ex 5b**	**Ex 10a**	**Ex 10b**
RE3	RE3	RE2	RE2

Les élèves présentant un profil similaire à celui de Sirine témoignent d'une maitrise des technologies de la numération (N) dans les tâches simples, convoquant les praxéologies à un niveau technique. Les technologies du calcul sont davantage maitrisées, ce qui est cohérent avec la maitrise des éléments de la numération, malgré quelques erreurs sur les répertoires qui expliquent des codes CA3.

L'utilisation du signe égal comme relation d'annonce de résultat n'est pas encore maitrisée comme en témoignent les codages RE3 et RE2 (utilisation de schémas comme ostensifs traduisant les opérations et les égalités) ; les productions d'expressions arithmétiques sont réussies, ce qui suppose une reconnaissance des modèles arithmétiques en jeu dans les problèmes.

Un travail spécifique sur l'aspect décimal de la numération, les répertoires additifs et sur l'usage du signe égal semble donc nécessaire pour qu'elle puisse utiliser les techniques de façon adaptée, même lors de la résolution de tâches complexes.

IV.3 Youssef : élève représentatif du profil 3

Profil 3 :

La technologie dominante caractérisant ce profil est celle de comptage $\boldsymbol{\Theta}_{compt.}$ Les démarches de comptage ou de groupements/partage impliquent qu'aucune expression arithmétique ou calcul ne soit produit et qu'il n'y a pas d'usage du signe =.
Les technologies de la numération de: les élèves conçoivent alors l'écriture chiffrée comme une juxtaposition de chiffres. Par conséquent, les techniques de calcul posé comme celles de calcul réfléchi ne s'appuient pas sur des propriétés mathématiques ; les répertoires additifs comme multiplicatifs ne sont pas maitrisés. Des techniques de comptage peuvent néanmoins être employées pour calculer.

Youssef, comme les élèves relevant de ce profil, obtient un score au test assez faible (7/21). Les technologies impliquées dans chacune des dimensions montrent que les techniques mises en œuvre sont souvent erronées, voire que des techniques de comptage sont présentes.

Dimension UA		
Ex 8	**Ex 10b**	**Ex 12**
UA4	UA3	UA1

Dimension N										
Ex 1a	**Ex 1b**	**Ex 2**	**Ex 3a**	**Ex 3b**	**Ex 4**	**Ex 6a**	**Ex 6b**	**Ex 6c**	**Ex 9**	**Ex 11**
N1	N1	N3	N1	N4	N3	N4	N4	0	N3	N1

Dimension CA						
Ex 5a	**Ex 5b**	**Ex 5c**	**Ex 7a**	**Ex 7b**	**Ex 8**	**Ex 10**
0	0	0	ca3	0	0	

Dimension RE			
Ex 5a	**Ex 5b**	**Ex 10a**	**Ex 10b**
0	0	RE2	RE2

La production de Youssef montre qu'il fait référence à du comptage à la fois dans l'exercice 8, en représentant des livres avec des bâtons (Figure 22) et dans l'exercice 6 (le nombre de bonbons correspond au nombre d'objets représentés multiplié par 10). Les technologies de calculs ne sont pas construites puisqu'aucune réponse n'est apportée au calcul réfléchi et que le calcul posé de la multiplication est exempt des technologies de numération qui le sous-tendent. Pour autant, toutes ses réponses ne sont pas toutes fausses, Youssef réussit en particulier certains exercices de numération relevant d'un niveau technique.

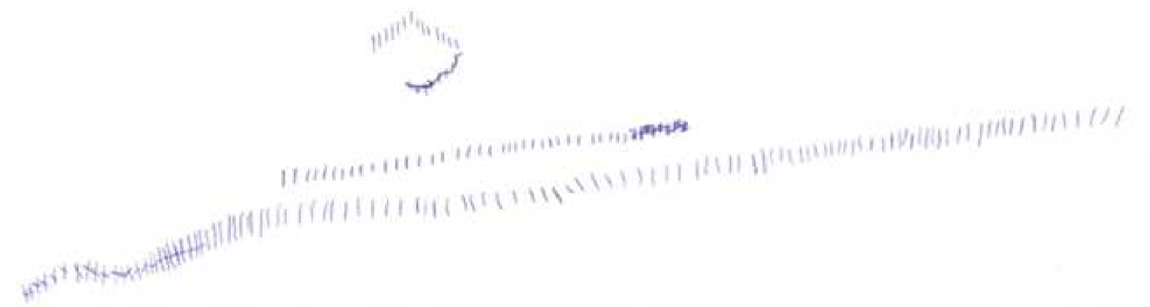


Figure 22 - Extrait de la production de Youssef (exercice 8)

Nous observons, pour les élèves relevant de ce profil des cohérences de fonctionnement sur l'ensemble des dimensions témoignant à la fois d'une persistance du comptage au détriment des technologies en jeu dans la numération et le calcul et de la mise en œuvre de techniques ne se référant à aucune des technologies de la numération ou du calcul. Les productions des élèves de ce profil présentent aussi une absence de réponse à de nombreuses questions accompagnée d'erreurs sur les réponses produites.

Les besoins d'apprentissage de ces élèves se situent donc au niveau de la construction du système de numération décimal et des opérations.

Les élèves que nous avons choisis dans cette partir de la thèse sont représentatifs des profils établis selon le modèle. Nous observons que Sirine et Pawel représentent tous deux le profil 2 mais avec des caractéristiques différentes, correspondant à des besoins d'apprentissage distincts. Une redéfinition des profils s'avère donc nécessaire pour opérationnaliser et implémenter le diagnostic.

V Conclusion : résultats, limites et perspectives

Nous avons montré dans ce chapitre la mise en œuvre et l'intérêt d'un codage selon des technologies impliquées, définies à partir d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves sur le domaine des nombres entiers. Un tel codage, mené transversalement sur l'ensemble du test, dépasse ceux usuels des évaluations diagnostiques réalisés généralement de façon indépendante sur chaque exercice. Il permet ainsi d'associer des résultats quantitatifs (score au test) à des résultats qualitatifs basés sur la recherche de cohérences de fonctionnement ; ces dernières sont déterminées par des éléments technologiques relatifs pour notre domaine, à la numération, au calcul et à la résolution de problèmes.

Au regard des quatre modes technologiques définis dans le chapitre 6, le codage utilisé permet ainsi de repérer des paliers dans le développement du rapport des élèves à un domaine de savoir en lien avec l'enseignement reçu. Les exemples de productions d'élèves donnés dans la thèse illustrent les potentialités de ce codage et montrent la façon dont il est possible de regrouper des élèves ayant des caractéristiques proches sur chacune des dimensions autour d'un même profil.

La détermination de classes anticipées de réponses permet aussi une automatisation du codage à condition de tenir compte non seulement de la réponse mais aussi de la technique mise en jeu. En vue de l'implémentation informatique du test, il est nécessaire au préalable de déterminer précisément la façon dont nous caractérisons les profils à partir des codes attribués sur chacune des dimensions. Un tel travail n'a pas été mené dans le cadre de la thèse et constitue à la fois une première limite, mais aussi un prolongement à notre recherche.

La seconde limite que nous apportons aux résultats obtenus est relative au contenu de l'évaluation diagnostique : si les exercices sont cohérents par rapport à leurs objectifs d'évaluation, leur formulation peut être améliorée afin de faciliter la compréhension de certaines consignes et inciter davantage les élèves à laisser une trace de leur raisonnement. Il sera alors possible de coder davantage de réponses selon les techniques mises en œuvre et par conséquent d'avoir un nombre plus important d'éléments sur lesquels rechercher des cohérences de fonctionnement.

Comme nous l'avons souligné, une évolution de la définition des profils est à envisager, notamment pour discerner, à partir du profil 2 actuel, les groupes d'élèves qui ne maîtrisent pas le sens des opérations de ceux qui ne mobilisent pas les propriétés de la numération ou du calcul. Si le modèle et le codage proposés semblent adaptés pour établir un diagnostic, un travail complémentaire sur la définition des profils, en lien avec le codage des techniques, est nécessaire pour pouvoir proposer un enseignement différencié adapté aux besoins des différents groupes d'élèves.

Par ailleurs, les pratiques enseignantes interfèrent dans l'apprentissage des différentes techniques, et en particulier dans celles de calcul réfléchi ou de calcul posé. Ainsi, le codage des réponses montre des cohérences dans les techniques entre élèves d'une même classe sur le calcul posé (présence systématique des lignes de zéros ou inversion des facteurs du produit pour poser la multiplication afin d'éviter d'avoir un nombre écrit avec un zéro dans le deuxième produit) ou de calcul réfléchi (classe présentant des techniques basées uniquement sur la numération alors que d'autres laissent vivre des techniques plus variées). Même si ce n'est pas l'objet de la thèse, de telles observations mettent en perspective les résultats obtenus par certains élèves relativement à l'enseignement supposé avoir été dispensé. Ces éléments mériteraient d'être approfondis à la fois pour interpréter les résultats des élèves mais aussi pour étudier les pratiques enseignantes.

Nous terminons enfin ce chapitre en évoquant quelques pistes sur des situations à travailler pour réguler l'enseignement sur le domaine des nombres entiers, en fonction des aspects épistémologiques relatifs aux nombres entiers pour permettre aux élèves de poursuivre la construction des savoirs visés.

La mobilisation de l'ensemble des technologies de la numération, en particulier de l'aspect décimal, n'est pas toujours effective et est une des caractéristiques du profil 2. La régulation de l'enseignement peut être construite à partir de la ressource conçue par Tempier (2013) visant à développer le principe décimal de la numération de position pour des élèves de CE2. La situation fondamentale du nombre exploitée dans cette ressource pour de grands nombres peut éventuellement être adaptée pour des élèves de fin d'école et constituer une reprise pour l'étude des nombres au début du collège. Un enseignement différencié visant le développement du principe de décimalité en lien avec les nombres décimaux est aussi envisageable. Nous avons limité nos propos à notre domaine d'étude, mais la représentation des nombres décimaux avec une écriture à virgule est elle aussi organisée à partir des principes identiques aux écritures de nombres entiers (position, décimalité et maximalité) et un travail conjoint sur le principe de décimalité pour les nombres entiers et décimaux pourrait faire l'objet de parcours d'enseignement différencié.

En ce qui concerne le calcul mental, les recherches de Butlen (2007) et Butlen & Pézard (2003) montrent l'intérêt d'une pratique régulière du calcul mental : non seulement elle favorise la connaissance des répertoires et permet de développer des techniques de calcul réfléchi variées et adaptées, mettant en jeu des décompositions additives et multiplicatives, mais elle contribue aussi à l'acquisition des structures additives et multiplicatives. Une telle pratique conduit ainsi à améliorer la résolution écrite de problèmes numériques, les élèves reconnaissant plus facilement le modèle mathématique en jeu dans les problèmes. Des modalités de différenciation peuvent ainsi être mises en œuvre selon les besoins repérés des élèves en fonction des profils.

En conclusion, la façon dont nous avons conçu le modèle, les exercices de l'évaluation diagnostique et le codage transversal permettent de définir des besoins selon les profils des élèves. Une fois que ceux-ci sont repérés, il est dès lors possible d'exploiter les résultats de différentes recherches en didactique des mathématiques en vue de la régulation de l'enseignement et des apprentissages.

CONCLUSION

Un premier axe de notre questionnement portait sur l'étude de la validité des évaluations externes en articulant des approches didactique, psycho-didactique et psychométrique. En construisant une méthodologie d'analyse d'évaluations et en définissant une praxéologie de référence sur un domaine particulier, celui des nombres entiers incluant la numération, le calcul et la résolution de problèmes arithmétiques, nous avons pu étudier le contenu des évaluations CEDRE et réinterpréter certains résultats établis par la DEPP selon notre point de vue. Nous avons pu montrer à travers ce travail la façon dont la didactique des mathématiques pouvait s'emparer des questions de validité des évaluations et l'intérêt de la complémentarité des approches didactique, épistémologique, psychométrique et cognitive.

Le second axe de la thèse portait sur la définition d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques et arithmétiques sur les nombres entiers des élèves de fin d'école permettant de repérer des cohérences de fonctionnement à travers les productions d'élèves. Nous avons ensuite conçu un test diagnostique fondé sur les critères définis par la méthodologie de conception et d'analyse des évaluations que nous avons conçue, puis avons exploité le modèle d'analyse multidimensionnelle pour traiter les réponses des élèves, définir des profils et proposer des pistes pour la mise en œuvre de parcours d'enseignement différencié (Pilet 2012) selon les besoins d'apprentissage des élèves repérés par l'évaluation.

Nous abordons la conclusion de la thèse en revenant sur les résultats produits, les limites de notre démarche en lien avec les aspects pouvant être développés et les perspectives de recherche qui en découlent. Trois entrées structurent notre conclusion : les deux premières reprennent les axes de notre problématique à savoir la conception d'une méthodologie d'analyse des évaluations externes et le développement d'un diagnostic à partir d'un modèle multidimensionnel ; la troisième ouvre des perspectives vers d'autres domaines, à travers la caractérisation des connaissances des élèves en fin d'école sur les nombres entiers.

I MÉTHODOLOGIE D'ANALYSE DES ÉVALUATIONS

I.1 Résultats

Nous avons montré la façon dont la caractérisation d'une praxéologie de référence définie sur un domaine mathématique donné pouvait à la fois permettre d'analyser la validité de contenu d'une évaluation et approfondir les résultats produits par un traitement classique de cette évaluation. L'analyse *a priori*, menée à partir d'une praxéologie de référence, joue un rôle crucial dans la méthodologie construite : elle permet d'analyser la cohérence entre un item donné et son objectif d'évaluation à partir des techniques et des technologies visées pour la résolution de la tâche (facette épistémo-didactique de la validité de contenu), mais aussi d'étudier dans quelle mesure les processus de réponse mis en jeu par les élèves sont effectivement ceux attendus par l'évaluateur (facette psycho-didactique). La prise en compte du codage des réponses est intégrée dans l'analyse locale des items. Ces deux axes d'analyse du contenu, item par item, sont primordiaux et déterminants dans l'analyse du contenu ; ils précèdent une analyse globale de la représentativité des tâches, la couverture du domaine, la variété de la complexité des items retenus, etc. préalable à l'interprétation des résultats.

La complémentarité de l'approche didactique avec l'approche psychométrique dans le bilan CEDRE s'est avérée particulièrement riche et porteuse : la mise en perspective des résultats produits sous la forme de caractéristiques statistiques (indice de difficulté des items, échelle de score) avec les techniques et les technologies visées pour la résolution de la tâche permet non seulement d'interpréter les résultats obtenus en termes de praxéologies apprises au regard de la praxéologie de référence, mais interroge aussi les praxéologies enseignées. Son utilisation lors de la phase de conception, en amont, serait plus adaptée aux enjeux de l'évaluation qu'une analyse en aval, après la production des résultats. En définissant aussi le contenu d'une évaluation diagnostique avec cette même méthodologie, nous avons montré qu'elle pouvait être exploitée quel que soit le type d'évaluation analysée (diagnostique, sommative, bilan, etc .), sur n'importe quel domaine mathématique.

I.2 Limites et perspectives

Nous avons interprété les résultats obtenus par les élèves au regard de la praxéologie de référence relative au domaine des entiers et de celle à enseigner et nous avons uniquement soulevé des hypothèses quant aux praxéologies enseignées. Il aurait été nécessaire pour pouvoir caractériser de façon plus précise les praxéologies apprises et mettre en évidence des technologies absentes ou évanescentes et d'étudier l'enseignement reçu par les élèves. Ainsi, une analyse de manuels de cycle 3 accompagnée d'une étude des pratiques enseignantes à partir d'observations en classe et d'entretiens aurait permis de décrire plus précisément les praxéologies enseignées et de mieux interpréter les résultats obtenus. Il s'agit ici d'une première limite que nous apportons à notre travail : la perspective d'une recherche sur les praxéologies enseignées nous semble fondamentale pour pouvoir caractériser les praxéologies apprises. Par ailleurs, l'évaluation internationale TIMSS passée en 2015 apportera prochainement de nouveaux résultats quant aux connaissances des élèves de fin de CM1. La question de l'interprétation des résultats en lien avec les praxéologies à enseigner et enseignées sera alors similaire à celle que nous nous avons rencontrée sur l'évaluation CEDRE ; sans une étude des praxéologies enseignées, l'interprétation des résultats restera incomplète, même si l'on procède à un recodage de données.

Au-delà de la recherche de Artigue et Winslow (2010), dans une perspective comparative des résultats des élèves entre pays dans le cadre de TIMSS, la définition d'une praxéologie de référence relative à un domaine mathématique donné peut permettre une interprétation des résultats au regard des différentes praxéologies à enseigner et de leurs effets supposés sur celles apprises. Enfin, les résultats de l'évaluation TIMSS permettront aussi d'obtenir des résultats sur les connaissances des élèves de CM1 ; il pourra alors être intéressant de les comparer avec ceux de CEDRE en CM2 pour comprendre l'évolution des praxéologies apprises entre ces deux années de la scolarité d'un élève et les difficultés mises en évidence.

La méthodologie d'analyse de la validité de contenu des évaluations telle que nous l'avons développée favorise la participation d' « experts » (Laveault & Grégoire 2014) issus de différents champs de recherche (didactique, psychologie cognitive, psychométrie...) en lien avec les concepteurs de l'évaluation. Nous faisons l'hypothèse qu'un travail mené par une équipe pluridisciplinaire rend exploitable une telle méthodologie, chacun pouvant étudier, de façon complémentaire, le contenu de l'évaluation. Les concepteurs non didacticiens sont bien souvent des enseignants ou des personnes de terrain ; sans mener une analyse *a priori* des items, ils peuvent déterminer les objectifs des items d'évaluation et étudier les différentes techniques de résolution *a priori.* Cette première étape permettrait de juger la pertinence locale de chacun des items en lien avec le codage proposé et de construire des items mieux adaptés aux objectifs de l'évaluation. Le travail du chercheur se situerait davantage sur une analyse plus approfondie du contenu des items, de la représentativité des tâches sélectionnées, etc. Par ailleurs, la définition d'une praxéologie épistémologique de référence sur un domaine joue un rôle crucial dans la méthodologie et demande au préalable d'être définie par des chercheurs en didactique. Si nous nous référons au travail que nous avons mené, la liste des différentes techniques que nous avons établie, en particulier en calcul réfléchi est fastidieuse et difficilement exploitable en l'état : un travail de lisibilité et de simplification pour une mise en œuvre dans des conditions ordinaires semble donc nécessaire.

Enfin, les évaluations externes construites par la DEPP évoluent vers des supports numériques et incluent désormais des modules de tests adaptatifs : les élèves passant une série de questions commune (*starter*) et selon les réponses qu'ils produisent, des items adaptés à leur niveau de compétence supposé leur sont proposés. L'exploitation des modes technologiques définis dans le modèle d'analyse multidimensionnelle peut alors permettre de construire les items du starter, mais aussi de concevoir et de référencer de façon hiérarchique les items proposés par la suite.

Les perspectives de recherche sur l'analyse et le développement des évaluations externes à grande échelle dans un cadre didactique sont donc nombreuses, comme nous avions pu le souligner dans le premier chapitre de la thèse. Le travail mené en collaboration avec la DEPP dans le cadre de l'ANR NéoPraéval conduit à un enrichissement mutuel et témoigne d'un intérêt commun à faire évoluer les évaluations pour qu'elles répondent de façon optimale aux enjeux d'enseignement et d'apprentissage qui leur sont attribués.

II DÉVELOPPEMENT DU DIAGNOSTIC

II.1 Résultats obtenus et limites

Dans la définition de la praxéologie de référence relative au domaine des nombres entiers comme dans la définition de la première dimension du modèle (UA : usage de l'arithmétique), nous avons étudié la résolution de problèmes à partir des modèles mathématiques mis en jeu, sans réellement prendre en compte la représentation et l'interprétation du problème (au sens de Julo (1995)). La définition de cette dimension mérite une étude plus approfondie du champ de la résolution de problèmes arithmétiques à partir des travaux menés dans le champ de la didactique des mathématiques autour de la modélisation, en lien avec ceux menés en psychologie cognitive. Une telle recherche permettra ainsi de définir de façon plus précise les praxéologies impliquées dans la résolution de problèmes arithmétiques de réinvestissement et par conséquent, de mieux analyser les réponses des élèves.

En caractérisant les connaissances des élèves sur les nombres entiers à partir de quatre dimensions, décrites chacune par quatre modes différents et selon les technologies impliquées, nous avons pu définir des technologies dominantes conduisant à des profils distincts. La définition du modèle et son exploitation dans le test diagnostique ont montré la pertinence d'une telle démarche : le codage des techniques à partir des technologies les sous-tendant a permis une prise en compte transversale des réponses sur chacune des dimensions et a évité, comme ce fut souvent le cas dans les évaluations diagnostiques, en particulier les évaluations nationales, un codage indépendant des différentes réponses avec des difficultés à les exploiter.

A partir de ce codage, il est dès lors possible de repérer des cohérences de fonctionnement et de définir des profils d'élèves selon des technologies dominantes. Cependant, les connaissances sur les nombres entiers de nombreux élèves sont encore en cours de construction en fin d'école ; ce qui se traduit par une certaine instabilité dans les technologies impliquées et rend difficile la recherche de cohérences de fonctionnement sur les composantes dans certaines productions d'élèves. Il est par conséquent complexe, dans certains cas, de caractériser des technologies stabilisées dans la description du profil de l'élève. La description des profils telle que nous l'avons envisagée dans la thèse mérite d'être approfondie et éventuellement repensée pour permettre de discerner les élèves qui n'ont pas encore construit le sens des opérations, en particulier de la multiplication et de la division, de ceux qui éprouvent des difficultés liées au calcul et à la numération.

II.2 Développement et implémentation du test

Nous avons montré à la fin du dernier chapitre de la thèse quelques pistes pour mettre en place des parcours d'enseignement différencié à partir des besoins d'apprentissage repérés selon les profils des élèves, sur le domaine des nombres entiers tel que nous l'avons défini. Avant cette phase de construction, l'automatisation du diagnostic et son implémentation informatique sont des phases nécessaires pour que le diagnostic soit viable dans les classes et puisse renseigner l'enseignant de façon précise sur les forces et les faiblesses de ses élèves.

Le logiciel *Pépite* est complètement informatisé : les élèves répondent au test sur support numérique, les réponses des élèves sont analysées et traitées automatiquement, le profil de l'élève puis la géographie de la classe sont ensuite générés. Certains exercices de notre test peuvent être transférés sans grande difficulté sur support numérique, comme les QCM ou l'écriture de nombres, avec une étude préalable liée à la spécificité du support en lien avec la validité psycho-didactique (quel impact sur les processus de réponse mis en jeu ce transfert implique-t-il ?). Pour d'autres exercices, comme le calcul posé ou la résolution de problèmes en question ouverte, une passation sur support numérique semble difficile à mettre en œuvre directement ; en revanche, il est envisageable d'exploiter le logiciel d'analyse des expressions algébriques produites par les élèves dans le cas des expressions numériques issues du calcul réfléchi (Logiciel *Pépinière,* Prévit 2008).

Un premier travail sur le contenu du test en vue de son informatisation demande donc à être mené pour le rendre viable sur support numérique, tout en garantissant sa validité. Par ailleurs, le score de l'élève intervenant dans la définition des profils des élèves, il doit être calculé en prenant en compte non seulement la qualité de la réponse (correcte, incorrecte ou absente), mais aussi la technique mise en jeu (attendue ou non attendue à ce niveau). Une pondération peut donc être envisagée selon les réponses produites. Enfin, la définition de technologies dominantes à partir du codage des technologies impliquées dans chacun des exercices demande lui aussi à être défini à partir d'un algorithme prenant en compte les différents OML selon les 3 dimensions (UA, N et CA) comme déjà fait pour la définition des profils des élèves en algèbre dans *Pépite*.

La conception de parcours d'enseignement différencié, s'appuyant sur différentes recherches en didactique des mathématiques, viendra en prolongement du développement du test et de son implémentation informatique.

II.3 Développement de modèles diagnostiques

Si Loye & al. (2011) souligne que « l'intérêt porté par les chercheurs à la fonction diagnostique de l'évaluation est relativement récent », des modèles diagnostiques se développent désormais en édumétrie, parallèlement aux modèles exploités dans les évaluations bilan externes. Ces modèles sont qualifiés de « diagnostiques » parce qu'ils permettent d'établir une classification des sujets non pas à partir d'un trait latent, considéré continu comme dans les MRI, mais en fonction de profils définis à partir d'attributs (Rocher 2013, p. 132, Loye & al. 2011). Les attributs désignent les connaissances, les procédures, les habilités nécessaires à la résolution du problème posé. La réussite à un item demande bien souvent la mobilisation de plusieurs attributs, ce en quoi le modèle ainsi construit est qualifié lui aussi de multidimensionnel. Le terme « diagnostique » ne semble pas qualifier la fonction de l'évaluation qui utilise ce modèle ; nous remarquons d'ailleurs qu'ils sont plutôt employés aussi à des fins de régulation de l'apprentissage et de l'enseignement pour déterminer des profils d'élèves en difficulté dans un domaine donné (Rocher 2013, p.132) et ne se situent pas nécessairement au début de l'apprentissage ou pour favoriser la reprise de l'étude. Nous faisons l'hypothèse que les résultats de cette thèse, en particulier le modèle construit, peuvent être exploités dans ce cadre.

III CARACTÉRISATION DES CONNAISSANCES DES ÉLÈVES

III.1 Caractérisation des connaissances des élèves en fin d'école

III.1.1 Résultats obtenus

Les résultats issus des évaluations CEDRE 2008 et 2014 et de l'évaluation diagnostique convergent vers des caractéristiques communes sur les connaissances des élèves en fin d'école sur les nombres entiers (numération, calcul et résolution de problèmes).

En ce qui concerne la numération, les tâches usuelles telles que lire un nombre, écrire un nombre en chiffres à partir de son nom sont bien réussies en fin d'école. En revanche, les tâches mettant en jeu des conversions d'unités sont majoritairement échouées, aussi bien dans les évaluations CEDRE que dans l'évaluation diagnostique. Si le manque de maîtrise des propriétés de la numération ne se traduit pas forcément à travers les résultats relatifs aux tâches ciblant uniquement ces propriétés, il se retrouve indirectement dans la mise en œuvre de techniques de calcul erronées que ce soit dans la gestion des retenues, du calcul des produits partiels dans les techniques de calcul posé de la multiplication ou dans la gestion des zéros intervenant au quotient dans la division euclidienne.

Par ailleurs, au-delà de ces propriétés mal maitrisées, les résultats en calcul des élèves de fin d'école montrent aussi une connaissance limitée des répertoires, en particuliers multiplicatifs ; ce qui constitue un obstacle à la réussite du calcul (posé et réfléchi). De plus, en nous appuyant sur les productions des élèves au test diagnostique, nous avons pu observer des écarts très importants selon les classes dans les techniques de calcul réfléchi mises en jeu selon les élèves : si dans certaines classes, les techniques employées sont variées et mettent en évidence un travail régulier autour de la réécriture d'expressions, inversement, nous avons constaté que dans d'autres classes, une seule technique est présente ou que les élèves utilisent le calcul posé de façon inappropriée. Cette observation soulève la question de l'enseignement du calcul réfléchi et rejoint les constats établis par Butlen (2007).

Dans CEDRE, comme dans l'évaluation diagnostique, la résolution de problèmes de division-quotition est difficile pour des élèves de fin d'école. Nous remarquons que les modèles de division ne sont pas mobilisés pour traiter ces problèmes par de nombreux élèves de fin d'école : un tel constat interroge les pratiques enseignantes et mériterait sûrement d'être étudié de façon plus approfondie pour comprendre la façon dont se construisent les différentes techniques de résolution des problèmes de division. Nous avons également pu observer que la technique de calcul de la division est un algorithme complexe impliquant d'autres opérations : certains élèves peuvent alors réussir des soustractions lorsqu'elles sont isolées et échouer lorsqu'elles interviennent dans le calcul de la division. Nous interprétons ce type de difficulté comme étant lié à des techniques ou des répertoires connus, mais insuffisamment maitrisés pour pouvoir être mis en œuvre correctement dans des situations plus complexes.

III.1.2 Limites

Dans la thèse, nous avons axé notre travail plus spécifiquement sur l'analyse *a priori* des tâches et avons évoqué les expérimentations menées avec Sayac (2014a, 2014b) sur l'impact du format de question sur les processus de réponse mis en jeu par les élèves, en lien avec des critères de validité psycho-didactique. Nous avons évoqué, à différentes reprises, l'impact que pouvait avoir le support (numérique ou papier-crayon) ou le format ou encore le contexte d'un item sans pour autant pouvoir déterminer de façon plus précise la façon dont ces éléments pouvaient intervenir dans les processus de réponse mis en jeu ; une telle étude menée de façon plus systématique pourrait permettre de mieux analyser la cohérence des items choisis avec leur objectif d'évaluation, mais aussi d'apporter des explicitations complémentaires quant à la réussite ou non des élèves. Ces analyses complémentaires constituent autant de perspectives de recherche autour de la validité psycho-didactique, et sont peut-être à penser de façon plus transversale, sur un même domaine et non plus localement sur quelques items.

III.1.3 Études des pratiques et formation d'enseignants

Nous avons souligné lors de l'analyse des résultats à l'évaluation diagnostique que nous observions des régularités dans les techniques employées par les élèves selon les classes ; il serait intéressant d'exploiter les résultats de façon plus approfondie et de caractériser les régularités repérées. L'intérêt de l'utilisation d'un tel diagnostic à la fois pour évaluer les connaissances des élèves, leur proposer des parcours d'enseignement différencié, et à la fois pour faire évoluer les pratiques des enseignants prend alors tout son sens. La thèse de Bedja (en cours) sur l'utilisation du logiciel *Pépite* dans des classes de collège témoigne ainsi d'une évolution positive des pratiques des enseignants utilisant ce logiciel. Les résultats de la thèse montrent notamment une intégration, dans l'enseignement de l'algèbre, de types de tâches qui étaient jusque là peu habituelles aux enseignants et une mise en place de temps de formulation et de validation amenant les élèves à analyser les techniques et à percevoir la hiérarchie dans les technologies utilisées.

Par ailleurs, l'exploitation des résultats d'un test diagnostique dans le cadre de la formation continue a été étudiée par Chesné (2014) dans le cadre de la mise en place du dispositif PACEM. Le test diagnostique que nous avons conçu porte spécifiquement sur les nombres entiers alors que l'évaluation diagnostique réalisée dans le cadre de PACEM à l'entrée au collège est plus large et inclut les nombres décimaux et les problèmes de proportionnalité. Il serait donc envisageable, dans le cadre de la recherche, mais aussi de la formation, d'étudier la possibilité d'articuler ces deux tests et d'adapter le dispositif proposé par Chesné dans sa thèse à une formation intégrant l'exploitation du test diagnostique conçu dans la thèse. La finalité de l'évaluation que nous avons conçue est différente de celle de PACEM puisqu'elle vise à proposer des parcours d'enseignement différencié, et en ce sens, elles peuvent se révéler complémentaires pour faire évoluer les pratiques des enseignants et concevoir des formations situées à la liaison entre l'école et le collège.

III.2 Mises en perspective

III.2.1 Vers les décimaux et vers le calcul pré-algébrique

Lors de l'analyse du contenu de l'évaluation CEDRE nous avons évoqué à différentes reprises l'intérêt qu'il y aurait à reconsidérer le domaine que nous avons défini sur les nombres entiers en l'élargissant aux nombres décimaux et en le liant aux grandeurs et mesures.

En effet, dans les évaluations CEDRE 2008 et 2014 certains types de tâches n'étaient pas suffisamment représentés ou étaient même absents sur le domaine que nous étudions (par exemple des types de tâches de comparaison en 2008), alors qu'ils pouvaient être proposés avec des nombres décimaux. Nous avons souligné dans la thèse l'importance de pouvoir mettre en relation les acquis des élèves sur les nombres entiers avec ceux sur les nombres décimaux (écritures et opérations). La question de l'extension des technologies de la numération sur les nombres entiers aux nombres décimaux est primordiale : les élèves qui ne maitrisent pas les aspects de la numération décimale de position sur les nombres entiers peuvent difficilement les maitriser sur les nombres décimaux. Par ailleurs, différentes erreurs réalisées lors de la résolution de tâches mettant en jeu des nombres décimaux peuvent être expliquées par une extension des techniques établies sur les entiers à un domaine sur lequel elles ne sont plus correctes. Les technologies de la numération décimale justifient la validité de ces techniques, comme par exemple celles de comparaison ou de calcul ; si elles ne sont pas sous-tendues par la mobilisation des technologies de la numération, elles ne peuvent être utilisées de façon correcte dans toutes les tâches, en particulier lorsqu'elles sont complexes.

Un premier prolongement envisagé à notre étude sur la validité de contenu des évaluations CEDRE et sur l'interprétation des résultats consisterait donc à étendre notre domaine d'étude aux nombres décimaux. Une telle recherche demanderait, par conséquent, de redéfinir la praxéologie de référence en incluant les fractions et les nombres décimaux. Il serait dès lors possible de compléter l'analyse de la validité de contenu de l'évaluation CEDRE sur les nombres entiers, mais aussi de mettre en perspective les praxéologies apprises sur les nombres entiers avec celles sur les décimaux en lien avec des points de rupture définies dans la praxéologie de référence. Ce prolongement pourrait aussi être exploité pour poursuivre le développement du modèle d'analyse multidimensionnel des connaissances numériques des élèves de fin d'école et de ne pas le limiter aux nombres entiers, mais d'intégrer non seulement les décimaux, les fractions et l'ensemble des problèmes relevant des structures additives et multiplicatives en particulier les problèmes de proportionnalité que nous n'avons pas retenus dans notre étude.

De plus, nous avons aussi choisi d'écarter de manière arbitraire les types de tâches relevant de la conversion de mesures de grandeur dans le système métrique, alors qu'elles sont directement liées à la numération décimale. Il serait avantageux de les intégrer dans une praxéologie de référence sur un domaine plus étendu et de situer les connaissances des élèves sur ce type de tâches par rapport aux tâches de conversion dans la numération décimale.

Nous comprenons alors l'intérêt d'étendre le domaine mathématique évalué pour étudier les acquis des élèves en fin d'école et de mettre en relation les praxéologies apprises sur un nombre plus important d'OML. Une telle étude trouve son intérêt dans les évaluations externes bilan, mais aussi dans la conception d'évaluations diagnostiques sur le modèle que nous avons développé ; en effet, même si nous étendons le domaine d'étude aux nombres décimaux, les technologies de la numération décimale de position restent identiques et par conséquent, celles impliquées dans le modèle d'analyse multidimensionnelle ne changent pas. Il serait dès lors possible, en complétant la définition des dimensions d'analyse, de repérer des cohérences de fonctionnement sur un domaine élargi, de définir des profils différents et de concevoir des tests diagnostiques complémentaires.

III.2.2 En amont : l'entrée dans l'écriture du nombre

Si dans le paragraphe précédent, nous pensons le développement de notre travail en étendant le domaine aux nombres décimaux, il est aussi envisageable de le considérer en amont de l'enseignement, de façon plus ciblée pour le cycle 2. La définition d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques pour des élèves de cycle 2 prenant en compte de façon plus importante le comptage et la numération parlée permettrait ainsi, à travers la recherche de cohérences de fonctionnement, de dégager des profils d'élèves relativement à tel domaine permettant ensuite une régulation de l'enseignement.

Du point de vue de la recherche, il serait aussi pertinent d'utiliser un tel modèle d'analyse multidimensionnelle pour comparer les effets d'un enseignement sur les praxéologies apprises. Les profils étant définis à partir du niveau technologique, l'étude de leur répartition au sein de classes différentes permettrait ainsi d'étudier les effets de l'enseignement ; les résultats obtenus par Mounier & Pfaff (2014) pourraient ainsi être réinterprétés en recherchant des cohérences de fonctionnement à partir des productions des élèves et en dépassant une analyse item par item.

Ainsi, en étendant le domaine d'étude à la fois sur les savoirs mathématiques et sur les niveaux d'enseignement, les perspectives d'exploitation de la méthodologie de conception d'une évaluation et du modèle d'analyse multidimensionnelle visant la construction de profils des élèves sur un domaine donné sont riches et variées, que ce soit pour la conception d'évaluations externes bilan, d'évaluations diagnostiques pour outiller l'enseignant dans ses pratiques d'enseignement ou d'évaluations pour le chercheur.

Nous achevons la thèse à l'orée d'un changement de programmes, prévu pour la rentrée 2016, accompagné d'une refonte des cycles de l'école élémentaire du collège : le cycle 3 se situant désormais, à partir de la rentrée 2016 à l'articulation entre l'école et le collège et englobant le CM1, le CM2 et la 6ème. Par conséquent, le domaine d'étude à enseigner sur les nombres entiers et le calcul tel que nous l'avons défini dans notre travail risque d'évoluer dans la progression de l'enseignement à l'école, modifiant alors les praxéologies à enseigner, et vraisemblablement celles apprises. La définition d'une praxéologie de référence telle que nous l'avons conçue dans notre travail permettra ainsi de fonder l'étude de ces évolutions et d'étudier leurs effets sur les praxéologies apprises des élèves. L'achèvement de la thèse correspond aussi au moment où les résultats des élèves français de CM1 (grade 4) à l'évaluation TIMSS 2015 vont être publiés et comparés à ceux des autres pays et mis en relation avec ceux des bilans CEDRE. Quelle sera la teneur de ces résultats ? Comment seront-ils exploités ? Quel impact auront-ils sur les futurs programmes de l'école ?

Par ailleurs, le développement d'outil diagnostique tels que nous l'avons conçu dans la thèse se révèle être nécessaire pour réussir à gérer efficacement l'hétérogénéité constatée par les différentes évaluations dans les classes ; de tels outils pourront être exploités, de façon interne, par les enseignants dans le cadre des liaisons école-collège du futur cycle 3. Nous pouvons alors nous demander en quoi l'exploitation d'un tel outil par les enseignants peut-elle permettre de travailler dans la continuité école - collège et faire évoluer les praxéologies enseignées ? Quelles formations proposer pour favoriser cette évolution ? Ce sont autant de points d'ancrage de nouvelles recherches à venir.

La question de la formation des enseignants à l'évaluation et par l'évaluation suscite également de multiples questions de recherche. La méthodologie de conception des évaluations, le modèle d'analyse des connaissances numériques des élèves en lien avec le test diagnostique nous semblent être des outils pouvant fonder de futures recherches et de futures formations. Ainsi, au-delà des résultats obtenus, le travail de thèse réalisé permet d'envisager de nouvelles perspectives de recherche et de formation sur l'évaluation que nous ne manquerons pas de suivre.

BIBLIOGRAPHIE

Adda, J. (1976). Difficultés liées à la présentation des questions en mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 3-22.

Alexandre, D. (2010). *Anthologie des textes clés en pédagogie. Des idées pour enseigner*. Paris : ESF.

André, P., Haillecourt, A. (1872). *Arithmétique à l'usage des classes élémentaires (3e édition revue et corrigée)* Paris : F.-E. André-Guédon. Disponible en ligne : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6461192q (consulté le 26/09/2015).

Argaud, H.-C., Colenson, A. (1997). Procédés d'élèves pour calculer une différence : du calcul réfléchi au calcul standard en passant par la calculette. *Grand N*, 61, 39-52.

Artigue, M. (2009). Rapports et articulations entre cadres théoriques : le cas de la théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 29(3), 305-334.

Artigue, M., Coagri, C., Smida, H., & Winslow, C. (2009). Évaluations internationales : impacts politiques, curriculaires et place dans les pays francophones. In Kuzniak A. & Sokhna M (Eds) *Actes du colloque international Espace Mathématique Francophone* (Vol. 1), *Dakar.*

Artigue, M., Winslow, C. (2010). International comparative studies on mathematics education : a view from the anthropological theory of didactics. *Recherches en didactique des mathématiques*, 30(1), 47-82.

Bardi, A.-M., Mégard, M. (2009). L'évaluation des élèves en France, à un moment charnière de leur histoire ? *Mesure et évaluation en éducation*, 32(3), 125-152.

Baudelot, C., Establet, R. (2009). *L'élitisme républicain.* Paris : Seuil et la République des idées.

Beckers, J. (2002). *Développer et évaluer des compétences à l'école : vers plus d'efficacité et d'équité.* Bruxelles : Labor.

Bessoneau, P., Arzoumanian, P., Pastor, J.-M. (2015). Une évaluation sous forme numérique est-elle comparable à une évaluation de type « papier-crayon » ? *Education et formation*, 86-87, 159-180.

Bezout, E., Reynaud, A.-A.-L. (1821). *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie par Bezout avec des notes de A.A.L Reynaud (Neuvième édition).* Paris. Disponible en ligne : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q (consulté le 26/09/2015).

Bloom, B. S., Hasting, J. T., Madaus, G. F. (1971). *Handbook on formative and summative evaluation of student learning.* New York : Mac Graw Hill.

Bodin, A. (1985). Problèmes de l'évaluation des savoirs mathématiques. *Petit x*, 7, 5-28.

Bodin, A. (1997). L'évaluation du savoir mathématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(1), 49-96.

Bodin, A. (2006a). Ce qui est vraiment évalué par PISA en mathématiques. Ce qui ne l'est pas. Un point de vue français. *Bulletin de l'APMEP,* 463, 240-265.

Bodin, A. (2006b). Les mathématiques face aux évaluations nationales et internationales. *Repères Irem*, 65, 55-89.

Bodin, A. (2010a). Taxonomie pour les énoncés de mathématiques - Classement par niveaux hiérarchisés de complexité cognitive Disponible en ligne : www.irem.univ-mrs.fr/IMG/pdf/Taxonomie_A-_Bodin2010.pdf (consulté le 26/09/2015).

Bodin, A. (2010b). La question de la complexité des situations - Rapports entre complexité et compétences. Disponible en ligne : https://www.pedagogie.ac-aix-marseille.fr/upload/docs/application/pdf/2014-05/la_question_de_la_complexite.pdf. (consulté le 26/09/2015).

Bonami, M. (2005). Evaluation interne et évaluation externe : concurrence ou complémentarité ? *Les cahiers de recherche en éducation et formation*, 38, 4-20.

Bosch, M., Gascon, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier A. & Margolinas C. (Eds) *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 197-122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bottani, N., Vrignaud, P. (2005). La France et les évaluations internationales. *Rapport établi à la demande du Haut Conseil de l'Evaluation de l'Ecole*.

Bovier-Lapierre, G. (1868). *Arithmétique*. Paris : Hachette. Disponible en ligne : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6569093h.r (consulté le 26/09/2015).

Brissiaud, R. (2013). *Apprendre à calculer à l'école*. Paris : Retz.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2010). Complexité des activités mathématiques - Introduction Généralités. Disponible en ligne : http://guy-brousseau.com/1396/cours-gb-2010-diapo-9-la-complexite-des-activites-mathematiques/(consulté le 26/09/2015).

Brun, J. (1990). La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives. *Math Ecole,* 141, 2 - 15.

Burgermeister, P. F., Coray, M. (2008). Processus de contrôle en résolution de problèmes dans le cadre de la proportionnalité des grandeurs: une analyse descriptive. *Recherches en didactique des mathématiques*, 28(1), 63-105.

Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique.* Besançon : Presses Universitaires de Franche-Comté.

Butlen, D., Pézard, M, (2003). Une contribution à l'étude des rapports entre habilités calculatoires et résolution de problèmes numériques à l'école primaire et au début du collège. *Spirale*, 31, 117-140.

Cardinet, J. (1989). Evaluer sans juger. *Revue française de pédagogie*, 88, 41-52.

Cardinet, J. (1990). *Evaluation scolaire et mesure.* Bruxelles : De Boeck.

Cardinet, J. (2002). Pourquoi faut-il parler d'édumétrie ? *Bulletin de l'Association pour le Développement des Méthodologie de l'Evaluation en Education (ADMEE-Europe), 3.*

Caron, F., René de Cotret, S. (2007). Un regard didactique sur l'évaluation en mathématiques: genèse d'une perspective. In P. Marchand (Ed.) *Actes du colloque du Groupe des Didacticiens des Mathématiques du Québec* (p. 123 - 134). UQAR.

Carpenter, T. P., Moser, J. M., Bebout, H. C. (1988). Representation of addition and substraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 4, 345-357.

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, 28(2), 135-182.

Castela, C., & Romo-Vazquez, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en didactique des mathématiques*, 31(1), 79-130.

Chaachoua H. (2010) *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves*. Habilitation à diriger des recherches. Université Joseph Fourier, Grenoble.

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot, Paris.

Chambris, C. (2012a). Evolution des organisations mathématiques sur la numération au vingtième siècle en France. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz,* 4, 51-72.

Chambris, C. (2012b). Consolider la maîtrise de la numération des entiers et des grandeurs à l'entrée au collège. Le système métrique peut-il être utile ? *Petit x*, 89, 5-31

Charnay, R., Valentin, D. (1991). Calcul ou comptage ? Calcul et comptage ! *Grand N*, 50, 11-20.

Chesné, J.-F. (2012). Ce que nous apportent les évaluations standardisées sur les acquis des élèves à la fin de l'école primaire en mathématiques (Nombres et calcul). In A. Mercier & R. Jost (Eds) *Actes des auditions du Comité Scientifique* (p. 10-11). Lyon. Disponible en ligne : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale. (consulté le 26/09/2015).

Chesné, J.-F. (2014). *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental*. Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot, Paris.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie - Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x,* 19, 43 -72.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1998). Dictionnaire de didactique des mathématiques 1997-1998. Organisations didactiques : 2. Gestes, dispositifs, programmes. Disponible en ligne : yves.chevallard.free.fr/spip/.../Organisations_didactiques_2_1998_.pdf (consulté le 26/09/2015).

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221 - 266.

Chevallard, Y. (2001). Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions. In J. Luc Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (Eds) *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (p. 3 - 32). Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2004). Le moment de l'évaluation, ses objets, ses fonctions : déplacements, ruptures, refondation. Disponible en ligne : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=44&var_recherche=%E9valuation. (consulté le 26/09/2015).

Chevallard, Y., Feldmann, S. (1986). *Pour une analyse didactique de l'évaluation*. IREM d'Aix-Marseille.

Choppin, B.H., (1975). Guessing the answer on objective tests, *British Journal of Educational Psychology*, 45, 206-213.

Clivaz, S. (2011). *Des mathématiques pour enseigner : analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire.* Thèse de doctorat : Université de Genève.

Collet, M., Grégoire, J. (2008). Le développement du système en base dix chez les enfants de première et de deuxième primaire. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Eds) *Enseignement et apprentissage des mathématiques - Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (p. 80-103). Bruxelles : De Boeck.

Conne, F. (1984). Calculs numériques et calculs relationnels dans lea résolution de problèmes arithmétiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 5(3), 269-332.

Croset, M. (2009). Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en acte. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier. Grenoble.

Deblois, L. (1996). Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16(1), 71-127.

Deblois, L., Freiman, V., & Rousseau, M. (2007). Les résultats des élèves aux tests internationaux et leur possible influence sur les thèmes de recherche. In P. Marchand (Ed.) *Actes du colloque du Groupe des Didacticiens des Mathématiques du Québec* (p. 135- 146). UQAR.

De Corte, E., Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first grader's strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18 (5), 363-381.

De Ketele, J.-M. (1989). L'évaluation de la productivité des institutions d'éducation. *Cahier de la Fondation Universitaire ; Université et Société, le rendement de l'enseignement universitaire*, (3), 73-83.

De Ketele, J.-M., Gerard, F.-M. (2005). La validation des épreuves selon l'approche par les compétences. *Mesure et évaluation en éducation*, 28(3), 1-26.

De Landsheere, G. (1979). *Dictionnaire de l'évaluation et de la recherche en éducation*. Paris : Presses Universitaires de France.

De Landsheere, V. (1988). Faire réussir, faire échouer. Paris : Presses Universitaires de France.

Delozanne, E., Prévit, D., Grugeon-Allys, B., Chenevotot-Quentin, F. (2010) Vers un modèle de diagnostic de compétence. *Revue Techniques et Sciences Informatiques*, 29(8-9), 899-938.

Demailly, L. (2001). Enjeux de l'évaluation et régulation des systèmes scolaires. In L. Demailly (Dir.) *Evaluer les politiques éducatives* Bruxelles : De Boeck.

Demeuse, M. (2004). *Introduction aux théories et aux méthodes de la mesure en sciences psychologiques et en sciences de l'éducation.* Liège : Editions de l'Université de Liège.

De Peretti, A., Boniface, J., Legrand, J.A. (1998). *Encyclopédie de l'évaluation en formation et en éducation*. Paris : ESF.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31.

Drouhard, J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. Université Paris-Diderot, Paris.

Drouhard, J.-P. (2014). Quand écrire c'est faire. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz,* 12, 1-19.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en didactique des mathématiques*, 16(3), 349-382.

Duval, R. (2006). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. In *Actes du XXXIIème colloque COPIRELEM* (p. 67-91). Strasbourg : Irem de Strasbourg.

Fagnant, A. (2008). Résoudre et symboliser des problèmes additifs et soustractifs en début d'enseignement primaire. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Eds) *Enseignement et apprentissage des mathématiques - Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (p. 132-150). Bruxelles : De Boeck.

Fayol, M. (2013). *L'acquisition du nombre*. Paris : Presses Universitaires de France.

Feyfant, A. (2015). L'apprentissage des nombres et opérations : les données du problème. *Dossier de veille de l'Ifé, 102.* Lyon : ENS de Lyon. Disponible en ligne : http://ife.ens-lyon.fr/vst/DA/detailsDossier.php?parent=accueil&dossier=102&lang=fr (consulté le 27/09/2015).

Figari, G., Remaud, D. (2014). *Méthodologie d'évaluation en éducation et formation ou l'enquête évaluative.* Bruxelles : De Boeck.

Figari, G., Tourmen, C. (2006). La référentialisation : une façon de modéliser l'évaluation de programme, entre théorie et pratique - Vers une comparaison des approches au Québec et en France. *Mesure et évaluation en éducation*, 29(3), 5-25.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Fennema, E. (1997a). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for research in mathematics education*, 28(2), 130- 162.

Fuson, K. C., Smith, S. T., Cicero, A. M. L. (1997b). Supporting latino first graders' ten-structured thinking in urban classrooms. *Journal for research in mathematics education*, *28*(6), 738-766.

Glaeser, G. (1995). *Fondements de l'évaluation en mathématiques*. Publication de l'APMEP n°96. Paris : APMEP.

Goldstein, H. (2008). Comment peut-on utiliser les études comparatives internationales pour doter les politiques éducatives d'informations fiables ? *Revue française de pédagogie,* 164, 69-76.

Gras, R. (1979). *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions scientifiques et de certains objectifs didactiques en mathématiques.* Thèse de doctorat. Université Paris 7. Paris.

Grégoire, J. (2008). Quelle démarche d'évaluation diagnostique des troubles d'apprentissage en mathématique? In J. Grégoire (Ed.) *Evaluer les apprentissages. Les apports de la psychologie cognitive.* (p. 19-38). Bruxelles : De Boeck.

Grugeon, B. (1995). *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et première G*. Thèse de doctorat. Université Paris 7. Paris.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(2), 167 - 210.

Grugeon-Allys, B., Chenevotot-Quentin, F., Pilet, J., & Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'apprentissage en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, *Hors série*, 133 - 158.

Grugeon-Allys, B., Godino, J., Castela, C. (à paraître) Trois regards sur la question de la diversité des théories.

Grugeon-Allys, B., Grapin, N. (2015a). Une approche didactique pour évaluer les validités d'une évaluation externe en mathématiques. In *Actes du 27ème colloque de l'Association pour le Développement des Méthodologie En Education (ADMEE Europe) « L'évaluation à la lumière des contextes et des disciplines »*. Liège.

Grugeon-Allys, B., Grapin, N. (2015b). Validité d'une évaluation externe - complémentarité des approches. In Mathé, A-C & Mounier E. (Eds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2015.* Paris : IREM Paris 7.

Hadji, C. (1989). *L'évaluation, règles du jeu*. Paris : ESF.

Houdement, C. (2003). Catégorisation des problèmes additifs, difficultés liées à la place de la question. *Carnets de route de la COPIRELEM. T. 2. Démarches et savoirs à enseigner. Concertum. Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques.* 225 - 234 Paris : ARPEME.

Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 16, 67-96.

Huguet, T. (2012). Les résultats des élèves aux évaluations CEDRE 2008 et les besoins qu'ils révèlent. In A. Mercier & R. Jost (Eds) *Actes des auditions du Comité Scientifique* (p. 10-11). Lyon. Disponible en ligne : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale. (consulté le 26/09/2015).

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Katz, I., Bennett, R. E., & Berger, A. (2000). Effects of Response Format on Difficulty of SAT Mathematics Items : It's Not the Strategy. *Journal of Educational Measurement*, 37 (1), 39-57.

Kuzniak, A. (2006). Diversité des mathématiques enseignées ici et ailleurs : l'exemple de la géométrie. In Rauscher J.C. (Dir) *Actes du XXXII^{ème} colloque COPIRELEM - Enseigner les mathématiques en France, en Europe et ailleurs.* (p. 159 - 164). Strasbourg : IREM de Strasbourg.

Larguier, M. (2009). *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession.* Thèse de doctorat. Université Montpellier 2.

Laveault, D., Grégoire, J. (2005). *Introduction aux théories des tests en sciences humaines.* Bruxelles : De Boeck.

Laveault, D., Grégoire, J. (2014). *Introduction aux théories des tests en sciences humaines.* Bruxelles : De Boeck.

Leclercq, D. (1986). *La conception des questions à choix multiple*. Bruxelles : Labor.

Leclercq, D. (1987). *Qualité des questions et signification des scores*. Bruxelles : Labor.

Leclercq, D., Nicaise, J., Demeuse, M. (2004). Docimologie critique : des difficultés de noter des copies et d'attribuer des notes aux élèves. Disponible en ligne : http://orbi.ulg.ac.be/jspui/handle/2268/2234 (Consulté le 27/09/2015).

Lerman, I-C. (1978) Formes d'aptitude et taxinomie d'objectifs cognitifs en mathématiques. *Revue française de pédagogie*, 44, 5-33.

Leroyer, L., Bailleul, M. (2009). Les enseignants travaillent aussi hors la classe : comment ? In Kuzniak A. & Sokhna M. (Eds) *Actes du colloque international Espace Mathématique Francophone* (Vol. 1), *Dakar.*

Lescure, S., Pastor, J.-M. (2012). *Mathématiques en fin d'école primaire. Le bilan des compétences.* Poitiers : Sceren - CNDP.

Loye, N., Caron, F., Pineault, J., Tessier-Baillargeon, M., Burney-Vincent, C., Gagnon, M. (2011). Validité du diagnostique issu d'un mariage entre didactique et mesure sur un test existant. In G. Raîche, K. Paquette-Côté & D. Magis (Dir.) *Des mécanismes pour assurer la validité de l'interprétation de la mesure en éducation Vol. 2: L'évaluation,* (p. 11-29). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Mainzer, K. (1999). Nombres naturels, entiers et nombres rationnels. In *Les nombres : leur histoire, leur place et leur rôle de l'Antiquité aux recherches actuelles* (p. 2-18). Paris : Vuibert

Margolinas, C., & Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In J.-Y. Rochex & J. Crinon (Eds.), *La construction des inégalités scolaires* (19-32). Rennes: Presses universitaires de Rennes.

Margolinas, C. (2012). Connaissance et savoir. Des distinctions frontalières ? In P. Losego (Ed.), *Actes du colloque « Sociologie et didactiques : vers une transgression des frontières »* (p. 16-44). Lausanne : Haute Ecole Pédagogique de Vaud.

Matheron, Y. (2012). PISA : Prudence (envers les) Interprétations Statistiques Avancées! In A. Mercier & R. Jost (Eds) *Actes des auditions du Comité Scientifique* (p. 105-110). Lyon. Disponible en ligne : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale. (consulté le 26/09/2015).

Maury, S. (1985). Influence de la question dans une épreuve relative à la notion d'indépendance. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 283-301.

Maury, S., Caillot, M. (2003). *Rapport au savoir et didactique*. Paris : Fabert.

Mc Closkey, M., Caramazza, A., & Basili, A. M. (1985). Cognitive mechanisms in number processing and calculation : evidence from dyscalculia, *Brain and cognition*, 4, 171-196.

Mercier-Brunel, Y. (2014). Évaluations nationales et pratiques de classe : heurs et malheurs d'une expérience de coexistence. In *Actes du 26ème colloque de l'ADMEE- Europe : cultures et politiques de l'évaluation en éducation et en formation*. Marrakech.

Merindol, J.-Y. (2006). *Nombres et algèbre*. Les Ulis : EDP Sciences

Mons, N. (2009). *Les effets théoriques et réels de l'évaluation standardisée. Compléments à l'étude Eurydice*. Réseau Eurydice.

Mounier, E. (2010). *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes*. Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot, Paris.

Mounier, E., Pfaff, N. (2014) Quoi de neuf dans la numération au CP ? Le dénombrement en question. In *Actes du XXXXIème colloque Copirelem « quelles ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages en mathématiques à l'école élémentaire » - Mont de Marsan.*

Mullis, I., Martin, M., Ruddock, G., O'Sullivan, C., & Preuschoff, C. (2013). *TIMSS 2011-Assessment Frameworks*. TIMSS & PIRLS International Study Center Lynch School of Education, Boston College.

Nguala, J.B. (2005). La multiprésentation, un dispositif d'aide à la résolution de problèmes. *Grand N*, 76, 45-63.

Nikolantonakis, K., Vivier, L. (2009). La numération en base quelconque pour la formation des enseignants du premier degré en France et en Grèce. Une étude articulant registres et praxéologies. In A. Gagatsis, A. Kuzniak, E. Deliyianni, L.Vivier (Eds) *Fisrt French-Chypriot Conference of Mathematics Education* (p. 171-186). Lefkosia : Chypre

Noirfalise, A., Matheron, Y. (2009). *Enseigner les mathématiques à l'école primaire - Les quatre opérations sur les nombres entiers*. Paris: Vuibert.

Noizet, G., Caverni, J.-P. (1978). *Psychologie de l'évaluation scolaire*. Paris: PUF.

Perrin-Glorian, M.-J. (2012). Des nombres pour quoi faire ? Comment les nommer ? Comment les écrire ? *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz,* 4, 3-4.

Perrenoud, P. (1997). *Construire des compétences dès l'école*. Paris : ESF.

Pieron, H. (1963). *Examens et docimologie.* Paris : PUF.

Pilet, J. (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation*. Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot, Paris.

Pluvinage, F. (1979). Loto-questionnaires (pour l'évaluation et l'auto-contrôle en mathématiques). *Educational Studies in Mathematics*, 10, 443-485.

Pons, X. (2010). *Evaluer l'action éducative. Des professionnels en concurrence.* Paris : Presse Universitaire de France.

Prévit, D. (2008). *Génération d'exercices et analyse multicritère automatique de réponses ouvertes*.Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), Paris.

Reuter, Y., Cohen-Azria, C., Daunay, B., Delcambre, I., & Lahanier-Reuter, D. (2013). *Dictionnaire des concepts fondamentaux des didactiques*. Bruxelles : De Boeck.

Rey, B., Carette, V., Defrance, A., Kahn, S. (2010). *Les compétences à l'école : apprentissage et évaluation.* Bruxelles : De Boeck.

Robert, A. (1998). Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(2), 139-190.

Robert, A. (2008). Problématique et méthodologie communes aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques* (p. 33-57). Toulouse: Octares

Rocher, T. (2013). *Mesure des compétences : les méthodes se valent-elles ? Questions de psychométrie dans le cadre de l'évaluation de la compréhension de l'écrit*. Thèse de l'Université Paris Ouest Nanterre - La Défense, Paris.

Rocher, T. (2015). Mesure des compétences. Méthodes psychométriques utilisées dans le cadre des évaluations des élèves. *Education et formations*, 86-87, 37-60.

Roditi, E. (2005). L'éducation face aux théories de la construction du nombre chez l'enfant. *Spirale*, 36, 37-52.

Roditi, E., Chesné, J.-F. (2012). Un point de vue didactique sur les questions d'évaluation en éducation. In M. Lattuati, J. Penninckx & A. Robert (Dir.), *Une caméra au fond de la classe*, p. 279-292. Besançon: Presses universitaires de Franche-Comté.

Roditi, E., Salles, F. (2015). Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques, un autre regard sur les résultats. *Education et formation*, 86-87, 235-258.

Rogalski, J. (2003). Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23(3), 343-388.

Ruminot-Vergara, C. (2014). *Effets d'un système d'évaluation sur l'enseignement des mathématiques : le cas de SIMCE au Chili.* Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot, Paris.

Sayac, N., Grapin, N. (2013). Facteurs de compétence et de complexité en mathématique : un outil au service de la formation des enseignants. In *Actes du 25ème colloque de l'Association pour le Développement des Méthodologies En Education (ADMEE Europe)*. Fribourg.

Sayac, N., Grapin, N. (2014a). Evaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cas d'une évaluation externe en France : les spécificités de la forme QCM. *Education et francophonie*, XLII : 2, 64-83.

Sayac, N., Grapin, N. (2014b). Evaluer par QCM en fin d'école: stratégies et degrés de certitude. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 19, 169-199.

Sayac, N., Grapin, N. (2015). Evaluation externe et didactique des mathématiques : un regard croisé nécessaire et constructif. *Recherches en didactique des mathématiques*, 35 (1), 101-126.

Scallon, G. (1988). *L'évaluation formative des apprentissages, 1 et 2*. Québec : Presses de l'Université de Laval.

Schneider, M. (2004). Trois compétences transversales contextualisées au sein de l'enseignement des mathématiques. *Repères Irem*, 55, 51–70.

Schneider, M. (2006). Comment des théories didactiques permettent-elles de penser le transfert en mathématiques ou dans d'autres disciplines ? *Recherches en didactique des mathématiques*, 26 (1), 9 - 38.

Simkin, M. G., Kuechler, W. L. (2005). Mutiple Choice Tests and Student Understanding : What is the Connection ? *Decision sciences journal of innovative education*, 3 (1), p. 73-98.

Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource.* Université Paris Diderot. Paris.

Troseille, B., Rocher, T. (2015). Les évaluations standardisées des élèves. Perspective historique. *Education et formation*, 86-87, 15-35.

Van den Heuven-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the learning of mathematics*, 25 (2), 2-9.

Vantourout, M., Goasdoué, R. (2014). Approches et validité psycho-didactique des évaluations. *Education et Formation*, e302, 139-156.

Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. *Grand N*, 38, 21-40.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10 (2/3), 133 - 170.

Vergnaud, G. (non daté). Les compétences, bravo ! Mais encore ? Disponible en ligne : http://www.pedagopsy.eu/competences_vergnaud.html. (Consulté le 27/09/2015).

Vlassis, J., Gamo, S., Bertemes, J. (2015). Résultats PISA 2012 à la loupe : analyse qualitative des réponses d'élèves luxembourgeois en mathématiques et pistes didactiques. In *Actes du 27ème colloque de l'Association pour le Développement des Méthodologie En Education (ADMEE Europe) « L'évaluation à la lumière des contextes et des disciplines »*. Liège.

Winslow, C. (2005). Définir les objectifs de l'enseignement mathématique : la dialectique matières - compétences. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 131 - 155.

Wozniak, F. (2012). Analyse didactique des praxéologies de modélisation mathématique à l'école : une étude de cas. *Education et didactique*, 6(2), 65-88.

NOTES INFORMATIONS DEPP

Andreu, S., Le Cam, M., Rocher, T. (2014). Évolution des acquis en début de CE2 entre 1999 et 2013 : les progrès observés à l'entrée au CP entre 1997 et 2011 ne sont pas confirmés. *Note d'information,* 19, MEN-DEPP.

Brun, A., Huguet, T. (2009). Les compétences en mathématiques des élèves en fin de collège. *Note d'information*, 10.18, MEN - DEPP.

Brun, A., Pastor, J.-M. (2009). Les compétences en mathématiques des élèves en fin d'école. *Note d'information*, 10.17, MEN - DEPP.

Dalibard, E., Arzoumanian, P. (2015). CEDRE 2014 - Mathématiques en fin de collège : une augmentation importante du pourcentage d'élèves de faible niveau. *Note d'information,* 19, MEN - DEPP.

Dalibard, E., Pastor, J.-M. (2015). CEDRE 2014 - Mathématiques en fin d'école primaire : les élèves qui arrivent au collège ont des niveaux très hétérogènes. *Note d'information,* 18, MEN - DEPP.

Kaspaik, S. Salles, F (2013). Les élèves de 15 ans en France selon PISA 2012 en culture mathématique : baisse des performances et augmentation des inégalités depuis 2003. *Note d'information,* 13.31*,* MEN - DEPP.

Monnier, A.-L. (2007). *L'évaluation internationale PISA 2003 : compétences des élèves français en mathématiques, compréhension de l'écrit et sciences*. MEN-DEPP.

Rocher, T. (2008). Lire, écrire, compter : les performances des élèves de CM2 à vingt ans d'intervalle 1987-2007. *Note d'information*, 08-38, MEN - DEPP.

Rocher, T., Chesne, J.-F., Fumel, S. (2008). Méthodologie de l'évaluation des compétences de base en français et en mathématiques en fin d'école et en fin de collège. *Note d'information*, 08-37, MEN - DEPP.

RAPPORTS OCDE

OCDE. (2013). *Cadre de l'évaluation PISA 2012.* Editions OCDE. PISA.

OCDE. (2014). *Résultats du PISA 2012 : Savoirs et savoir-faire des élèves : Performance des élèves en mathématiques, en compréhension de l'écrit et en sciences (Volume I).* Editions OCDE. PISA.

TIMSS 2011 User Guide for the International Database - Items Released. (2013) (TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College and IEA). Chestnut Hill, MA: Pierre Foy, Alka Arora, and Gabrielle M. Stanco.

TIMSS 2015 Assessment Frameworks. (2013) (TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College). Chestnut Hill, MA: Mullis, I.V.S. & Martin, M.O.

TEXTES OFFICIELS

Programmes de l'école maternelle (2008). Disponible en ligne : http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/programme_maternelle.htm (Consulté le 27/09/2015).

Programmes du cycle 2 de l'école élémentaire (2008). Disponible en ligne : http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/programme_CP_CE1.htm (Consulté le 27/09/2015).

Programmes du cycle 2 de l'école élémentaire (2008). Disponible en ligne : http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/programme_CE2_CM1_CM2.htm (Consulté le 27/09/2015).

Programmes de mathématiques du collège (2008). Disponible en ligne : http://www.education.gouv.fr/cid22120/mene0817023a.html (Consulté le 27/09/2015).

Socle commun de connaissances de compétences (2006). Disponible en ligne : http://www.education.gouv.fr/cid2770/le-socle-commun-de-connaissances-et-de-competences.html (Consulté le 27/09/2015).

Socle commun de connaissances de compétences (2015). Disponible en ligne : http://www.education.gouv.fr/pid25535/bulletin_officiel.html&cid_bo=87834#socle_commun (Consulté le 27/09/2015).

DOCUMENTS D'ACCOMPAGNEMENT DES PROGRAMMES

Durpaire, J-L., Mégard, M. (2010). *Le nombre au cycle 2*. (2010) (MEN - CNDP). Disponible en ligne : http://cache.media.eduscol.education.fr/file/ecole/00/3/Le_nombre_au_cycle_2_153003.pdf (Consulté le 27/09/2015).

Durpaire, J-L., Mégard, M. (2012). *Le nombre au cycle 3*. (2012) (MEN - CNDP). Disponible en ligne : http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/44/9/NombreCycle3_web_VD_227449.pdf (Consulté le 27/09/2015).

MANUELS SCOLAIRES

Brissiaud, R., Clerc, P., Lelièvre, F., Ouzoulias, A. (2010a). *J'apprends les maths CM2 - Manuel de l'élève.* Paris : Retz.

Brissiaud, R., Clerc, P., Lelièvre, F., Ouzoulias, A. (2010b). *J'apprends les maths CM2 - Livre du maître.* Paris : Retz.

Charnay, R., Combier, G., Dussuc, M-P., Madier, D. (2010a). *Cap Maths- CM2 - Manuel de l'élève.* Paris : Hatier.

Charnay, R., Combier, G., Dussuc, M-P., Madier, D. (2010b). *Cap Maths- CM2 - Guide de l'enseignant.* Paris : Hatier.

Peltier, M.L., Briand, J., Ngono B., Vergnes D. (2009a). *Euromaths CM2 - Manuel de l'élève.* Paris : Hatier.

Peltier, M.L., Briand, J., Ngono B., Vergnes D. (2009b). *Euromaths CM2 - Livre du professeur.* Paris : Hatier.

Peltier, M.L., Briand, J., Ngono B., Vergnes D. (2009c). *Euromaths CM1 - Manuel de l'élève.* Paris : Hatier.

LISTE DES TYPES DE TÂCHES - TECHNIQUES ET ÉLÉMENTS TECHNOLOGIQUES

OMR 1 : PRODUIRE UNE EXPRESSION

Éléments technologiques relatifs OMR 1 « produire d'expressions arithmétiques »	
$\Theta_{RP\_Prod\_ea}$	Technologie assurant la cohérence entre l'expression arithmétique produite et les relations existant entre les données du problème.
Θ_{Compt}	Technologie de comptage

Types de tâches - OMR1	
T_{RP_+}	Produire une expression pour un problème relevant d'une structure additive
$T_{RP\_\times}$	Produire une expression pour un problème relevant d'une structure multiplicative
T_{RP_ass}	Associer une expression arithmétique à un problème

Techniques - OMR1	
τ_{RP_compt}	Technique de comptage ou de groupement/partage reposant sur un modèle « collection »
τ_{RP_calc}	Technique conduisant à une expression arithmétique
$\tau_{RP\_op\text{-}trou}$	Technique conduisant à une écriture arithmétique de la forme « opération à trou »
$\tau_{RP\_\times\_add}$	Pour $T_{RP\_\times}$: technique reposant sur un modèle additif dans un problème multiplicatif et conduisant à des expressions arithmétiques sous la forme de sommes
$\tau_{RP\_:\_mult}$	Pour $T_{RP\_:}$: technique reposant sur un modèle multiplicatif dans un problème de division et conduisant à des expressions arithmétiques sous la forme de produits
$\tau_{RP\_:\_sous}$	Pour $T_{RP\_:}$: technique reposant sur un modèle soustractif (ou additif) dans un problème de division et conduisant à des expressions arithmétiques sous la forme de soustractions successives (ou d'additions successives).

OMR 2 : PRATIQUER LA NUMERATION DECIMALE

Éléments technologiques relatifs à la numération	
Θ_P	Principe de position: les unités du premier ordre s'écrivent au premier rang à droite, les unités du deuxième ordre s'écrivent au deuxième rang à partir de la droite, etc.
Θ_D	Principe décimal: dix unités d'un certain ordre sont égales à une unité de l'ordre immédiatement supérieur.
Θ_{max}	Principe de maximalité : le nombre d'unités de chaque ordre étant au plus égal à 9.
Θ_{np}	Principes de la numération parlée : à partir de l'algorithme de construction de la numération parlée.
Θ_{Def_RO}	Définition de la relation d'ordre

Types de tâches - OML 2A - OM $_{trad}$: traductions d'écritures	
$T_{T.../ec}$	Traductions d'écritures non canoniques en écriture chiffrée et réciproquement
$T_{T...c/ec}$	Traductions canoniques d'écritures en écriture chiffrée et réciproquement
$T_{C\_....}$	Conversions dans un même registre
T_{CNd}	Chiffre des et Nombre de

Techniques - OML 2A - OM $_{trad}$: traductions d'écritures	
τ_{pos}	Technique de position (pour les écritures canoniques)
τ_{juxt}	Technique de juxtaposition (pour toutes les écritures)
τ_{conv}	Technique de conversion
$\tau_{ec\text{-}np}$	Technique pour passer du nom du nombre à l'écriture chiffrée et réciproquement
τ_{tronc}	Technique de troncature
τ_{multPD}	Règle des zéros pour la multiplication par 10,100…
τ_{divPD}	Règle des zéros pour la division par 10, 100…

Types de tâches - OML 2B - OM$_{card}$: nombre cardinal	
T_{Dc}	Dénombrer une collection (ou T_{Pc} produire une collection de cardinal donné)
T_{CNdc}	Nombre de pour des collections
T_{Cc}	Comparer des collections

Techniques - OML 2B - OM$_{card}$: nombre cardinal	
$\tau_{Dc\text{-}ec}$	Technique de dénombrement reposant sur le codage en écriture chiffrée
$\tau_{Dc\text{-}calc}$	Technique de dénombrement reposant sur le calcul
$\tau_{Dc\text{-}np\text{-}mult}$ et $\tau_{Dc\text{-}np\text{-}add}$	Techniques de dénombrement reposant sur la numération parlée

Types de tâches - OML 2C - OM$_{ord}$: nombre ordinal	
T_{P_DG} (ou T_{D_DG})	Placer des nombres sur une droite graduée (ou déterminer des nombres correspondant à une graduation)
T_{Comp}	T_{comp_ec} : Comparer des nombres en écriture chiffrée
	T_{comp_np} : Comparer des nombres à partir de leurs noms
T_R	Ranger
T_{AR}	T_{AR} : Compléter une suite de nombres (Avancer-Reculer) $T_{AR\text{-}en}$: dans une suite de nombres oralement (nom du nombre) $T_{AR\text{-}ec}$: dans une suite de nombres en écriture chiffrée
T_I	Intercaler des nombres
T_{enc}	Encadrer des nombres (entre deux dizaines, centaines, …consécutives)

Techniques - OML 2C - OM$_{ord}$: nombre ordinal	
$\tau_{Comp\text{-}ec}$	Technique de comparaison des nombres en écriture chiffrée
$\tau_{Comp\text{-}np}$	Technique de comparaison des nombres à partir de leur nom
τ_R	Tcehnique de rangement de nombres en écriture chiffrée

OMR 3 : CALCULER

Éléments technologiques relatifs au calcul		
Définitions et propriétés des opérations	Θ_{ass_+} et $\Theta_{ass\_\times}$	Associativité de l'addition et de la multiplication
	$\Theta_{comm\_+}\Theta_{comm\_\times}$	Commutativité de l'addition et de la multiplication
	$\Theta_{div\text{-}euc}$	Définition de la division euclidienne par l'égalité caractéristique
	Θ_{inv}	Définition de l'addition comme inverse de la soustraction et la division comme inverse de la multiplication
	Θ_{dec_+} et $\Theta_{dec\_\times}$	Décomposition additive et multiplicative d'un nombre.
Propriétés de la soustraction liées à d'autres opérations	$\Theta_{écart}$	Propriété de l'écart constant ou de l'ajout simultané
	$\Theta_{sous\text{-}somme}$	Soustraire une somme équivaut à soustraire chacun des termes
	$\Theta_{sous\text{-}diff}$	Soustraire une différence équivaut à soustraire le premier terme de la différence et à ajouter le second.
	$\Theta_{sous\text{-}terme\text{-}somme}$	Soustraire un nombre d'une somme équivaut à le soustraire d'un des termes de la somme
	$\Theta_{sous\text{-}terme\text{-}diff}$	Soustraire un nombre d'une différence équivaut à le soustraire du premier terme ou à l'ajouter au second
	Θ_{dist}	Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction
Propriétés de la division liées à d'autres opérations	$\Theta_{div\text{-}somme\text{-}diff}$	Diviser une somme ou une différence par un nombre donné non nul revient à diviser chacun des termes par ce nombre.
	$\Theta_{div\text{-}prod}$	Diviser un produit par un nombre donné non nul revient à diviser un des facteurs du produit par ce nombre, et à multiplier le résultat par l'autre facteur.
	$\Theta_{div\text{-}par\text{-}prod}$	Diviser un nombre donné par un produit revient à diviser ce nombre successivement par chacun des facteurs du produit.
	$\Theta_{div\text{-}par\text{-}quot}$	Diviser un nombre donné par un quotient revient à diviser ce nombre par le dividende et à multiplier le résultat par le diviseur.
	$\Theta_{div\text{-}euc\_mult}$	Dans une division euclidienne, le quotient ne change pas quand on multiplie ou que l'on divise le dividende et le diviseur par un entier k non nul ; le reste est multiplié par k

Types de tâches - OML 3A : Calcul posé	
T_{CP_+}	Effectuer une addition de façon posée
T_{CP_-}	Effectuer une soustraction de façon posée
T_{CP_x}	Effectuer une multiplication de façon posée
$T_{CP\_:}$	Effectuer une division euclidienne de façon posée

Techniques : τ_{CP} - OML 3A : Calcul posé	
τ_{CP_+}	Technique de calcul posé d'une addition
$\tau_{CP\_-\_emprunt}$	Technique de calcul posé d'une soustraction *« par cassage » ou par « emprunt »*
$\tau_{CP\_-\_écart}$	Technique de calcul posé d'une soustraction s'appuyant sur l'écart constant
$\tau_{CP\_-\_add\_trou}$	Technique de calcul posé d'une soustraction à l'aide d'une addition à trous
$\tau_{CP\_\times}$	Technique de calcul posé d'une multiplication
$\tau_{CP\_:\_eun}$	Technique de calcul posé d'une division euclidienne où le diviseur est structuré en unités de numération
$\tau_{CP\_:\_u}$	Technique de calcul posé d'une division euclidienne où le diviseur est structuré en unités simples
$\tau_{CP\_:\_sous}$	Technique de calcul d'une division à partir de soustractions ou d'additions successives
$\tau_{CP\_:\_enc}$	Technique de calcul d'une division par encadrement du dividende avec des produits.

Types de tâches - OML 3B : Calculer de façon réfléchie (calcul exact et approché)	
$T_{Cn\text{-}n}$	Compter ou décompter de n en n (n différent de 10)
T_{CR_+}	Calculer de façon réfléchie une somme
T_{CR_-}	Calculer de façon réfléchie une différence
T_{CR_x}	Calculer de façon réfléchie un produit
$T_{CR\_:}$	Calculer de façon réfléchie un quotient (et un reste).
T_{CR_ODG}	Donner l'ordre de grandeur du résultat d'une opération (…)

Techniques de calcul réfléchi pour une addition (OML 3B)	
$\tau_{CR\_posé}$	Technique identique à celle du calcul posé (dénomination identique pour les quatre opérations)
$\tau_{CR\_+\_dec\_eapdc}$	Technique reposant sur la décomposition additive canonique des nombres.
$\tau_{CR\_+\_dec\text{-}arithm+\_}$	Technique reposant sur la décomposition arithmétique additive des nombres
$\tau_{CR\_+\_compens}$	Technique par compensation
$\tau_{CR\_+\_excès}$	Technique où l'on ajoute un nombre entier d'unités d'un ordre donné supérieur à un des termes de la somme.
$\tau_{CR\_+\_num}$	Technique basée sur le nom des nombres

Techniques de calcul réfléchi pour une soustraction (OML 3B)	
$\tau_{CR\_-\_dec\_eapdc}$	Technique reposant sur la décomposition canonique des nombres.
$\tau_{CR\_-\_dec\text{-}arithm+}$	Technique basée sur la décomposition arithmétique additive des nombres
$\tau_{CR\_-\_excès}$	Technique basée sur le retrait d'un nombre de dizaines ou de centaines...entières déterminé par excès.
$\tau_{CR\_-\_add\_trous}$	Technique s'appuyant sur l'addition à trous.
$\tau_{CR\_-\_compens}$	Technique par compensation

Techniques de calcul réfléchi pour une multiplication (OML 3B)	
τ_{multPD}	Technique pour déterminer le produit d'un nombre par une puissance de 10
$\tau_{CR\_\times\_add\_it}$	Technique basée sur l'addition itérée.
$\tau_{CR\_\times\_dist\_}$	Technique mettant en jeu la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (et à la soustraction)
$\tau_{CR\_\times\_dec\_epdc}$	Technique reposant sur la décomposition canonique des nombres en puissance de 10
$\tau_{CR\_\times\_dec\text{-}arithm\times\_}$	Technique basée sur la décomposition arithmétique multiplicative des nombres

Techniques de calcul réfléchi pour une division (OML 3B)	
τ_{divPD}	Technique pour déterminer le quotient et le reste d'une division par une puissance de 10
$\tau_{CR\_:\_dec\text{-}epdc\_}$	Technique pour diviser un nombre de la forme a × 10^k (a non nul et k> 1) par un multiple de 10 : b × 10^p (b non nul et p ≤ k).
$\tau_{CR\_:\_dec\text{-}arithm\times\_}$	Technique basée sur la décomposition arithmétique multiplicative des nombres
$\tau_{CR\_dec\text{-}arithm+\_}$	Technique basée sur la décomposition additive ou soustractive arithmétique du dividende.

Sigles utilisés dans la thèse

Sigles relatifs aux évaluations

APDE	Approches Psycho-Didactiques en Évaluation
CEDRE	Cycle des Évaluations Disciplinaires Réalisées sur Échantillon
DEPP	Direction de l'Évaluation de la Prospective et de la Performance
DNB	Diplôme National du Brevet
HCE	Haut Conseil de l'éducation
IFÉ	Institut Français de l'Éducation
IGEN	Inspection Générale de l'Éducation Nationale
LOLF	Loi Organique relative aux Lois de Finances
MEN	Ministère de l'Éducation Nationale
NI	Note d'information
PACEM	Projet pour l'Acquisition de Compétences En mathématiques
PISA	Programm for International Student Assessment
TIMSS	Trends in International Mathematics and Science Study

Sigles relatifs aux formats de questions

QCM	Question à choix multiples
QRO	Question à réponse ouverte
QROC	Question à réponse ouverte courte
VF	Vrai-Faux

Sigles utilisés dans l'étude de la numération

EC	Écriture chiffrée
NP	Écriture du nombre dans le système de représentation de la numération parlée.
EUN *EUNC*	Écriture en unités de numération *Écriture canonique en unités de numération*
EAPD *EAPDC*	Écriture additive selon les puissances de dix *Écriture canonique additive selon les puissances de dix*
EPD *EPDC*	Écriture selon les puissances de dix *Écriture canonique selon les puissances de dix*
EMN *EMNC*	Écriture en matériel de numération *Écriture canonique en matériel de numération*
DG	Droite graduée

ANNEXES

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (Paris 7)
UFR de Mathématiques

ÉCOLE DOCTORALE : Savoirs scientifiques :
Épistémologie, histoire des sciences et didactique des disciplines

DOCTORAT

Spécialité : didactique des mathématiques

Nadine GRAPIN

Étude de la validité de dispositifs d'évaluation et conception d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves de fin d'école.

Thèse dirigée par Brigitte GRUGEON-ALLYS et Nathalie SAYAC

Soutenue le 10 décembre 2015

Membres du jury :

Mme Lucie DEBLOIS, Université de Laval	Rapporteure
Mme Brigitte GRUGEON-ALLYS, LDAR, UPEC	Directrice de la thèse
Mme Nathalie LOYE, Université de Montréal	Examinatrice
M. Yves MATHERON, ADEF,AMU, IFE-ENS de Lyon	Rapporteur
M. Eric RODITI, EDA, Université Paris-Descartes	Examinateur
Mme Nathalie SAYAC, LDAR, UPEC	Directrice de la thèse
M. Laurent VIVIER, LDAR, Université Paris-Diderot	Examinateur

Annexes

Annexes du chapitre 1

ANNEXE 1 : ÉVALUATIONS MENÉES EN FIN D'ÉCOLE EN MATHÉMATIQUES

Nous avons établi cette liste à partir de Roditi & Chesné (2012) Troseille & Rocher (2015) et des différentes notes d'information qui leur sont consacrées et qui sont recensées dans la bibliographie.

Évaluation	Enjeux	Population évaluée
Évaluations nationales diagnostiques à l'entrée en CE2 et en $6^{ème}$ (1989-2008).	« Aider les enseignants à mieux identifier les lacunes de leurs élèves dans les apprentissages de base : lecture, écriture, mathématiques »	Ensemble des élèves entrant en $6^{ème}$ ou en CE2
Évaluations en CE1 et en CM2 (2009-2013)		*Ensemble des élèves entrant en CM2 ou en CE1*
Compétence de base en fin d'école *(et en fin de collège)* annuel depuis 2007 - indicateur de résultats pour la LOLF	La définition des compétences de base est relative aux programmes, avec la visée d'évaluer la maîtrise du socle. Un seuil (niveau d'exigence) a été ensuite fixé après analyse des résultats : la définition des compétences de base n'est donc pas fixée *a priori* (durant la passation) mais après analyse des résultats de l'expérimentation.	Échantillon d'élèves de CM2 (passation en mars)
Bilan CEDRE (Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon) 2008 - 2014	Rendre compte des résultats du système éducatif en établissant les différents niveaux de compétence atteints par les élèves au regard des objectifs fixés par les programmes.	Échantillon d'élèves de CM2 (passation en mai)
LEC (lire, écrire, compter) 1987-1997 -2007-	Observer l'évolution des acquis des élèves de fin de CM2 à vingt ans d'intervalle	Échantillon d'élèves de CM2
TIMSS : Trends in International Mathematics and Science Study 1995 - 2015	Évaluer les élèves en mathématiques et donner des éléments de comparaisons entre les différents systèmes éducatifs.	Échantillon d'élèves de CM1

Le dispositif PACEM (Chesné, 2014) bien qu'il fournisse des indicateurs « locaux » sur les connaissances des élèves en fin d'école ne figure pas dans cette liste puisqu'il n'a pas le même enjeu. Il ne s'agit pas uniquement d'évaluer les connaissances pour dresser un diagnostic, mais aussi d'exploiter les résultats des élèves dans le cadre d'une formation d'enseignants.

ANNEXE 2 : DÉFINITION DU DOMAINE « NUMÉRATION ET ARITHMÉTIQUE » DES ENTIERS

Évaluation	Enjeux	Définition du domaine numérique évalué (pour les nombres entiers uniquement)
Compétence de base en fin d'école *(et en fin de collège)* depuis 2006	La définition des compétences de base est relative aux programmes, avec la visée d'évaluer la maîtrise du socle. Un seuil (niveau d'exigence) a été ensuite fixé après analyse des résultats : la définition des compétences de base n'est donc pas fixée *a priori* (durant la passation) mais après analyse des résultats de l'expérimentation.	90 % des élèves sont capables de : Passer d'une écriture en lettres à une écriture en chiffres et inversement. Comparer, additionner ou soustraire des nombres entiers naturels. Reconnaître le double ou la moitié d'un nombre entier « familier ». *Résoudre des problèmes simples relevant de l'addition et de la soustraction.*
Évaluation CEDRE en mathématiques	*Développé dans le cadre de la thèse*	
Comparaison à 20 ans d'intervalle (lire écrire, compter reprise en 2007 d'une évaluation produite en 1987).	Cette reprise permet de mesurer l'évolution des acquis des élèves de fin de CM2 à vingt ans d'intervalle (comparaison longitudinale à partir de panel d'élèves)	33 items pour le calcul (opérations et petits problèmes) repris à l'identique en 2007 (mis à part des problèmes sur la division de décimaux, hors programmes).
TIMSS	*Précisé en annexe 6 et développé dans le chapitre 4*	
Évaluations diagnostiques à l'entrée en CE2 et en 6ème (1989-2008). *Les évaluations en CE1 et en CM2 qui ont suivi ont été pilotées par la DGESCO.*		*Ces évaluations ne se veulent pas exhaustives sur un domaine donné et des conclusions générales ne pourraient en être tirées ; comme l'indique Chesné (2012), les résultats à certains items de calcul peuvent cependant être exploités localement.*

ANNEXE 3 : ÉLÉMENTS MÉTHODOLOGIQUES RELATIFS AUX ÉVALUATIONS EXTERNES SUR ÉCHANTILLON (CEDRE)

Principe des cahiers tournants, objectifs de l'évaluation et construction de l'échelle de performance

Méthodologie

Le CEDRE

Le cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon (CEDRE) établit des bilans nationaux des acquis des élèves en fin d'école et en fin de collège. Il couvre les compétences des élèves dans la plupart des domaines disciplinaires en référence aux programmes. La présentation des résultats permet de situer les performances des élèves sur des échelles de niveau allant de la maîtrise pratiquement complète de ces compétences à une maîtrise bien moins assurée, voire très faible, de celles-ci. Renouvelées tous les six ans, ces évaluations permettront de répondre à la question de l'évolution du « niveau des élèves » au fil du temps.

Le calendrier des évaluations-bilans

2003 : compréhension écrite et orale (publiée)
2004 : langues étrangères (publiée)
2005 : attitudes à l'égard de la vie en société (publiée)
2006 : histoire-géographie (publiée)
2007 : sciences (en cours de publication)
2008 : mathématiques (en cours de publication)
2009 : reprise du cycle compréhension écrite et orale

L'échantillon

Un échantillon représentatif des collèges et des élèves inscrits en troisième générale (4 381 élèves répartis dans 163 collèges) a été constitué au niveau national (établissements publics ou privés sous contrat de France métropolitaine). Cet échantillon a été tiré dans la base centrale des établissements de 2007-2008.

Au sein de chaque établissement, l'échantillon est constitué d'une trentaine d'élèves choisis aléatoirement. Le tirage a été stratifié selon la taille des collèges et le type d'établissement fréquenté.

Format des questions

En raison de contraintes techniques fortes, la majorité des questions posées sont du format « questions à choix multiples » (QCM) et seule une petite proportion (près de 10 %) est d'un format ouvert. Les QCM ont été saisies de manière automatisée et les questions ouvertes ont été corrigées par des experts via une interface Internet. L'ensemble de ces questions a été élaboré à partir des réponses que les élèves ont fournies lors d'une expérimentation réalisée en mai 2007.

Les cahiers tournants

Si chaque élève avait dû passer l'ensemble des situations proposées, huit heures d'évaluation par élève auraient été nécessaires. Pour limiter la passation à deux heures pour chaque élève, les situations d'évaluation des compétences ont été réparties en neuf « blocs » agencés ensuite dans douze cahiers différents. Ce dispositif permet d'estimer la probabilité de réussite de chaque élève à chaque item sans que chaque élève ait passé l'ensemble des items.

La construction de l'échelle de performances

L'échelle de performances a été élaborée en utilisant des modèles statistiques particuliers (modèles de réponse à l'item). Le score moyen correspondant à la performance moyenne des élèves de l'échantillon a été fixé, par construction, à 250 et l'écart-type à 50. L'échelle n'a aucune valeur normative, la moyenne de 250 ne constitue en rien un seuil qui correspondrait à des compétences minimales à atteindre. Par analogie avec ce qui a déjà été fait pour d'autres évaluations-bilans, la partie la plus basse de l'échelle est constituée des scores obtenus par les 15 % d'élèves ayant les résultats les plus faibles. À l'opposé, la partie supérieure, constituée des scores les plus élevés, rassemble 10 % des élèves. Entre ces deux niveaux, l'échelle a été scindée en trois parties d'amplitude de scores égale correspondant à trois groupes intermédiaires.

Dans la théorie du modèle de réponse à l'item, les scores des élèves et la difficulté des items sont mesurés sur une même échelle, ce qui permet d'établir une correspondance entre les groupes d'élèves et les items répartis en ensembles de difficulté croissante.

On soulignera que les compétences évaluées en fin d'école et en fin de collège sont différentes, aucun élément commun ne permet de rapprocher les deux évaluations, il n'est donc pas légitime de comparer cette échelle avec celle de l'école.

Extrait de Brun & Huguet (2008)

Définition des 5 compétences (extrait de Lescure & Pastor 2012)

- **identifier des notions** : reconnaître des notions mathématiques et choisir un résultat

- **exécuter un calcul** : calculer mentalement et écrire le résultat

- **traiter des données** : analyser des données mathématiques et choisir un résultat

- **produire en autonomie** : analyser des données, réaliser un calcul, résoudre un problème, exécuter un tracé, rédiger une réponse.

- **contrôler valider** : juger ou vérifier une réponse.

Une précision est ensuite apportée relativement à la différence entre les compétences « traiter » et « produire », qui, d'après les auteurs, ne diffèrent pas uniquement selon la façon d'exprimer le résultat, mais qui varient aussi selon « une différence au niveau de la mémoire mise en jeu », c'est-à-dire que :

- pour traiter : « les élèves peuvent faire appel à une mémoire de rappel. Ils ont sous les yeux le résultat parmi les propositions soumises à leur examen. Le traitement peut être fait, voire refait pour être confronté aux propositions » ;

- pour produire : « les élèves doivent faire appel à leur connaissances, ils n'ont aucune aide sous les yeux ».

<u>Répartition des items en 2008 selon les compétences identifiées dans le cadre et les 6 domaines</u>

	Exploitation de données numériques	**Connaissances des nombres entiers naturels**	**Fractions et nombres décimaux**	**Calcul**	**Espace et géométrie**	**Grandeurs et mesures**	***Total***
Identifier	1	12	5	11	27	11	67
Exécuter				25			25
Traiter	48	39	25	40	3	20	175
Produire	11	13	18	48	15	5	110
Contrôler-valider	1			4	2	1	8
Total	61	64	48	128	47	37	385

Extrait de Lescure & Pastor (2012, p.60)

ANNEXE 4 : MÉTHODOLOGIE RELATIVE À LA DÉTERMINATION DU SEUIL DE MAÎTRISE DES COMPÉTENCES DE BASE

Extrait de Rocher & al. (2008, p.34)

Deux méthodes pour déterminer le seuil de maîtrise des compétences de base

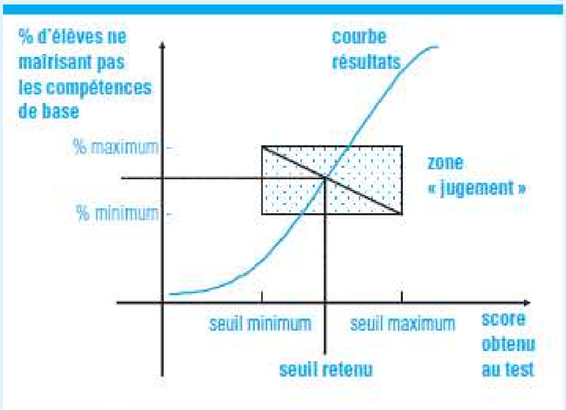
– Première méthode

Pour chaque discipline – français et mathématiques – et pour chaque niveau – CM2 et troisième – les experts ont répondu à la question suivante : *« Sur la base de votre expérience professionnelle, quels sont, selon vous, le pourcentage minimum et le pourcentage maximum d'élèves ne maîtrisant pas les compétences de base ? »* (Le point de vue adopté est celui de la non-maîtrise des compétences de base, plutôt que de la maîtrise ; ce point de vue s'avère plus révélateur pour identifier un seuil).

Il leur a été demandé ensuite de déterminer quel est le score – en termes de nombre de bonnes réponses – en deçà duquel les élèves peuvent être considérés comme ne maîtrisant pas les compétences de base. Plus précisément, il leur a été demandé de déterminer un score minimal acceptable correspondant à une notation « large » et un score maximal acceptable correspondant à une notation « sévère ». Un score acceptable leur a été présenté de la manière suivante : *« un score qui correspond à votre propre perception et qui vous semble légitime du point de vue de ce que l'institution scolaire peut attendre d'un élève. »*

Les experts ont travaillé à partir des items du test en suivant cette consigne : *« La borne inférieure relève d'un niveau d'exigence minimal. En pratique, il s'agit de déterminer les questions fondamentales qui doivent absolument être réussies.* A contrario, *la borne supérieure renvoie à l'idée que les élèves devraient réussir toutes les questions posées, si on s'en tenait à une vision rigide des compétences de base. En pratique, pour déterminer cette borne supérieure, il s'agit simplement d'éliminer certaines questions qui ne semblent pas relever* stricto sensu *des compétences de base. »*

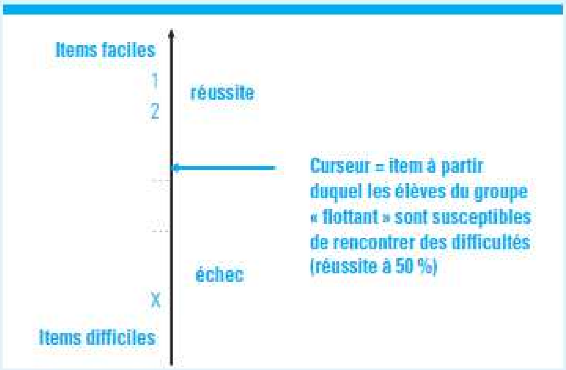
À chaque expert correspond alors une zone de jugement *(cf. figure ci-dessous)*. Cette zone témoigne à la fois des attentes et du niveau d'exigence de chaque expert. À partir des données issues de l'expérimentation, il est possible de calculer pour chaque score le pourcentage d'élèves situés en deçà de ce score et de tracer la courbe correspondante. Le point d'intersection entre cette courbe et la diagonale de la zone de jugement fournit le score-seuil retenu.



Source : MEN-DEPP

– Deuxième méthode

L'objectif final est de produire un pourcentage d'élèves qui maîtrisent les compétences de base. Ainsi, de fait, deux groupes d'élèves sont distingués : ceux qui maîtrisent et ceux qui ne maîtrisent pas ces compétences. Évidemment, la réalité n'est pas aussi tranchée et les groupes ne sont pas aussi clairement distincts l'un de l'autre. Certains élèves sont susceptibles d'être classés dans l'un ou l'autre des deux groupes selon des paramètres extérieurs comme par exemple la fatigue, l'environnement, les conditions de passation, etc. Ces élèves forment un groupe dit *« flottant »*.



Source : MEN-DEPP

Dès lors, il s'agit de repérer un niveau de difficulté d'items permettant de caractériser le mieux ce groupe d'élèves « flottant ». C'est ce niveau de difficulté qui nous permettra de fixer le seuil de maîtrise des compétences de base.

À partir des résultats issus de l'expérimentation, les items ont été classés par champ et par difficulté croissante. Les items du début de chaque liste ont été les mieux réussis lors de l'expérimentation et ceux de la fin les moins bien réussis *(cf. figure ci-dessus)*. Pour chaque champ, les élèves du groupe « flottant » sont susceptibles de réussir la majorité des items du début de la liste et d'échouer la majorité des items de la fin de la liste.

Il est important de noter que la liste des items n'était accompagnée d'aucun résultat complémentaire, d'aucun chiffre ou taux de réussite qui aurait pu influencer le choix des experts.

Il a été demandé aux experts de repérer dans la liste fournie la position de l'item à partir duquel peut s'opérer « la bascule », c'est-à-dire à partir duquel les élèves du groupe « flottant » vont commencer à rencontrer des difficultés. Pour permettre une certaine souplesse, il était possible d'indiquer trois items consécutifs plutôt qu'un seul.

Références

La première approche s'inspire de la méthode d'Hofstee (cf. Norcini, 2003) et la seconde de celle d'Angoff (cf. Laveault et Grégoire, 2002).

Laveault, D. et Grégoire, J. (2002). *Introduction aux théories des tests en psychologie et en sciences de l'éducation* (2ème édition). Bruxelles : DeBoeck-Université.

Norcini, J. J. (2003), Setting standards on educational tests, *Medical Education*, 37, 464–469.

Annexe 5 : Éléments du cadre de TIMSS

Les domaines cognitifs sont décrits dans le chapitre 4.

Définition du domaine « nombres » dans TIMSS

Pour TIMSS Grade 4, la compréhension des nombres entiers est la base des mathématiques à l'école primaire (traduction du cadre) ; ainsi, 50 % des items relèvent du domaine « Nombres » incluant les nombres entiers (mais aussi les fractions et les décimaux, les patterns et expressions numériques avec des nombres entiers (type égalité à trous). Le contenu repose principalement sur : « la compréhension de la valeur positionnelle (place value), des différentes façons de représenter un nombre et des relations entre les nombres » (traduction du cadre).

Connaissances évaluées sur les nombres entiers :

1. Demonstrate knowledge of place value, including recognizing and writing numbers in expanded form and representing whole numbers using words, diagrams, or symbols.

2. Compare and order whole numbers.

3. Compute with whole numbers (+, −, ×, ÷) and estimate such computations by approximating the numbers involved.

4. Recognize multiples and factors of numbers.

5. Solve problems, including those set in real life contexts and those involving measurements, money, and simple proportions.

"Number sentences"

1. Find the missing number or operation in a number sentence (e.g., 17 + ■= 29).

2. Model simple situations involving unknowns with expressions or number sentences.

ANNEXE 6 : LES DIFFÉRENTS FORMATS D'ITEMS

D'après la typologie de Laveault & Grégoire(2014), deux grands types de format de questions existent : les questions ouvertes, pour lesquelles l'élève doit produire une réponse et les questions ouvertes, pour lesquelles l'élève doit faire un choix.

Parmi les questions ouvertes, on peut discerner :

- les *questions à réponse ouverte courte (QROC)* ou questions à réponse brève : il peut s'agir de questions dont la réponse est un nombre (un résultat d'une opération par exemple), un nombre avec une unité (comme dans la résolution de problèmes), un mot... Lorsque les réponses des élèves sont traitées automatiquement (pas de correction experte), l'évaluateur peut limiter le nombre de caractères de la réponse, par exemple en utilisant un peigne (exemple 1) ou en indiquant (exemple 2), qu'un point doit être remplacé par un chiffre ; nous reprenons, pour ces questions la dénomination de Laveault & Grégoire (2014) et les qualifions de *questions ouverte à réponse contrainte (QORC).*

Le nombre composé de 15 dizaines et 23 unités s'écrit : ⎣ ⎣ ⎣ ⎦	86.8 + 1.7. ——— ..613	La somme de 48 et de 96 est égale à : ☐
Exemple 1 : peigne	**Exemple 2**	**Exemple 3**

En revanche, nous réservons la dénomination QROC pour les questions dans lesquelles une zone d'écriture est réservée pour la réponse, même si implicitement, la taille de la zone de réponse donne des indications à l'élève sur la taille de la réponse qu'il doit produire, notamment si c'est un nombre (exemple 3).

- les *questions à réponse narrative ou à développement (QRN) :* elles correspondent à la question ouverte « standard », c'est-à-dire celle où l'élève doit produire une réponse en écrivant son raisonnement (les calculs, les différentes étapes du raisonnement...).

Si les QRN, permettent d'avoir des traces plus importantes de l'activité de l'élève, les QROC comme les questions fermées, ont l'avantage de pouvoir être corrigées de façon automatique : les réponses produites peuvent être enregistrées puis traitées par comparaison avec la réponse correcte attendue (comme dans CEDRE) ou avec un ensemble de classes de réponses anticipées (comme c'est le cas dans Pépite).

Trois types de questions fermées peuvent être proposés : les *questions à choix multiple (QCM),* les questions *« Vrai-Faux » (VF)* et les *questions d'appariement (QA)*. Nous présentons d'abord de façon détaillée les QCM, puis les VF et les QA, qui peuvent être considérées comme des formes dérivées des QCM.

Nous reprenons la définition[1] de Leclercq (1986, p 15) et qualifions de QCM « une question à laquelle [l'élève] répond en opérant une sélection (au moins) parmi plusieurs solutions proposées, chacune

[1] Nous adaptons la définition de Leclercq à notre questionnement en remplaçant le terme d'*étudiant*, figurant dans la définition initiale, par celui d'*élève*.

étant jugée (par le constructeur de l'épreuve [...]) comme correcte ou incorrecte indépendamment de [l'élève] qui doit y répondre »[2].

Trois parties composent une QCM :

- les consignes dans lesquelles sont précisées le nombre de bonnes réponses, le barème de correction, et la modalité de réponse (cocher ou entourer la bonne réponse par exemple),
- une amorce dans laquelle le problème est présenté (la présentation de la situation et la question que l'on pose à l'élève),
- des choix de réponses dans lesquels figurent la (ou les) bonne(s) réponse(s), ainsi que des réponses fausses, qui sont qualifiées de distracteurs (ou de leurres).

Selon les QCM, une ou plusieurs réponses sont correctes, ce qui n'est pas sans incidence, comme nous le verrons par la suite, sur l'activité de l'élève et les stratégies qu'il doit employer pour répondre ; par conséquent, nous discernons les *QCM à réponse unique*, et *les QCM à réponse multiple*.

Les questions « Vrai-Faux » (ou oui-non, correct-incorrect...) correspondent au format QCM, mais avec seulement deux choix de réponse possibles. Enfin, les questions d'appariement sont considérées comme une forme dérivée des QCM, l'élève devant associer des éléments de l'amorce à des réponses figurant parmi une liste proposées. Chaque élément de l'amorce peut avoir un élément correspondant parmi la liste des réponses proposées (correspondance biunivoque), mais le nombre de réponses proposées peut être supérieur au nombre d'éléments de l'amorce (forme asymétrique par excès de solutions, comme dans l'exemple ci-dessous), ou inférieur (forme asymétrique par défaut de solutions) ; Leclercq (1986, p. 69) et Laveault & Grégoire (2014, p. 43) déconseillent le format de question à correspondance univoque puisque pour trouver la réponse à *n* propositions, il suffit d'en connaître *n -1* (ce qui n'est pas le cas dans les deux autres types de formats).

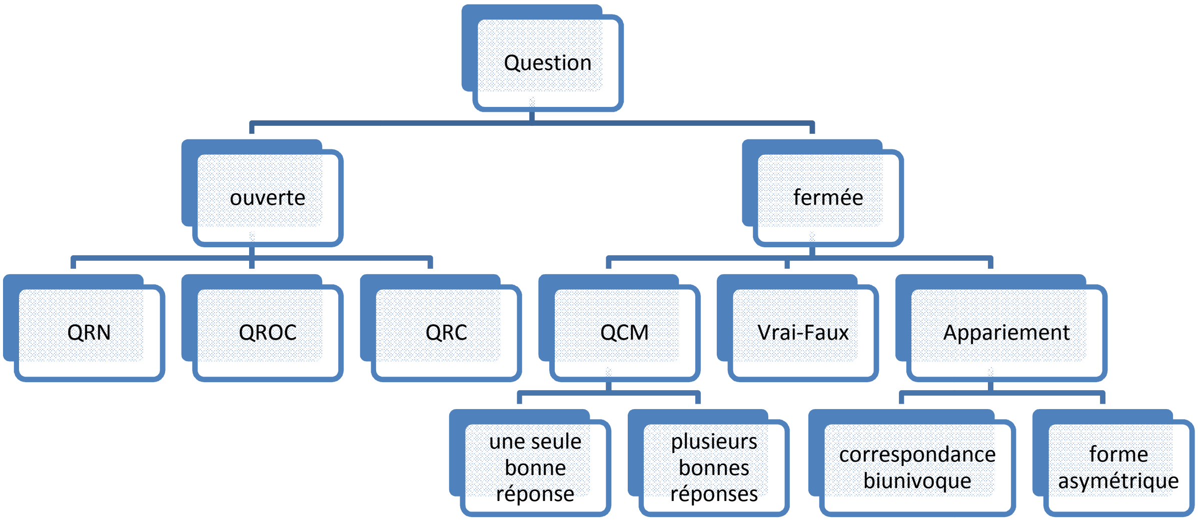
Exemple de question d'appariement - forme asymétrique par excès de solutions

Associe une écriture de droite à une écriture de gauche :

A. 3 unités et 15 dizaines	e. 163
B. 13 dizaines et 3 unités	f. 145
C. 13 unités et 15 dizaines	g. 153
D. 13 dizaines et 15 unités	h. 133
	i. 315

Parce qu'elles apparaissent peu dans le domaine numérique en fin d'école, nous avons choisi d'écarter de cette classification les *questions ouvertes de performance* répertoriées par Grégoire & Laveault (2014, p. 33), qui font intervenir à un degré moindre le langage et dans lesquelles on demande à l'élève de « réaliser une action où le langage peut être complètement absent » (construire un puzzle, jouer un morceau de musique...). Par conséquent, pour notre travail, nous retenons la typologie suivante, inspirée de Leclercq (1986, p. 20) :

[2] Par conséquent, les questions d'opinion ou celles demandant par exemple à un élève son sexe ou son âge avec une liste de choix, ne sont pas considérées comme des QCM.


Question
ouverte
fermée
QRN
QROC
QRC
QCM
Vrai-Faux
Appariement
une seule bonne réponse
plusieurs bonnes réponses
correspondance biunivoque
forme asymétrique

ANNEXE 7 - ÉCHELLE DES SCORES CEDRE 2008 ET 2014

A - Description de l'échelle CEDRE 2008

% Population	Échelle de performance en mathématiques de 60 à 433 points
Groupe 5 10,0 %	60 — 315 — 433 Ces élèves ont acquis une certaine expertise dans les différents domaines mathématiques. Ils font aisément les relations entre les nombres entiers et décimaux et ils savent utiliser les écritures décimales ou fractionnaires. Ils maîtrisent parfaitement les quatre opérations et le calcul mental. Ils ont des compétences leur permettant d'adapter leurs stratégies quelles que soient les situations rencontrées. Les élèves de ce groupe ont une capacité d'abstraction qui leur permet de résoudre des problèmes complexes y compris ceux qui ont trait à la proportionnalité.
Groupe 4 17,9 %	60 — 277 — 315 — 433 Ces élèves ont une représentation spatiale performante et ils ont une maîtrise du lexique de géométrie. Ils produisent des tracés exacts et précis. Ils savent résoudre des problèmes d'aire quelle que soit l'unité proposée. Ces élèves maîtrisent la numération des entiers et des décimaux. Ils font le lien entre fraction décimale, nombre décimal et nombre entier. Ils sont capables d'évaluer l'ordre de grandeur d'un résultat. En calcul réfléchi, ces élèves mettent en œuvre des procédures complexes. Ils maîtrisent les quatre opérations sur les entiers et les décimaux et savent effectuer des divisions avec deux chiffres au diviseur. Ces élèves sont capables de faire un traitement fin des informations en faisant notamment des inférences. Ils peuvent représenter graphiquement une situation à partir d'un énoncé. Les élèves de ce groupe ont la capacité d'anticiper un résultat, de mettre en oeuvre des stratégies pour résoudre en autonomie une grande variété de problèmes.
Groupe 3 30,7 %	60 — 239 — 277 — 433 Ces élèves reconnaissent et utilisent les propriétés géométriques des figures usuelles mais ils rencontrent des difficultés pour les tracer. Ils ont une bonne connaissance du vocabulaire de la géométrie. Dans le domaine de la mesure, ils maîtrisent davantage la notion de périmètre que la notion d'aire. Ces élèves ont des connaissances sur les nombres entiers et décimaux mais ils ne font pas encore le lien entre ces deux ensembles de nombres. Ils sont capables de reconnaître les fractions supérieures au nombre 1. Ces élèves maîtrisent les quatre opérations sur les entiers et les décimaux avec un chiffre au diviseur pour la division. Ils ont des connaissances relatives aux structures additives et multiplicatives : traitement du langage spécifique, représentation mentale des opérations et connaissances de leurs propriétés. Ces élèves savent résoudre des problèmes comportant deux étapes. Leurs compétences sont opérationnelles y compris dans des situations nouvelles. A partir de ce groupe, les mots prennent un sens mathématique.
Groupe 2 26,4 %	60 — 200 — 239 — 433 Ces élèves sont capables d'identifier des figures géométriques de base et des axes de symétrie uniquement si leur présentation est stéréotypée. Ces élèves traitent les décimaux en dissociant les parties entière et décimale sans en percevoir le sens mathématique. Ils identifient certaines représentations graphiques des fractions. Ils sont capables de mobiliser des procédures simples de calcul réfléchi. Ces élèves ont des automatismes qu'ils mettent en œuvre pour effectuer des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions à un chiffre, seulement sur les entiers. Ils savent utiliser une calculatrice. Ils réussissent des problèmes additifs ou soustractifs ne comportant pas d'étape intermédiaire. Les élèves de ce groupe ont des savoirs qu'ils utilisent de « façon mécanique ». Ils ont des difficultés à utiliser leurs connaissances dans des situations nouvelles.
Groupe 1 11,8 %	60 — 162 — 200 — 433 Ces élèves ont une reconnaissance perceptive de figures géométriques ce qui limite leurs performances à des situations prototypiques. Leurs connaissances en numération se restreignent aux nombres entiers lorsque l'oral permet d'identifier facilement les classes (millions, milliers). Ils savent effectuer des additions mais ils rencontrent des difficultés pour la soustraction et la multiplication qui comportent des retenues. Ils savent résoudre des problèmes uniquement lorsque les données langagières et numériques sont très simples. Les élèves de ce groupe ont beaucoup de mal à transférer leurs compétences hors d'un cadre connu. Ils éprouvent des difficultés à traiter des données et à produire des réponses d'une façon autonome.
Groupe 0 3,2 %	60 — 162 — 433 Ces élèves ne maîtrisent aucune des compétences ou des connaissances exigibles en fin d'école primaire. Cependant, ils se montrent capables de répondre ponctuellement à quelques items simples.

Lecture : la barre horizontale symbolise l'étendue croissante de la maîtrise des compétences du groupe 0 au groupe 5. Les élèves du groupe 2 représentent 26,4 % des élèves. Ils sont capables de réaliser les tâches des groupes 0, 1 et 2. Ils ont une probabilité faible de réussir les tâches spécifiques aux groupes 3, 4 et 5. L'élève le plus faible du groupe 2 a un score de 200, le score du plus fort est 239.

B - Description de l'échelle CEDRE 2014

4 – Échelle de performances en mathématiques en 2014

% Population	
Groupe 5 10,2 %	Ces élèves manient habilement les concepts mathématiques de fin d'école primaire. Cela leur permet de prendre du recul dans les situations nouvelles proposées, de gérer une masse d'information plus grande, de sélectionner les éléments utiles de ceux accessoires, d'imaginer des solutions et de produire un travail en autonomie. Quelques items leur résistent : il s'agit d'items dont les notions seront revues ultérieurement au collège (formules de solides ou calcul de vitesse moyenne). Ces élèves font preuve d'expertise dans les compétences et connaissances de fin d'école primaire, ils maîtrisent tous les champs du programme et font preuve de capacité d'abstraction, de rigueur et de précision. Ces élèves ont acquis l'ensemble des connaissances et des compétences exigibles en fin d'école primaire. **Jalons** : *Connaissances et utilisation des nombres décimaux et des fractions - Maîtrise des quatre opérations - Réussite aux problèmes ayant trait à la proportionnalité sans passage par l'unité - Construction de la hauteur d'un triangle - Production de réponses argumentées en autonomie - Tout type de conversions*
316	
Groupe 4 18,8 %	Ces élèves sont capables de faire un traitement fin de l'information, de réussir des problèmes utilisant la proportionnalité lorsque les mesures de longueur sont explicites, et lorsque la relation additive est évidente. Ils sont capables de mettre en œuvre des stratégies évoluées, de résoudre des problèmes complexes et de produire des réponses en autonomie pour des situations peu fréquentes en classe. Ces élèves ont acquis la majeure partie des connaissances et des compétences exigibles en fin d'école. **Jalons** : *Connaissance et utilisation des nombres décimaux et des fractions - Maîtrise des quatre opérations - Réussite aux problèmes ayant trait à la proportionnalité sans passage par l'unité - Construction de la hauteur d'un triangle - Production de réponses argumentées en autonomie - Tout type de conversions*
277	
Groupe 3 28,6 %	Ces élèves ont une connaissance solide des nombres entiers et une première connaissance stable des nombres décimaux. Ils ont une pratique du calcul avec les quatre opérations et manient des notions comme le double et la moitié d'un nombre, le tiers d'un entier et le multiple de trois. S'ils sont capables de résoudre des problèmes de proportionnalité qui ne mettent pas en jeu des unités spécifiques, leurs acquis restent fragiles lorsqu'il s'agit de produire en autonomie une réponse. Ils font preuve d'une première culture mathématique et d'une bonne connaissance du vocabulaire spécifique en géométrie. Ces élèves maîtrisent une grande partie des connaissances et des compétences exigibles à la fin de l'école. **Jalons** : *Relations arithmétiques entre les nombres d'usage courant : double, moitié - Nombres décimaux : écritures chiffrées, valeur des chiffres en fonction de leur position - Additions des décimaux - Résoudre les problèmes de partage - Convertir des mètres en kilomètres - Construire une figure symétrique dans le cas d'un axe oblique*
237	
Groupe 2 26,1 %	Ces élèves ont des connaissances sur les nombres entiers qui leur permettent de réussir un certain nombre de problèmes de type additif voire soustractif sans étape intermédiaire. Ils complètent une suite de nombres décimaux au dixième avec le passage à l'unité supérieure. Ils sont capables d'identifier des droites perpendiculaires. La réussite à quelques items éloignés des pratiques scolaires montre les premiers signes de transfert de compétences et l'adoption d'une stratégie pour résoudre une situation nouvelle. Ils traitent l'information et sont capables de retrouver un résultat correct mais ils échouent quand il s'agit de produire une réponse en autonomie. **Jalons** : *Connaissance du système de numération des nombres entiers - Soustractions à retenues - Perpendicularité et parallélisme de deux droites - Identification du triangle rectangle et des faces d'un cube à partir d'un patron en croix*
198	
Groupe 1 12,6 %	Ces élèves ont des connaissances des nombres qui leur permettent la mise en œuvre d'opérations (additions et soustractions), néanmoins l'utilisation des retenues dans la soustraction n'est pas acquise. La construction du nombre en classes n'est pas solide, ils maîtrisent la « comptine » des nombres mais ils ont des difficultés en dehors de l'ordre croissant. Les réussites observées s'appuient essentiellement sur des automatismes scolaires. Certains de ces mécanismes leur permettent de réussir des problèmes additifs directs qui ne nécessitent qu'une seule étape pour leur résolution. Ils sont capables de mettre en œuvre des instruments de mesure pour comparer des segments. Ils maîtrisent la lecture de l'heure. **Jalons** : *Additions avec retenue(s) - Soustractions sans retenue - Énumération d'une suite de nombres, ordre croissant. - Lecture de l'heure*
159	
Groupe < 1 3,7 %	Ces élèves peuvent répondre ponctuellement à quelques items simples. Les réussites observées se fondent essentiellement sur des situations ayant trait à la vie courante – « estimer la taille d'objets usuels » –, à des pratiques scolaires ancrées – « repérer si une figure est symétrique par rapport à un axe vertical » –, donner une réponse par lecture directe – « lecture d'un nombre sur une règle graduée ». Ils maîtrisent très peu de compétences ou de connaissances exigibles en fin d'école primaire. **Jalons** : *Lecture de nombres sur la règle graduée - Additions sans retenue - Identification de deux droites parallèles isolées*

Lecture : les élèves du groupe 2 représentent 26,1 % des élèves. Ils sont capables de réaliser les tâches des groupes < 1, 1 et 2. L'élève le plus faible du groupe 2 a un score de 198, le score du plus fort est 237.
Champ : élèves de CM2 des écoles publiques et privées sous contrat de France métropolitaine. *Source : MENESR-DEPP.*

Annexes du chapitre 2

ANNEXE 1 : TABLEAUX DE PROGRESSION POUR L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE ET SOCLE COMMUN DE CONNAISSANCES ET DE COMPÉTENCES

Extraits des programmes de 2008.

Tableau de progression pour le cycle 2

Cours préparatoire	Cours élémentaire première année
- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100. - Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 20 ("table d'addition"). - Comparer, ranger, encadrer ces nombres. - Écrire une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant. - Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres pairs inférieurs à 20. - Connaître la table de multiplication par 2. - Calculer mentalement des sommes et des différences. - Calculer en ligne des sommes, des différences, des opérations à trous. - Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et commencer à utiliser celles de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 100). - Résoudre des problèmes simples à une opération.	- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000. - Repérer et placer ces nombres sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer. - Écrire ou dire des suites de nombres de 10 en 10, de 100 en 100, etc. - Connaître les doubles et moitiés de nombres d'usage courant. - Mémoriser les tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5. - Connaître et utiliser des procédures de calcul mental pour calculer des sommes, des différences et des produits. - Calculer en ligne des suites d'opérations. - Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 1 000). - Connaître une technique opératoire de la multiplication et l'utiliser pour effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre. - Diviser par 2 ou 5 des nombres inférieurs à 100 (quotient exact entier). - Résoudre des problèmes relevant de l'addition, de la soustraction et de la multiplication. - Approcher la division de deux nombres entiers à partir d'un problème de partage ou de groupements. - Utiliser les fonctions de base de la calculatrice.

Tableau de progression pour le cycle 3 : Nombres et calculs

Uniquement ce qui relève du domaine étudié - en particulier, nous avons écarté les décimaux

Cours élémentaire deuxième année	**Cours moyen première année**	**Cours moyen deuxième année**
Les nombres entiers jusqu'au million - Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au million. - Comparer, ranger, encadrer ces nombres. - Connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié ou demi, triple, quart d'un nombre entier. - Connaître et utiliser certaines relations entre des nombres d'usage courant : entre 5, 10, 25, 50, 100, entre 15, 30 et 60.	**Les nombres entiers jusqu'au milliard** - Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard. - Comparer, ranger, encadrer ces nombres. - La notion de multiple : reconnaître les multiples des nombres d'usage courant : 5, 10, 15, 20, 25, 50.	**Les nombres entiers**
Calcul sur des nombres entiers **Calculer mentalement** - Mémoriser et mobiliser les résultats des tables d'addition et de multiplication. - Calculer mentalement des sommes, des différences, des produits. **Effectuer un calcul posé** - Addition, soustraction et multiplication. - Connaître une technique opératoire de la division et la mettre en œuvre avec un diviseur à un chiffre. - Organiser ses calculs pour trouver un résultat par calcul mental, posé, où à l'aide de la calculatrice. - Utiliser les touches des opérations de la calculatrice. **Problèmes** - Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations.	**Calcul** **Calculer mentalement** - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers. - Multiplier mentalement un nombre entier par 10, 100, 1000. - Estimer mentalement un ordre de grandeur du résultat. **Effectuer un calcul posé** - Addition et soustraction de deux nombres décimaux. - Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. - Division euclidienne de deux entiers. - Connaître quelques fonctionnalités de la calculatrice utiles pour effectuer une suite de calculs. **Problèmes** - Résoudre des problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes.	**Calcul** **Calculer mentalement** - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers. - Diviser un nombre entier par 10, 100, 1 000. **Effectuer un calcul posé** - Addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux. - Division d'un nombre décimal par un nombre entier. - Utiliser sa calculatrice à bon escient. **Problèmes** - Résoudre des problèmes de plus en plus complexes.

ANNEXE 2 : ATTENDUS POUR LE SOCLE COMMUN DE CONNAISSANCES ET DE COMPÉTENCES - COMPÉTENCE 3 (2006)

Extraits des attendus aux paliers 1 et 2 selon le domaine étudié.

PREMIER PALIER POUR LA MAÎTRISE DU SOCLE COMMUN :
COMPÉTENCES ATTENDUES À LA FIN DU CE1

L'élève est capable de :

- écrire, nommer, comparer, ranger les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000 ;

- calculer : addition, soustraction, multiplication ;

- diviser par 2 et par 5 des nombres entiers inférieurs à 100 (dans le cas où le quotient exact est entier) ;
- restituer et utiliser les tables d'addition et de multiplication par 2, 3, 4 et 5 ;

- calculer mentalement en utilisant des additions, des soustractions et des multiplications simples.

DEUXIÈME PALIER POUR LA MAÎTRISE DU SOCLE COMMUN :
COMPÉTENCES ATTENDUES À LA FIN DU CM2

L'élève est capable de :

- écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux (jusqu'au centième) et quelques fractions simples ;

- restituer les tables d'addition et de multiplication de 2 à 9 ;

- utiliser les techniques opératoires des quatre opérations sur les nombres entiers et décimaux (pour la division, le diviseur est un nombre entier) ;

- calculer mentalement en utilisant les quatre opérations ;

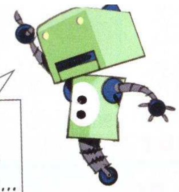
- estimer l'ordre de grandeur d'un résultat ;

- utiliser une calculatrice.

Annexes du chapitre 3

Annexe 1 : Extrait de Dico Maths - CAP MATHS CM2

Pour diviser un nombre entier par un nombre entier



Il faut décomposer le dividende en milliers, centaines, dizaines, unités…

2 739 divisé par 4

1re étape

Tu ne peux pas partager les 2 milliers en 4.
Il faut donc commencer par partager les 27 centaines en 4.

Le quotient n'aura donc que des centaines, des dizaines et des unités.

```
  2 7 3 9 | 4
- 2 4     |-----
  ---     | 6 • •
    3 3   | c d u
```

27 centaines divisées par **4**, cela fait **6 centaines** au quotient, car 6 x 4 = 24.

Par soustraction, il reste 3 centaines, qui avec les 3 dizaines de 2 739 font **33 dizaines**.

2e étape

```
  2 7 3 9 | 4
- 2 4     |-----
  ---     | 6 8 •
    3 3   | c d u
  - 3 2   |
    ---   |
      1 9 |
```

33 dizaines divisées par **4**, cela fait **8 dizaines** au quotient, car 8 x 4 = 32.

Par soustraction, il reste 1 dizaine, qui avec les 9 unités de 2 739 font **19 unités**.

3e étape

```
  2 7 3 9 | 4
- 2 4     |-----
  ---     | 6 8 4
    3 3   | c d u
  - 3 2   |
    ---   |
      1 9 |
    - 1 6 |
      --- |
        3 |
```

19 unités divisées par **4**, cela fait **4 unités** au quotient, car 4 x 4 = 16.

Par soustraction, il reste **3 unités**.

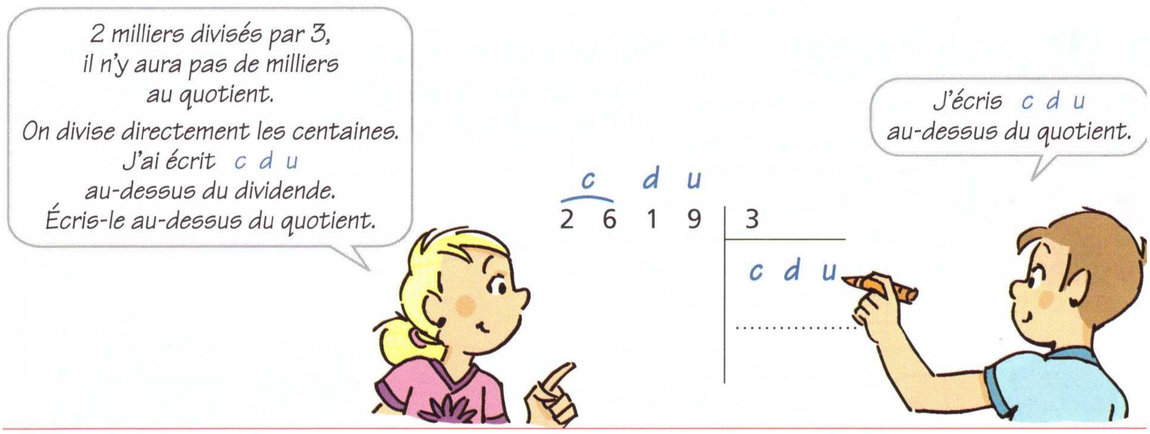
Dans la division de 2 739 par 4, le **quotient** est **684** et le **reste** est **3**.

Vérification : **(684 x 4) + 3 = 2 739**.

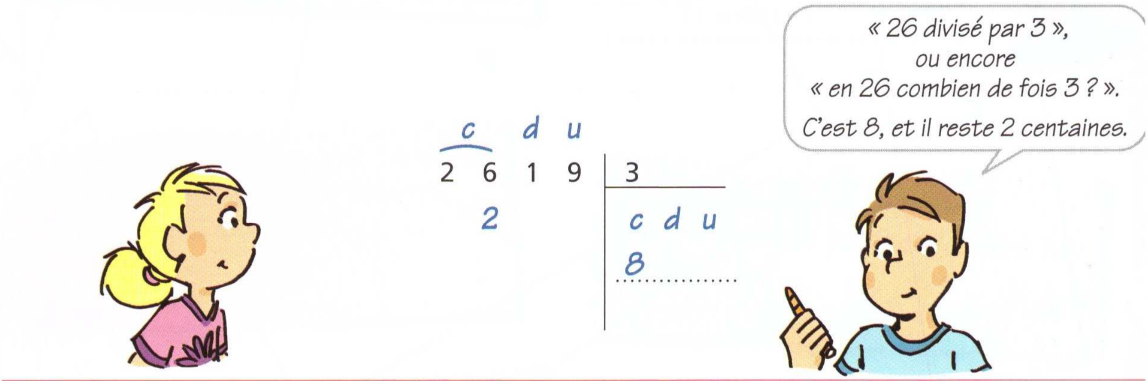
ANNEXE 2 : EXTRAIT DE J'APPRENDS LES MATHS CM2 (P. 38-40 ET 96)

1 a. Pour calculer **2 619 : 3** ?, Mathilde et Mathieu s'imaginent un partage en 3 parts égales.

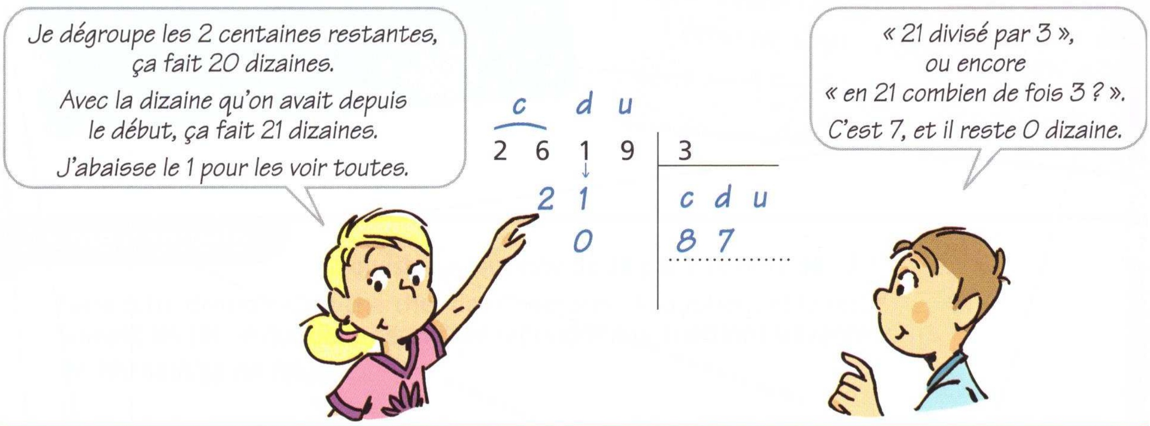
1. Recherche de l'ordre de grandeur du résultat



2. Division des centaines



3. Division des dizaines



b. Effectue la division des unités. Exprime le résultat de cette division et fais la preuve.

2 Calcule. 24 095 : 4 ? 354 259 : 5 ?

Je découvre

1 a. Observe comment Mathilde calcule **213 : 25** ?.

Je cherche « en 213 combien de fois 25 ? ».
C'est facile. 4 fois 25, 100… 8 fois 25, 200.

213 : 25 ? q = … r = … car 213 = …

b. Calcule.

159 : 25 ?	209 : 50 ?	534 : 250 ?	102 : 31 ?
23 : 25 ?	347 : 50 ?	1 735 : 250 ?	29 : 31 ?
261 : 25 ?	47 : 50 ?	1 250 : 250 ?	148 : 31 ?

2 Observe comment Mathilde et Mathieu calculent **4 673 : 768** ?.
Termine leurs calculs.

On cherche « en 4 673 combien de fois 768 ? ».

On fait des essais.
On a essayé directement 5 fois 768.

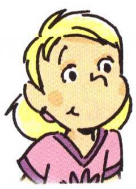
Ce n'est pas assez, on essaie 6 fois 768.

$$\begin{array}{r} 7\ 6\ 8 \\ \times \quad 5 \\ \hline 3\ 8\ 4\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\ 6\ 8 \\ \times \quad 6 \\ \hline 8 \end{array}$$

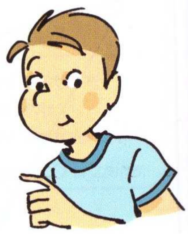
4 673 : 768 ? q = … r = … car 4 673 = …

3 Observe comment Mathilde et Mathieu calculent **437 : 60** ?.

a. Termine leurs calculs.



437 : 60 ?, c'est comme chercher combien de fois il y a 6 dizaines dans 437.
Le quotient est le même que celui de la division : 43 : 6 ?.



437 : 60 ? q = … r = … car 437 = …

b. Calcule comme Mathilde et Mathieu.

163 : 30 ? 438 : 50 ? 454 : 60 ? 512 : 70 ?

J'ai appris

Pour calculer la **division avec reste** du nombre *a* par le nombre *b* :
on peut chercher « en *a* combien de fois *b* ? ».

- Pour 204 : 25 ? … 4 856 : 10 ? … 8 496 : 100 ? etc., c'est facile ;
- pour 151 : 38 ? … 2 946 : 812 ? etc., je fais des essais ;
- pour 274 : 90 ? … 563 : 70 ? etc., j'utilise les tables de multiplication.

Je découvre

1 Observe comment Mathilde et Mathieu calculent la division 24 951 : 43 ?.

24 951 divisé par 43 ou encore en 24 951 combien de fois 43 ? Je fais des essais.

Ça va être long ! Essayons de la calculer par partages successifs.

1 000 fois 43, 43 000. C'est moins.
100 fois 43, 4 300. C'est plus.
500 fois 43, c'est la moitié de 43 000, c'est 21 500. C'est plus.
J'essaie 600 fois 43.

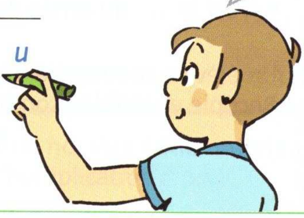
$$\begin{array}{r} 43 \\ \times\ 600 \\ \hline \end{array}$$

1. Préparation de la division :

24 est plus petit que 43. Il n'y aura pas de milliers au quotient. Je calcule 249 centaines divisées par 43. Au quotient, il y aura des centaines.

```
  c   d u
2 4 9 5 1 | 4 3
          |------
          | c d u
```

J'écris c. d. u.

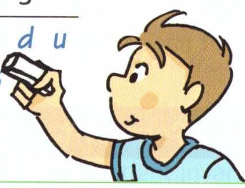


2. Partage des centaines :

Pour s'approcher du quotient, on fait comme si on calculait 249 : 40 ?. On ajustera après si nécessaire.

```
   c   d u
 2 4 9 5 1 | 4 3
-2 5 8     |------
           | c d u
           | 6
```

J'ai calculé 24 : 4 ? et j'ai essayé 6 fois 43. Mais c'est trop grand. Heureusement, j'ai écrit au crayon.



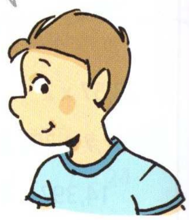
3. Partage des dizaines :

Il y a deux sortes de dizaines à partager : celles qui sont dans les 34 centaines restantes et les 5 qu'on voit depuis le début.

J'abaisse le 5. 345 divisé par 43 ? Je fais comme si on calculait 345 : 40 ?. J'ajusterai après si nécessaire.

```
   c   d u
 2 4 9 5 1 | 4 3
-2 1 5 ↓   |------
   3 4 5   | c d u
           | 5 8
```

J'ai calculé 34 : 4 ? et j'essaie 8 fois 43.



Continue le travail de Mathilde et Mathieu. *N'oublie pas de faire la preuve de la division.*

ANNEXE 3 : EXTRAIT D'EUROMATHS CM2 (p. 52 -54)

Division : valeur d'une part

Objectifs : comparer différentes procédures de calcul dans des situations de recherche de la valeur d'une part. Comprendre que rechercher le nombre de parts ou la valeur d'une part relève des mêmes procédures de calcul.

EXERCICE DIRIGÉ

Seize pirates veulent se partager équitablement 678 pièces d'or identiques.

1 Prévois par le calcul combien de pièces chaque pirate va recevoir.

2 Voici le procédé de Leïla pour résoudre ce problème.

	6 7 8	1 6
16 fois 10 →	− 1 6 0	1 0
	5 1 8	
16 fois 10 →	− 1 6 0	+ 1 0
	3 5 8	
....		

a. Termine son travail en suivant sa technique.

b. Leïla a conclu son travail par la phrase et l'égalité suivantes que tu compléteras :
« Il faut donner … pièces d'or à chaque pirate et il reste … pièces d'or. »
678 = (16 × …) + ….

Chercher le nombre de parts ou la valeur d'une part c'est toujours un problème de division.

DÉCOUVERTE

1 Effectue la division de 2 851 par 12 en cherchant combien de fois 12 est contenu dans 2 851.

2 Voici la méthode de Leïla pour effectuer cette division :

	2 8 5 1	1 2
100 fois 12 →	− 1 2 0 0	1 0 0
	1 6 5 1	
100 fois 12 →	− 1 2 0 0	+ 1 0 0
	4 5 1	
10 fois 12 →	− 1 2 0	+ 1 0
....		

a. Termine le travail de Leïla en suivant sa méthode, puis compare avec ton résultat.

b. Complète l'écriture en ligne de la division : 2 851 = (12 ×…) + …
Quel est le quotient ? Quel est le reste ?

3 Théo dit que l'on peut améliorer la méthode de Leïla en faisant moins de soustractions. Pour cela, on retire le maximum de centaines en une fois, puis le maximum de dizaines.
Réorganise les calculs de Leïla pour y parvenir.

4 Sers-toi du répertoire des multiples de 17 ci-contre pour effectuer la division de 621 par 17, puis la division de 3 456 par 17 à la manière de Théo.

17 × 1	17
17 × 2	34
17 × 3	51
17 × 4	68
17 × 5	85
17 × 6	102
17 × 7	119
17 × 8	136
17 × 9	153

Division des nombres entiers : technique (2)

Objectif : confirmer la maîtrise de la technique de la division des nombres entiers.

DÉCOUVERTE

1 Leïla et Alice ont-elles raison ?

2 Voici le répertoire multiplicatif de 27. Utilise ce répertoire pour calculer le quotient et le reste de la division de 942 par 27.

27 × 1	27
27 × 2	54
27 × 3	81
27 × 4	108
27 × 5	135
27 × 6	162
27 × 7	189
27 × 8	216
27 × 9	243

$$\begin{array}{r|l} 9\ 4\ 2 & 2\ 7 \\ \cline{2-2} & \bullet\ \bullet \\ -\ 8\ 1\ 0 & 3\ 0 \\ \cline{1-1} \ldots\ldots\ldots & \\ -\ \ldots\ldots\ldots & \\ \cline{1-1} \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Complète : 942 = (27 × …) + …

Annexes du chapitre 4

ANNEXE 1 : RECODAGE DE DEUX PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

Nombre total d'élèves : 1168 élèves

Annexe 1A - Problème 1

Problème 1 : Monsieur Paul achète 9 rosiers à 4 € et 3 sapins à 17 € pièce. Quel est le montant de sa dépense ? »

Non réponse : 59 élèves (5,1 %)

Répartition des productions élèves menant à la réussite:

	Pas de trace de technique	Modèle additif : addition itérée (pas de produit)	Modèle multiplicatif et additif (attendu) : Calcul avec somme et produits	Total
Nombre d'élèves	79	5	589	673
Pourcentage	6,7 %	0,4 %	50,4 %	57,6 %

Répartition des productions élèves menant à l'échec:

			Erreur de calcul		Modèles erronés			
	Pas de trace de technique	Erreur d'inattention	Calcul non abouti	Erreur de calcul	Somme de tous les nombres	Somme de certains nombres	autres	Total
Nombre d'élèves	111	6	17	110	9	153	30	436
Pourcen-tage	9,3 %	0,5 %	1,5 %	9,4 %	0,8 %	13,1 %	2,6 %	37,3 %

Annexe 1B - Problème 2

Problème 2 : « *Monsieur Jacques achète 8 cahiers et 5 stylos. Le prix d'un cahier est de 3€. Le prix d'un stylo est de 2€. Quel est le montant de sa dépense* ? »

Non réponse : 53 élèves (4,5 %)

Répartition des productions élèves menant à la réussite:

	Pas de trace de technique	Modèle additif : addition itérée (pas de produit)	Modèle multiplicatif et additif (attendu) : Calcul avec somme et produits	Total
Nombre d'élèves	176	8	740	924
Pourcentage	15,1 %	0,7 %	63,3 %	79,1 %

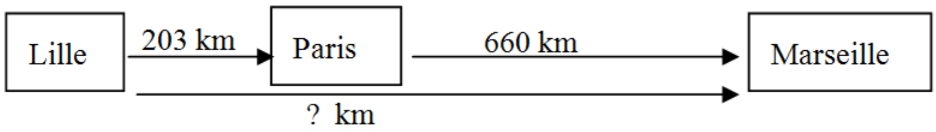
Répartition des productions élèves menant à l'échec:

			Erreur de calcul		Modèles erronés			
	Pas de trace de technique	Erreur d'inattention	Calcul non abouti	Erreur de calcul	Somme de tous les nombres	Sommes de certains nombres	autres	Total
Nombre d'élèves	69	3	6	42	11	25	35	191
Pourcen-tage	6 %	0,2 %	0,5 %	3,6 %	0,9 %	2,1 %	3 %	16,4 %

Annexe 2 : Analyse et score de réussite à trois problèmes additifs

Extraits de CEDRE 2008, posés sous forme ouverte (o) et sous forme de QCM (qcm).

Problème 1



Quelle est la distance entre Lille et Marseille ?

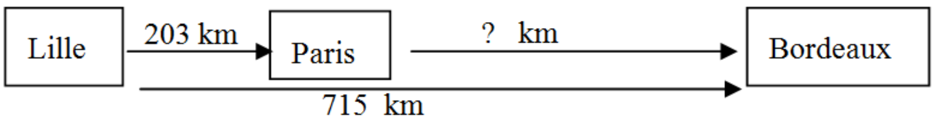
□ 457 km □ 473 km □ 663 km □ 863 km

Scores de réussite

Problème 1o
Réussite: 85,39 %
Autres réponses : 7,52 %
Pas de réponse : 7,09 %

Problème 1qcm
Réponse 1 : 2,78 %
Réponse 2 : 0,82 %
Réponse 3 : 3,75 %
Réponse 4 : 86,67 %
Pas de réponse : 5,83 %

Problème 2



Quelle est la distance entre Paris et Bordeaux ?

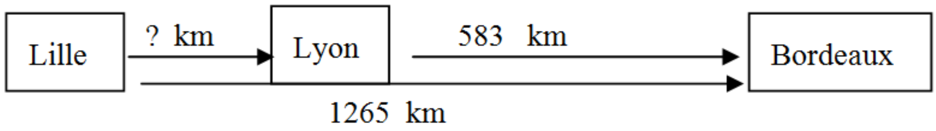
□ 512 km □ 518 km □ 912 km □ 918 km

Scores de réussite

Problème 2o
Réussite: 70,79 %
Autres réponses : 11,51%
Pas de réponse : 17,7 %

Problème 2qcm
Réponse 1 : 68,62 %
Réponse 2 : 10,07 %
Réponse 3 : 3,56 %
Réponse 4 : 10,32 %
Pas de réponse : 7,42 %

Problème 3



Quelle est la distance entre Lille et Lyon ?

□ 682 km □ 1082 km □ 1265 km □ 1848 km

<u>Scores de réussite</u>

<u>Problème 3o</u>

Réussite: 62,8 %

Autres réponses : 17,38 %

Pas de réponse : 19,83 %

<u>Problème 3qcm</u>

Réponse 1 : 72,7 %

Réponse 2 : 7,22 %

Réponse 3 : 3,85 %

Réponse 4 : 8,25 %

Pas de réponse : 7,86 %

ANNEXE 3 : LISTE DES STRATÉGIES DE RÉPONSE AU QCM

Stratégies A : stratégies de savoir :

A1 : l'élève effectue la tâche demandée mentalement ou explicitement puis trouve, parmi les propositions, celle qui correspond à la réponse trouvée ;
A2 : l'élève reconnait d'emblée la « bonne » réponse parmi celles proposées (connaissance intériorisée) ;
A3 : l'élève applique une règle simple intériorisée, correcte ou non (théorème en actes) ;
A4 : l'élève teste les propositions de réponse une à une jusqu'à trouver celle qui convient.

Stratégies B : stratégies de substitution ou de repli :

B1 : l'élève répond au hasard ;
B2 : l'élève passe en revue superficiellement toutes les propositions, puis choisit celle qui lui paraît la plus vraisemblable ;
B3 : l'élève ne sait pas expliquer sa procédure ;
B4 : l'élève combine les nombres en présence de manière à trouver, parmi les choix possibles, une solution.

Stratégies C : stratégies mixtes :

C1 : l'élève commence par s'engager dans une procédure de résolution, mais sans aller jusqu'au bout (à la différence de A1); il utilise ensuite les différentes propositions de réponses pour conclure (en choisissant celle qui lui paraît la plus vraisemblable) ;
C2 : l'élève élimine les propositions qui paraissent fausses, puis déduit de celle(s) qui reste(nt), la bonne réponse.

ANNEXE 4 : PROBLÈMES EXTRAITS DE L'EXPÉRIMENTATION (SAYAC & GRAPIN 2014B)

Problème 1 (QCM)

Une course automobile de 2 879 kilomètres se déroule sur trois jours.

Le premier jour, les concurrents parcourent 745 km. Le deuxième jour, les concurrents parcourent 1 123 km.

Quelle est la distance parcourue le troisième jour ?

□ 1 868 km □ 1 434 km □ 1756 km □ 1 011 km

Problème 1 (ouvert)

Lors des soldes, dans un grand magasin, on a vendu 2 768 vêtements en trois jours.

Le premier jour, 634 vêtements ont été vendus. Le deuxième jour, 1 012 vêtements ont été vendus.

Combien de vêtements ont été vendus le troisième jour ?

Problème 2 (QCM)

Combien faut-il mettre de sucre pour 1 kg de fruits ?

□ 600 g □ 700 g □ 750 g □ 800 g

Problème 2 (ouvert)

Pour faire des gâteaux, un pâtissier mélange 300 g de sucre pour 400 g de farine.

Combien faut-il mettre de sucre pour 1 kg de farine ?

Pour faire une bonne confiture, il faut mettre 300 g de sucre pour 400 g de fruits.

Annexes du chapitre 5

Annexe 1 : Analyse des items des évaluations CEDRE 2008 et 2014

Annexe 2 : Répartition de tâches dans les groupes de l'échelle

ANNEXE 1 : ANALYSE DES ITEMS DES ÉVALUATIONS CEDRE 2008 ET 2014

ANNEXE 1.1 : ANALYSE DES ITEMS DE L'ÉVALUATION CEDRE 2008

Niveaux de convocation des types de tâches : tech (technique) - TCST (t-convoqué sans choix de technique) ; TCAT (t-convoqué avec choix de technique) ; RCST(r-convoqué sans choix de technique) ; RCAT(r-convoqué avec choix de technique)

Registre : LN : langue naturelle

Annexe 1.1.1 : Items de l'évaluation CEDRE 2008 : OMR 1 (Éléments descripteurs -1)

	Groupe échelle	type de tâche	Niveau de convocation	Sous type de tâche	Niveau de convocation	Sous type de tâche	Niveau de convocation	nombre de types de tâches convoqués	techniques attendues	techniques attendues	niveau d'enseignement	registre d'entrée	registre de sortie
T_EDN_02	2	T_{RP_Ass}	technique					1	τ_{RP_calc}		CM1	LN & EC	EA
T_EDN_03	4	T_{RP_Ass}	TCST					2	τ_{RP_calc}		CM1	LN & EC	EA
T_EDN_05	1	$T_{RP\_\times}$	technique	calcul mental	technique			1	τ_{RP_calc}	calcul mental	CE1	LN&EC	EC
T_EDN_06	3	$T_{RP\_\times}$	technique	calcul mental	technique			1	τ_{RP_calc}	calcul mental	CE1	LN&EC	EC
T_EDN_11	2	T_{RP_Ass}	technique					1	τ_{RP_calc}		CE1	LN&EC	EA
T_EDN_14	2	T_{RP_Ass}	technique					1	τ_{RP_calc}		CE2	LN&EC	EA

T_EDN_18	2	T_{RP_+}	TCAT	T_{CR_-} ou TCR_ -	TCAT			2	τ_{RP_calc}	τCR_-_add- trou	CE2	LN&EC	EC
T_EDN_17	3	T_{RP_+}	TCAT	T_{CR_-} ou TCR_ +	TCAT			2	τ_{RP_calc}	τCR_-_add- trou τCR_ +_dec- eapdc	CE2	LN&EC	EC
T_EDN_19	3	T_{RP_+}	TCAT	T_{CR_-} ou TCR_ -	TCAT			2	τ_{RP_calc}	τCR_-_add- trou τCR_ +_dec- eapdc	CE2	LN&EC	EC
T_EDN_20	2	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT	T_{CP_+} ou T_{CR_+}		2	τ_{RP_calc}	τ_{CR_+}	CE2	LN&EC	EC
T_EDN_21	3	$T_{RP\_\times}$	technique	T_{RP_+}	TCAT	T_{CR_+}& $T_{CR\_\times}$	technique	3	τ_{RP_calc}	τmultPD & τ_{CR_-}	CE2	LN&EC	EC
T_EDN_22	3	$T_{RP\_\times}$	technique	T_{RP_+}	TCAT	T_{CR_+}& $T_{CR\_\times}$	technique	3	τ_{RP_calc}	τCR_× & τ_{CR_-}	CE2	LN&EC&NP	EC
T_EDN_23	3	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	τ_{RP_calc}	τCR_posé τCR_ +_dec- eapdc	CE2	LN&EC	EC
T_EDN_24	1	T_{RP_+}	technique	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	τ_{RP_calc}	τ_{CP_+} τCR_posé τCR_ +_dec-eapdc	CE1	EC & schéma	EC
T_EDN_26	2	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	τ_{RP_calc}	τ_{CP_+}	CE1	EC & schéma	EC
T_EDN_25	3	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	τ_{RP_calc}	τ_{CP_+} τCR_posé τCR_ +_dec-eapdc	CE1	EC & schéma	EC
T_EDN_30	1	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	τ_{RP_calc}	τ_{CR_+}	CE2	LN&EC	EC
T_EDN_31	3	$T_{RP\_\times}$	technique	T_{RP_+}	TCAT	T_{CR_+}& $T_{CR\_\times}$	technique	3	τ_{RP_calc}	τmultPD & τ_{CR_-}	CE2	LN&EC	EC
T_EDN_32	3	$T_{RP\_\times}$	technique	T_{RP_+}	TCAT	T_{CR_+}&	technique	3	τ_{RP_calc}	τCR_× &	CE2	LN&EC&NP	EC

						$T_{CR\_\times}$				τ_{CR_-}			
T_EDN_33	3	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	τ_{RP_calc}	τCR_posé τCR_ +_dec-eapdc	CE2	LN&EC	EC
P_EDN_01	1	T_{RP_+}	technique	T_{CR_+}	technique			2	τ_{RP_calc}	τ_{CR_+}	CE1	LN&EC	EC
P_EDN_03	2	$T_{RP\_\times}$	technique	T_{RP_+}	technique	T_{CR_+}	technique	3	τ_{RP_calc}	τ_{CR_+}	CE1	LN&EC	EC
P_EDN_02	3	$T_{RP\_\times}$	technique	T_{RP_+}	technique	T_{CR_+} & $T_{CR\_\times}$	technique	3	τ_{RP_calc}	τ_{CR_+} & $\tau_{CR\_\times}$	CE2	LN&EC	EC
P_EDN_04	1	T_{RP_+}	technique	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	τ_{RP_calc}	τ_{CP_+} τCR_posé τCR_ +_dec-eapdc	CE1	EC & schéma	EC
P_EDN_05	3	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	τ_{RP_calc}	τ_{CP_+} τCR_posé τCR_ +_dec-eapdc	CE1	EC & schéma	EC
P_EDN_06	3	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	τ_{RP_calc}	τ_{CP_+}	CE1	EC & schéma	EC
P_EDN_09	2	$T_{RP\_\times}$	technique	T_{RP_+}	technique	T_{CR_+}	technique	3	τ_{RP_calc}	τ_{CR_+}	CE1	LN&EC	EC
P_EDN_07	3	$T_{RP\_\times}$	TCAT	$T_{CP\_:}$ ou $T_{CR\_:}$	TCAT			2	τ_{RP_calc}, $\tau_{RP\_op\_trou}$	$\tau_{CP\_:}$ τCR_ :_dec-epdc τCR_ :_dec-arithm×	CE2	LN&EC	EC
P_EDN_08	3	$T_{RP\_\times}$	TCAT	$T_{CP\_:}$	TCAT			2	τ_{RP_calc}, $\tau_{RP\_op\_trou}$	$\tau_{CP\_:}$	CE2	LN&EC	EC
P_EDN_10	4	$T_{RP\_\times}$	TCST					1	$\tau_{conv\_schéma}$		CM1	LN&NP	schéma&EC
P_EDN_11	5	$T_{RP\_\times}$	TCST	calcul mental	technique			1	τ_{RP_calc}		CM1	LN&NP	schéma&EC
CV_EDN_01a	2	T_{RP_Ass}	TCAT					1	τ_{RP_calc}		CE2	LN&EC	EA

Annexe 1.1.1 : Items de l'évaluation CEDRE 2008 : OMR 1 (Éléments descripteurs -2)

	Groupe échelle	Classe de problème	taille du nombre	nombre de nombres en jeu	Calcul posé ou réfléchi	Zéros dans x et : ou de retenues dans + et -	Type de répertoire	Format de question	Contexte
T_EDN_02	2	Compa_:_Ef	3 & 1	2				QCM	Achat + Mes (euros)
T_EDN_03	4	Mult&Compo_Tout	4&2	2				QCM	Salaire + Mes (euros)
T_EDN_05	1	Mult	1&1	2	CR immédiat	non	simple	QCM	cirque + Mes (euros)
T_EDN_06	3	Div Quot_ Nb part	1&2	2	CR immédiat	non	complexe	QCM	cirque + Mes (euros)
T_EDN_11	2	Compa+_Ei	2 & 1	2				QCM	âges
T_EDN_14	2	Transf+_Ei	2 & 2	2				QCM	billes
T_EDN_18	2	Transf-_Ei	3&3	2	CR immédiat	non	simple	QCM	mathématique
T_EDN_17	3	Transf+_Ei	3&3	2	CR immédiat	non	simple	QCM	mathématique
T_EDN_19	3	Compa+_Ef	2&2	2	CR immédiat	non	simple	QCM	mathématique
T_EDN_20	2	Transf_Ei	3&2	2	CR immédiat	oui	simple	QCM	garage + mes (euros)
T_EDN_21	3	Mult & Transf_Transf	1&3&3	3	CR possible	oui	simple	QCM	garage + mes (euros)
T_EDN_22	3	Mult & Transf_Ei	1&2&2	3	CR possible	oui	simple	QCM	supermarché + mes (euros)
T_EDN_23	3	Transf_Ei	3&2	2	CR possible	oui	simple	QCM	supermarché + mes (euros)
T_EDN_24	1	Compo_Tout	3&3	2	CR immédiat	non	simple	QCM	Distance entre ville +Mes (km)
T_EDN_26	2	Compo_Partie	4&3	2	CR possible	oui	complexe	QCM	Distance entre ville +Mes (km)

T_EDN_25	3	Compo_Partie	3&3	2	CR immédiat	non	simple	QCM	Distance entre ville +Mes (km)
T_EDN_30	1	Transf_Ei	3&2	2	CR immédiat	oui	simple	QCM	garage + mes (euros)
T_EDN_31	3	Mult & Transf_Transf	1&3&3	3	CR possible	oui	simple	QCM	garage + mes (euros)
T_EDN_32	3	Mult & Transf_Ei	1&2&2	3	CR possible	oui	simple	QCM	supermarché + mes (euros)
T_EDN_33	3	Transf_Ei	2&2	2	CR possible	oui	simple	QCM	supermarché + mes (euros)
P_EDN_01	1	Compo_tout	1&2&3	3	CR immédiat	non	simple	QROC	argent de poche + mes (euros)
P_EDN_03	2	Compo_Tout & Mult	1&1&1&1	4	CR immédiat	non	simple	QROC	Scolaire + Mes (euros)
P_EDN_02	3	Compo_Tout & Mult	1&1&1&2	4	CR possible	non	simple	QROC	Fleurs+ mes (euros)
P_EDN_04	1	Compo_Tout	3&3	2	CR immédiat	non	simple	QROC	Distance entre ville +Mes (km)
P_EDN_05	3	Compo_Partie	3&3	2	CR immédiat	non	simple	QROC	Distance entre ville +Mes (km)
P_EDN_06	3	Compo_Partie	4&3	2	CR possible	oui	complexe	QROC	Distance entre ville +Mes (km)
P_EDN_09	2	Compo_Tout &Mult	1&1&1&1	4	CR immédiat	non	simple	QROC	scolaire+Mes (euros)
P_EDN_07	3	Div Part_ Val part	3 & 1	2	CR possible	oui	simple	QROC	loterie + Mes (euros)
P_EDN_08	3	Div Part_ Val part	3 & 1	2	CR difficile	non	complexe	QROC	oiseau + Mes (km&j)
P_EDN_10	4	Div Part_Nbparts	1	1				QROC	Ruban
P_EDN_11	5	Div Part_Val_Part	2&1	1	calcul mental	non	simple	QROC	Ruban
CV_EDN_01a	2	Transf_Ef	2&2&2& 2&2&2&1	7				VF	Autocar et passagers

Annexe 1.1.2 : Items de l'évaluation CEDRE 2008 : OMR 2

it2008	Groupe échelle		type de tâche	Niveau de convocation	nombre de types de tâches convoqués	techniques attendues	niveau d'enseignement	registre d'entrée	registre de sortie	variable s	taille du nombre	nombre de nombres en jeu	Présence de zéros dans l'EC	Format de question
I_CNEN_01	1	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique	1	$\tau_{Tnp/ec}$	CE2	NP	EC		5	1	oui	QCM
I_CNEN_02	1	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique	1	$\tau_{Tnp/ec}$	CE2	NP	EC		6	1	oui	QCM
I_CNEN_03	1	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique	1	$\tau_{Tnp/ec}$	CE2	NP	EC		6	1	oui	QCM
I_CNEN_04	1	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique	1	$\tau_{Tnp/ec}$	CE2	NP	EC		8	1	oui	QCM
I_CNEN_09	1	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique	1	$\tau_{Tnp/ec}$	CE2	NP	EC		6	1	oui	QCM
I_CNEN_10	1	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique	1	$\tau_{Tnp/ec}$	CE2	NP	EC		6	1	oui	QCM
I_CNEN_11	1	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique	1	$\tau_{Tnp/ec}$	CM1	NP	EC		8	1	non	QCM
T_EDN_44	1	OML2a	$T_{Teunc/ec}$	technique	1	τ_{pos}	CE2	LN	EC		1&1&1&1	4	non	QCM
T_EDN_45	2	OML2a	$T_{Teunc/ec}$	technique	1	τ_{pos}	CE2	LN	EC		1&1	2	non	QCM
T_EDN_46	3	OML2a	$T_{Teunc/ec}$	technique	1	τ_{pos}	CE2	LN	EC		1	1	non	QCM
T_EDN_47	3	OML2a	$T_{Teunc/ec}$	technique	1	τ_{pos}	CE2	LN	EC		1&1&2	3	non	QCM
T_CNEN_11	1	OML2a	T_{CNd}	technique	1	τ_{tronc}	CM1	EC	EC	Nombre de	8	1		QCM
T_CNEN_09	2	OML2a	T_{CNd}	technique	1	τ_{tronc}	CM1	EC	EC	Nombre de	8	1		QCM
T_CNEN_10	2	OML2a	T_{CNd}	technique	1	τ_{tronc}	CE2	EC	EC	Nombre de	6	1		QCM
T_CNEN_04	3	OML2a	T_{CNd}	technique	1	τ_{pos}	CM1	EC	EC	Chiffre des	8	1		QCM
T_CNEN_05	3	OML2a	T_{CNd}	technique	1	τ_{pos}	CM1	EC	EC	Chiffre des	7	1		QCM
T_CNEN_06	3	OML2a	T_{CNd}	technique	1	τ_{pos}	CM1	EC	EC	Chiffre des	7	1		QCM

T_CNEN_07	3	OML2a	T_{CNd}	technique	1	τ_{pos}	CM1	EC	EC	Chiffre des	7	1		QCM
T_CNEN_08	>5	OML2a	T_{CNd}	technique	1	τ_{tronc}	CE2	EC	EC	Nombre de	4	1		QCM
T_CNEN_12a	1	OML2a	$T_{Tec/eapdc}$	technique	1	τ_{Tpos}	CE2	EC&EAPDC	EC&EAPDC		4&4&5	3	non- oui- oui	QCM
T_CNEN_13a	2	OML2a	$T_{Tec/epdc}$	technique	1	τ_{Tpos}	CE2	EC&EPDC	EC&EPDC		5&4&4	3	oui- oui- oui	QCM
T_C_23	2	OML2a	T_{CNd}	technique	1	τ_{divPD}	CM2	LN&EC	EC	:100	4	2		QCM
T_C_20	3	OML2a	T_{CNd}	technique	1	τ_{divPD}	CM2	LN&EC	EC	:10	3	2		QCM
I_EDN_01a	2	OML2c	T_R	technique	1	τ_R	CE2	EC	EC		4*3&4*4	8		QCM
T_CNEN_39a	2	OML2c	T_{comp}	technique	1	τ_{comp}	CE2	EC	EC		4&4&5 &5&5& 6&7&7	8		VF
T_CNEN_32	2	OML2c	T_{AR}	TCST	1	τ_{AR}	CE2	EC	EC	r=10	4&4&4 &4&4	5	non	QCM
T_CNEN_33	2	OML2c	T_{AR}	TCST	1	τ_{AR}	CE2	EC	EC	r=100	5&5&5 &5&5	5	oui	QCM
T_CNEN_34	2	OML2c	T_{AR}	TCST	1	τ_{AR}	CE2	EC	EC	r=1000	5&5&5 &5&6	5	oui	QCM
T_CNEN_35	2	OML2c	T_{AR}	TCST	1	τ_{AR}	CE2	EC	EC	r=1	5&5&5 &5&5	5	oui	QCM
T_CNEN_37	2	OML2c	T_{D_DG}	technique	1	τ_{D_DG}	CE2	EC+DG	EC+DG		2&2&4 &5	4		V/F
T_CNEN_38	1	OML2c	T_{comp}	technique	1	τ_{comp}	CE2	EC	EC		5*4& 7*5	12		V/F
P_CNEN_01	2	OML2c	T_{AR}	TCST	1	τ_{AR}	CE1	EC	EC	pas=10	3		non	QROC
P_CNEN_02	3	OML2c	T_{AR}	TCST	1	τ_{AR}	CE1	EC	EC	pas=10	3		oui	QROC
P_CNEN_03	3	OML2c	T_{AR}	TCST	1	τ_{AR}	CE2	EC	EC	pas=100	4		oui	QROC

P_CNEN_04	3	OML2c	TAR	TCST	1	τ_{AR}	CE1	EC	EC	pas=10	3		oui	QROC
P_CNEN_05	3	OML2c	TAR	TCST	1	τ_{AR}	CE2	EC	EC	pas=10	4		oui	QROC
P_CNEN_07	1	OML2c	TAR	TCST	1	τ_{AR}	CE2	EC	EC	pas = +1	5		non	QROC
P_CNEN_06	2	OML2c	TAR	TCST	1	τ_{AR}	CE2	EC	EC	pas = -1	5		oui	QROC
P_CNEN_08	2	OML2c	TAR	TCST	1	τ_{AR}	CE2	EC	EC	pas = -10	5		non	QROC
P_CNEN_09	2	OML2c	TAR	TCST	1	τ_{AR}	CE2	EC	EC	pas = +10	5		non	QROC
P_CNEN_10	2	OML2c	TAR	TCST	1	τ_{AR}	CE2	EC	EC	pas = -100	5		non	QROC
P_CNEN_11	2	OML2c	TAR	TCST	1	τ_{AR}	CE2	EC	EC	pas = +100	5		non	QROC
P_CNEN_12	2	OML2c	TAR	TCST	1	τ_{AR}	CE2	EC	EC	pas = -100	5		non	QROC
P_CNEN_13	3	OML2c	TAR	TCST	1	τ_{AR}	CE2	EC	EC	pas = +100	5		oui	QROC

Annexe 1.1.3 Items de l'évaluation CEDRE 2008 : OMR 3 (éléments descripteurs de tâches - 1)

En2008, un seul type de tâches est convoqué pour chaque item relevant de l'OMR 3.

it2008	Groupe échelle		type de tâche	Niveau de convocation	techniques attendues	niveau d'enseignement	registre d'entrée	registre de sortie	variables
T_C_34	2	OML3a	TCP_:	TCAT	τ_{CP_div}		EA	EA	Preuve
T_C_33	3	OML3a	TCP_-	TCAT	$\tau_{CP\_+-\_op\ trou}$		EA	EA	Preuve
P_C_04	1	OML3a	TCP_+	technique	τ_{CP_+}	CE2	EC	EC	
P_C_05	2	OML3a	TCP_-	technique	τCP_-_écart (ou τCP_-_écart)	CE2	EC	EC	
P_C_07	2	OML3a	TCP_:	technique	$\tau_{CP\_:}$	CM1	EC	EC	
P_C_19	1	OML3a	TCP_×	technique	$\tau_{CP\_\times}$	CE2	EC	EC	
P_C_18	2	OML3a	TCP_-	technique	τCP_-_écart (ou τCP_-_écart)	CE2	EC	EC	
P_C_20	2	OML3a	TCP_:	technique	$\tau_{CP\_:}$	CM1	EC	EC	
P_C_28	1	OML3a	TCP_:	technique	$\tau_{CP\_:}$	CM1	EC	EC	
P_C_32	1	OML3a	TCP_:	technique	$\tau_{CP\_:}$	CM1	EC	EC	
P_C_29	3	OML3a	TCP_+	technique	τ_{CP_+}	CE2	EC	EC	
E_C_09	1	OML3b	TCR_+	technique	$\tau_{CR\_+\_np}$ τCR_+_dec_eapdc	CE2	NP	EC	
E_C_15	1	OML3b	TCR_+	technique	$\tau_{CR\_+\_np}$ τCR_+_dec_eapdc	CE1	NP	EC	
E_C_07	2	OML3b	TCR_×	TCAT	τCR_×_dist $\tau_{CR\_\times\_dec\text{-}arithm\times}$	CM1	NP	EC	
E_C_08	2	OML3b	TCR_×	TCAT	τCR_×_dist $\tau_{CR\_\times\_dec\text{-}arithm\times}$ τCR_×_dec_epdc	CM2	NP	EC	
E_C_10	2	OML3b	TCR_+	technique	τCR_+_dec_eapdc	CE2	NP	EC	
E_C_11	2	OML3b	TCR_-	TCAT	$\tau_{CR\_-\_dec\_eapdc}$ τCR_-_excès	CE2	NP	EC	

E_C_12	2	OML3b	T_{CR_-}	technique	τ_{compt}	CE2	NP	EC	
E_C_13	2	OML3b	$T_{CR\_\times}$	TCAT	τCR_×_dist $\tau_{CR\_\times\_dec\text{-}arithm\times}$	CM1	NP	EC	
E_C_14	2	OML3b	$T_{CR\_\times}$	technique	τ_{multPD}	CE2	NP	EC	
E_C_25	2	OML3b	T_{CR_+}	technique	τCR_+_dec_eapdc	CE1	NP	EC	
E_C_06	3	OML3b	$T_{CR\_\times}$	TCAT	τCR_×_dist $\tau_{CR\_\times\_dec\text{-}arithm\times\_}$	CM1	NP	EC	
E_C_19	3	OML3b	$T_{CR\_\times}$	TCAT	τCR_×_dist $\tau_{CR\_\times\_dec\text{-}arithm\times}$	CM2	NP	EC	
E_C_21	3	OML3b	T_{CR_-}	TCAT	$\tau_{CR\_-\_dec\_eapdc}$ τCR_-_excès τCR_-_dec_eapdc	CE2	NP	EC	
E_C_22	3	OML3b	T_{CR_-}	TCAT	$\tau_{CR\_-\_dec\_eapdc}$ τCR_-_excès	CE2	NP	EC	
E_C_23	3	OML3b	$T_{CR\_:}$	TCAT	$\tau_{CR\_:\_dec\text{-}arithm\times}$ τCR_dec-arithm+	CM2	NP	EC	
E_C_16	4	OML3b	$T_{CR\_\times}$	TCAT	τCR_×_dist $\tau_{CR\_\times\_dec\text{-}arithm\times}$	CM2	NP	EC	
E_C_18	4	OML3b	$T_{CR\_\times}$	TCAT	$\tau_{CR\_\times\_dec\_epdc}$	CM2	NP	EC	
E_C_17	5	OML3b	$T_{CR\_\times}$	TCAT	τCR_×_dist $\tau_{CR\_\times\_dec\text{-}arithm\times}$	CM2	NP	EC	
T_C_03	1	OML3b	$T_{CR\_ODG\_+}$	TCAT	$\tau_{CR\_ODG\_+}$	CE2	EC	EC	
T_C_01	2	OML3b	$T_{CR\_ODG\_+}$	TCAT	$\tau_{CR\_ODG\_+}$	CE2	EC	EC	
T_C_02	2	OML3b	$T_{CR\_ODG\_+}$	TCAT	$\tau_{CR\_ODG\_+}$	CE2	EC	EC	
T_C_04	2	OML3b	$T_{CR\_ODG\_+}$	TCAT	$\tau_{CR\_ODG\_+}$	CE2	EC	EC	
T_C_05	3	OML3b	$T_{CR\_ODG\_+}$	TCAT	$\tau_{CR\_ODG\_+}$	CE2	EC	EC	
T_C_06	3	OML3b	$T_{CR\_ODG\_+}$	TCAT	$\tau_{CR\_ODG\_+}$	CE2	EC	EC	
T_C_07	4	OML3b	$T_{CR\_:}$	TCAT	τCR_posé ou τCR_:_dec-epdc	CM1	EC	EC	nb chiffre quotient
T_C_08	4	OML3b	$T_{CR\_:}$	TCAT	τCR_posé ou τCR_:_dec-epdc	CM1	EC	EL	nb chiffre quotient
T_C_09	4	OML3b	$T_{CR\_:}$	TCAT	τCR_posé ou τCR_:_dec-epdc	CM1	EC	EL	nb chiffre quotient
T_C_10	4	OML3b	$T_{CR\_:}$	TCAT	τCR_posé ou τCR_:_dec-epdc	CM1	EC	EL	nb chiffre quotient
T_C_11	4	OML3b	$T_{CR\_:}$	TCAT	τCR_posé ou τCR_:_dec-epdc	CM1	EC	EL	nb chiffre quotient
T_C_14	2	OML3b	$T_{CR\_ODG\_-}$	TCAT	$\tau_{CR\_ODG\_-}$	CM1	EC	EC	

T_C_15	2	OML3b	$T_{CR\_ODG\_\times}$	TCAT	$\tau_{CR\_ODG\_\times}$	CM1	EC	EC	
T_C_16	2	OML3b	$T_{CR\_ODG\_\times}$	TCAT	$\tau_{CR\_ODG\_\times}$	CM1	EC	EC	
T_C_12	3	OML3b	$T_{CR\_ODG\_-}$	TCAT	$\tau_{CR\_ODG\_-}$	CM1	EC	EC	
T_C_13	3	OML3b	$T_{CR\_ODG\_-}$	TCAT	$\tau_{CR\_ODG\_-}$	CM1	EC	EC	
T_C_17	3	OML3b	$T_{CR\_ODG\_\times}$	TCAT	$\tau_{CR\_ODG\_\times}$	CM1	EC	EC	
T_C_18	3	OML3b	$T_{CR\_ODG\_:}$	TCAT	$\tau_{CR\_ODG\_:}$	CM1	EC	EC	
T_C_19	3	OML3b	$T_{CR\_ODG\_:}$	TCAT	$\tau_{CR\_ODG\_:}$	CM1	EC	EC	
T_C_30	2	OML3b	$T_{CR\_:}$	TCAT	$\tau_{CR\_posé}$ ou $\tau_{CR\_:\_dec\text{-}epdc}$	CM1	EC	EC	nb chiffre quotient
T_C_31	2	OML3b	$T_{CR\_:}$	TCAT	$\tau_{CR\_posé}$ ou $\tau_{CR\_:\_dec\text{-}epdc}$	CM1	EC	EC	nb chiffre quotient
T_C_32	2	OML3b	$T_{CR\_:}$	TCAT	$\tau_{CR\_posé}$ ou $\tau_{CR\_:\_dec\text{-}epdc}$	CM1	EC	EC	nb chiffre quotient
T_C_29	4	OML3b	$T_{CR\_:}$	TCAT	$\tau_{CR\_posé}$ ou $\tau_{CR\_:\_dec\text{-}epdc}$	CM1	EC	EC	nb chiffre quotient
T_C_35	3	OML3b	T_{CR_+}	TCST	$\tau_{CR\_posé}$		EC	EC	chiffre des unités
T_C_36	3	OML3b	T_{CR_-}	TCST	$\tau_{CR\_posé}$		EC	EC	chiffre des unités
T_C_37	3	OML3b	$T_{CR\_\times}$	TCST	$\tau_{CR\_posé}$		EC	EC	chiffre des unités
P_C_08	2	OML3b	$T_{CR\_:}$	TCAT	$\tau_{CR\_:\_dec\text{-}epdc}$; $\tau_{CR\_:\_dec\text{-}arithm\times}$; $\tau_{CR\_:\_dec\text{-}arithm+}$	CM1	LN&EC	EC	moitié
P_C_09	3	OML3b	$T_{CR\_:}$	TCAT	$\tau_{CR\_:\_dec\text{-}epdc}$; $\tau_{CR\_:\_dec\text{-}arithm\times}$; $\tau_{CR\_:\_dec\text{-}arithm+}$	CM1	LN&EC	EC	moitié
P_C_10	3	OML3b	$T_{CR\_:}$	TCAT	$\tau_{CR\_:\_dec\text{-}epdc}$; $\tau_{CR\_:\_dec\text{-}arithm\times}$; $\tau_{CR\_:\_dec\text{-}arithm+}$	CM1	LN&EC	EC	moitié
P_C_11	3	OML3b	$T_{CR\_:}$	TCAT	$\tau_{CR\_:\_dec\text{-}epdc}$; $\tau_{CR\_:\_dec\text{-}arithm\times}$; $\tau_{CR\_:\_dec\text{-}arithm+}$	CM1	LN&EC	EC	moitié
P_C_15	3	OML3b	$T_{CR\_\times}$	TCAT	$\tau_{CR\_\times\_dec\_epdc}$	CM1	LN&EC	EC	double
P_C_16	3	OML3b	$T_{CR\_\times}$	TCAT	$\tau_{CR\_\times\_dec\_epdc}$	CM1	LN&EC	EC	double
P_C_33	1	OML3b	T_{CR_-}	technique	$\tau_{CR\_-\_dec\_eapdc}$	CE1	EC	EC	
P_C_35	1	OML3b	T_{CR_-}	technique	$\tau_{CR\_-\_dec\_eapdc}$	CE1	EC	EC	
P_C_34	2	OML3b	T_{CR_-}	technique	$\tau_{CR\_-\_dec\_eapdc}$	CE1	EC	EC	

P_C_36	2	OML3b	T_{CR_-}	technique	$\tau_{CR\_-\_dec\_eapdc}$	CE1	EC	EC	
P_C_37	2	OML3b	T_{CR_-}	technique	$\tau_{CR\_-\_dec\_eapdc}$	CE1	EC	EC	
CV_C_02	3	OML3b	$T_{CR\_ODG\_\times}$	TCAT	$\tau_{CR\_ ODG\_\times}$	CM2	EC	LN & EC	
CV_C_03	3	OML3b	$T_{CR\_ODG\_\times}$	TCAT	$\tau_{CR\_ ODG\_\times}$	CM2	EC	LN & EC	
CV_C_04	4	OML3b	$T_{CR\_ODG\_\times}$	TCAT	$\tau_{CR\_ ODG\_\times}$	CM2	EC	LN & EC	
I_CNEN_05	1	OML3b	TCR_x			ancien	LN&EC	EC	multiple de 7
I_CNEN_06	2	OML3b	TCR_x			ancien	LN&EC	EC	multiple de 8
I_CNEN_07	2	OML3b	TCR_x			ancien	LN&EC	EC	multiple de 4
I_CNEN_08	2	OML3b	TCR_×			ancien	LN&EC	EC	multiple de 6
I_C_01	3	savoir décla	vocabulaire			ancien	LN&EC	EA	somme
I_C_06	3	savoir décla	vocabulaire			ancien	LN&EC	EA	quotient
I_C_02	4	savoir décla	vocabulaire			en cours	LN&EC	EA	complément
I_C_04	4	savoir décla	vocabulaire			ancien	LN&EC	EA	différence
I_C_05	4	savoir décla	vocabulaire			ancien	LN&EC	EA	écart
I_C_07	1	savoir décla	vocabulaire			ancien	LN	LN	quotient
I_C_09	2	savoir décla	vocabulaire			ancien	LN	LN	somme
I_C_08	3	savoir décla	vocabulaire			ancien	LN	LN	produit
I_C_10	3	savoir décla	vocabulaire			ancien	LN	LN	différence
I_C_11	2	savoir décla	vocabulaire			ancien	LN	LN	vocabulaire V-F

T_CNEN_03a	1	OML3b	TCR_:			ancien	EC	EC	Multiple de 10
T_CNEN_02a	2	OML3b	TCR_:			ancien	EC	EC	Multiple de 5
T_CNEN_01a	3	OML3b	TCR_:			ancien	EC	EC	Multiple de 2
T_CNEN_14	2	OML3b	TCR_:			ancien	EC	EC	quart
T_CNEN_15	2	OML3b	TCR_:			ancien	EC	EC	quart
T_CNEN_16	2	OML3b	TCR_:			ancien	EC	EC	quart
T_CNEN_19	2	OML3b	TCR_×			ancien	EC	EC	quadruple
T_CNEN_17	3	OML3b	TCR_×			ancien	EC	EC	quadruple
T_CNEN_18	3	OML3b	TCR_×			ancien	EC	EC	quadruple
T_CNEN_20	3	OML3b	TCR_:			ancien	EC	EC	tiers
T_CNEN_21	3	OML3b	TCR_:			ancien	EC	EC	tiers
T_CNEN_22	3	OML3b	TCR_:			ancien	EC	EC	tiers
T_CNEN_23	3	OML3b	TCR_×			ancien	EC	EC	triple
T_CNEN_24	3	OML3b	TCR_×			ancien	EC	EC	triple
T_CNEN_25	3	OML3b	TCR_×			ancien	EC	EC	triple
T_CNEN_26	1	OML3b	TCR_×			ancien	EC	EC	double
T_CNEN_27	1	OML3b	TCR_×			ancien	EC	EC	double
T_CNEN_30	1	OML3b	TCR_:			ancien	EC	EC	moitié
T_CNEN_31	1	OML3b	TCR_:			ancien	EC	EC	moitié
T_CNEN_28	2	OML3b	TCR_×			ancien	EC	EC	double
T_CNEN_29	2	OML3b	TCR_:			ancien	EC	EC	moitié

Annexe 1.1.3 Répartition des items de l'OMR 3 - 2008 (éléments descripteurs de tâches - 2)

it2008		**type de tâche**	**taille du nombre**	**nombre de nombres en jeu**	**Calcul posé ou réfléchi**	**Présence de zéros dans x et : ou de retenues dans + et -**	**répertoires**	**Format de question**
T_C_34	OML3a	TCP_:	4 & 2					
T_C_33	OML3a	TCP_-	3					
P_C_04	OML3a	T_{CP_+}	2&4&5	3		non	simple	QROC
P_C_05	OML3a	T_{CP_-}	4&2	2		oui	complexe	QROC
P_C_07	OML3a	$T_{CP\_:}$	3 & 1	2		oui	simple	QROC
P_C_19	OML3a	$T_{CP\_\times}$	3 & 2	2		non	simple	QROC
P_C_18	OML3a	T_{CP_-}	6&6	2		non	simple	QROC
P_C_20	OML3a	$T_{CP\_:}$	3 & 1	2		oui	simple	QROC
P_C_28	OML3a	$T_{CP\_:}$	3 & 1	2		oui	simple	QROC
P_C_32	OML3a	$T_{CP\_:}$	4 & 2	2		oui	complexe	QROC
P_C_29	OML3a	T_{CP_+}	4&4&4	3		non	simple	QROC
E_C_09	OML3b	T_{CR_+}	4 & 2	2		oui	simple	QROC
E_C_15	OML3b	T_{CR_+}	3 & 2	2		oui	simple	QROC
E_C_07	OML3b	$T_{CR\_\times}$	3 & 1	2		oui	simple	QROC
E_C_08	OML3b	$T_{CR\_\times}$	2 & 1	2		oui	simple	QROC
E_C_10	OML3b	T_{CR_+}	2 & 2	2		oui	simple	QROC

E_C_11	OML3b	T_{CR_-}	2&2	2		oui	simple	QROC
E_C_12	OML3b	T_{CR_-}	4 & 1	2		oui	simple	QROC
E_C_13	OML3b	$T_{CR\_\times}$	1 & 2	2		oui	simple	QROC
E_C_14	OML3b	$T_{CR\_\times}$	2 & 2	2		oui	simple	QROC
E_C_25	OML3b	T_{CR_+}	2 & 2	2		oui	complexe	QROC
E_C_06	OML3b	$T_{CR\_\times}$	2 & 1	2		non	simple	QROC
E_C_19	OML3b	$T_{CR\_\times}$	1 & 2	2		non	complexe	QROC
E_C_21	OML3b	T_{CR_-}	2 & 2	2		oui	complexe	QROC
E_C_22	OML3b	T_{CR_-}	3 & 2	2		oui	complexe	QROC
E_C_23	OML3b	$T_{CR\_:}$	2 & 2	2		oui	complexe	QROC
E_C_16	OML3b	$T_{CR\_\times}$	1 & 2	2		non	complexe	QROC
E_C_18	OML3b	$T_{CR\_\times}$	2 & 2	2		oui	simple	QROC
E_C_17	OML3b	$T_{CR\_\times}$	2 & 2	2		non	simple	QROC
T_C_03	OML3b	$T_{CR\_ODG\_+}$	3	2				QCM
T_C_01	OML3b	$T_{CR\_ODG\_+}$	2	2				QCM
T_C_02	OML3b	$T_{CR\_ODG\_+}$	2	2				QCM
T_C_04	OML3b	$T_{CR\_ODG\_+}$	3	2				QCM
T_C_05	OML3b	$T_{CR\_ODG\_+}$	3	2				QCM
T_C_06	OML3b	$T_{CR\_ODG\_+}$	3	3				QCM
T_C_07	OML3b	$T_{CR\_:}$	4 & 1	2			simple	QROC
T_C_08	OML3b	$T_{CR\_:}$	4 & 1	2			complexe	QROC
T_C_09	OML3b	$T_{CR\_:}$	5 & 1	2			complexe	QROC
T_C_10	OML3b	$T_{CR\_:}$	3 & 1	2			simple	QROC
T_C_11	OML3b	$T_{CR\_:}$	4 & 1	2			simple	QROC
T_C_14	OML3b	$T_{CR\_ODG\_-}$	2	2				QCM

T_C_15	OML3b	$T_{CR\_ODG\_\times}$	3	2					QCM
T_C_16	OML3b	$T_{CR\_ODG\_\times}$	2 & 2	2					QCM
T_C_12	OML3b	$T_{CR\_ODG\_-}$	2	2					QCM
T_C_13	OML3b	$T_{CR\_ODG\_-}$	2	2					QCM
T_C_17	OML3b	$T_{CR\_ODG\_\times}$	2 & 1	2					QCM
T_C_18	OML3b	$T_{CR\_ODG\_:}$	2 & 2	2					QCM
T_C_19	OML3b	$T_{CR\_ODG\_:}$	3&2	2					QCM
T_C_30	OML3b	$T_{CR\_:}$	3 & 2	2					QCM
T_C_31	OML3b	$T_{CR\_:}$	2 & 1	2					QCM
T_C_32	OML3b	$T_{CR\_:}$	3 & 1	2					QCM
T_C_29	OML3b	$T_{CR\_:}$	4 & 2	2					QCM
T_C_35	OML3b	T_{CR_+}	1*2&6*4&1*5+1*6+1*8	10					QRC
T_C_36	OML3b	T_{CR_-}	2*1&3*2&3*3&2*4	10					QRC
T_C_37	OML3b	$T_{CR\_\times}$	1*2&3*3&5*4&1*5	10					QRC
P_C_08	OML3b	$T_{CR\_:}$	3	1		oui	simple	QROC
P_C_09	OML3b	$T_{CR\_:}$	3	1		oui	simple	QROC
P_C_10	OML3b	$T_{CR\_:}$	3	1		oui	simple	QROC
P_C_11	OML3b	$T_{CR\_:}$	2	1		oui	simple	QROC
P_C_15	OML3b	$T_{CR\_\times}$	2	1		oui	simple	QROC
P_C_16	OML3b	$T_{CR\_\times}$	3	1		non	simple	QROC
P_C_33	OML3b	T_{CR_-}	2&2	2		non	simple	QROC
P_C_35	OML3b	T_{CR_-}	3&2	2		oui	simple	QROC
P_C_34	OML3b	T_{CR_-}	2&2	2		non	simple	QROC
P_C_36	OML3b	T_{CR_-}	3&3	2		non	simple	QROC
P_C_37	OML3b	T_{CR_-}	3&3	2		non	simple	QROC

CV_C_02	OML3b	TCR_ODG_×	3 & 2	2		non	simple	QCM
CV_C_03	OML3b	TCR_ODG_×	2&2	2		non	simple	QCM
CV_C_04	OML3b	TCR_ODG_×	3&3	2		oui	simple	QCM
I_CNEN_05	OML3b	TCR_x	2					QCM
I_CNEN_06	OML3b	TCR_x	2					QCM
I_CNEN_07	OML3b	TCR_x	2					QCM
I_CNEN_08	OML3b	TCR_×	2					QCM
I_C_01	savoir décla	vocabulaire	2					QCM
I_C_06	savoir décla	vocabulaire	3					QCM
I_C_02	savoir décla	vocabulaire	3					QCM
I_C_04	savoir décla	vocabulaire	3					QCM
I_C_05	savoir décla	vocabulaire	2					QCM
I_C_07	savoir décla	vocabulaire						QCM
I_C_09	savoir décla	vocabulaire						QCM
I_C_08	savoir décla	vocabulaire						QCM
I_C_10	savoir décla	vocabulaire						QCM
I_C_11	savoir décla	vocabulaire						VF
T_CNEN_03a	OML3b	TCR_:	7*1	7				QCM
T_CNEN_02a	OML3b	TCR_:	7*1	7				QCM
T_CNEN_01a	OML3b	TCR_:	7*1	7				QCM
T_CNEN_14	OML3b	TCR_:	2					QCM
T_CNEN_15	OML3b	TCR_:	3					QCM
T_CNEN_16	OML3b	TCR_:	3					QCM
T_CNEN_19	OML3b	TCR_×	2					QCM
T_CNEN_17	OML3b	TCR_×	2					QCM
T_CNEN_18	OML3b	TCR_×	2					QCM

T_CNEN_20	OML3b	TCR_:	2					QCM
T_CNEN_21	OML3b	TCR_:	2					QCM
T_CNEN_22	OML3b	TCR_:	2					QCM
T_CNEN_23	OML3b	TCR_×	2					QCM
T_CNEN_24	OML3b	TCR_×	2					QCM
T_CNEN_25	OML3b	TCR_×	2					QCM
T_CNEN_26	OML3b	TCR_×	2					QCM
T_CNEN_27	OML3b	TCR_×	2					QCM
T_CNEN_30	OML3b	TCR_:	2					QCM
T_CNEN_31	OML3b	TCR_:	2					QCM
T_CNEN_28	OML3b	TCR_×	2					QCM
T_CNEN_29	OML3b	TCR_:	2					QCM

ANNEXE 1.2 - ANALYSE DES ITEMS DE L'ÉVALUATION CEDRE 2014

Annexe 1.2.1 Caractéristiques générales des items de l'OMR 1 - 2014 (Éléments descripteurs -1)

	Groupe échelle	type de tâche	Niveau de convocation	Sous type de tâche	Niveau de convocation	Sous type de tâche	Niveau de convocation	nb de types de tâches convoqués	techniques attendues	techniques attendues	niveau d'enseignement	registre d'entrée	registre de sortie
E5MPC2550701	5	$T_{RP\_\times}$	TCAT	$T_{CP\_:}$ ou $T_{CR\_:}$	TCAT			2	τ_{RP_calc}, $\tau_{RP\_op\_trou}$	$\tau_{CP\_:}$ $\tau CR\_:\_dec\text{-}epdc$ $\tau CR\_:\_dec\text{-}arithm\times$	CE2	LN&EC	EC
E5MPC450101	3	$T_{RP\_\times}$	TCAT	$T_{CP\_:}$ ou $T_{CR\_:}$	TCAT			2	τ_{RP_calc}, $\tau_{RP\_op\_trou}$	$\tau_{CP\_:}$ $\tau CR\_:\_dec\text{-}epdc$ $\tau CR\_:\_dec\text{-}arithm\times$	CE2	LN&EC	EC
E5MPC450201	3	$T_{RP\_\times}$	TCAT	$T_{CP\_:}$	TCAT			2	τ_{RP_calc}, $\tau_{RP\_op\_trou}$	$\tau_{CP\_:}$	CE2	LN&EC	EC
E5MPC450301	2	$T_{RP\_\times}$	technique	TRP_+	technique	T_{CR_+}	technique	3	τ_{RP_calc}	τ_{CR_+}	CE1	LN&EC	EC
E5MTC090101	0	$T_{RP\_\times}$	technique	calcul mental	technique			1	τ_{RP_calc}	calcul mental	CE1	LN&EC	EC
E5MTC090201	3	$T_{RP\_\times}$	technique	calcul mental	technique			1	τ_{RP_calc}	calcul mental	CE1	LN&EC	EC
E5MTC150101	1	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT	T_{CP_+} ou T_{CR_+}		2	τ_{RP_calc}	τ_{CR_+}	CE2	LN&EC	EC

E5MTC150201	3	$T_{RP\_\times}$	technique	TRP_+	TCAT	T_{CR_+}& $T_{CR\_\times}$	Technique	3	τ_{RP_calc}	τ_{multPD}& τ_{CR_-}	CE2	LN&EC	EC
E5MTC150301	3	$T_{RP\_\times}$	technique	TRP_+	TCAT	T_{CR_+}& $T_{CR\_\times}$	technique	3	τ_{RP_calc}	$\tau_{CR\_\times}$ & τ_{CR_-}	CE2	LN&EC&EL	EC
E5MTC160101	0	T_{RP_+}	technique	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	τ_{RP_calc}	τ_{CP_+} τCR_posé τCR_+_dec-eapdc	CE1	EC & schéma	EC
E5MTC160201	3	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	τ_{RP_calc}	τ_{CP_+} τCR_posé τCR_+_dec-eapdc	CE1	EC & schéma	EC
E5MTC160301	2	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	τ_{RP_calc}	τ_{CP_+}	CE1	EC & schéma	EC
E5MTC1900101	4	T_{RP_+}	TCAT	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT	T_{CP_-} ou T_{CR_-}	TCAT	3	τ_{RP_calc}	τ_{CP_+}, τCP_- ou τCR_+, τCR_-	CE2	LN&EC	EC
E5MTO1910401	5	$T_{RP\_\times}$	RCST	TRP_+	RCST			2	τ_{RP_calc}		CM1	LN&EC	LN
E5MTO1910501	6	$T_{RP\_\times}$	TCAT	T_{CR_+}& T_{CR_-}	TCAT			4	τ_{CR_+}, τCR_-	$\tau_{CR\_\times}$, $\tau_{CR\_:}$	CM1	LN&EC	EC

Annexe 1.2.1 : Caractéristiques générales des items de l'OMR 1 - 2014 (Éléments descripteurs - 2)

	Groupe échelle	Classe de problème	taille du nombre	nombre de nombres en jeu	Calcul posé ou réfléchi	Zéros dans x et : ou retenues dans + et -	Type de répertoire
E5MPC2550701	5	Div Quot_ Nb part + 1	3 & 1	2	CR possible	oui	complexe
E5MPC450101	3	Div Part_ Val part	3 & 1	2	CR possible	oui	simple
E5MPC450201	3	Div Part_ Val part	3 & 1	2	CR difficile	non	complexe
E5MPC450301	2	Comp_Tout &Mult	1&1&1&1	4	CR immédiat	non	simple
E5MTC090101	0	Mult	1&1	2	CR immédiat	non	simple
E5MTC090201	3	Div Quot_ Nb part	1&2	2	CR immédiat	non	complexe
E5MTC150101	1	Transf_Ei	3&2	2	CR immédiat	oui	simple
E5MTC150201	3	Mult & Transf_Transf	1&3&3	3	CR possible	oui	simple
E5MTC150301	3	Mult & Transf_Ei	1&2&2	3	CR possible	oui	simple
E5MTC160101	0	Comp_Tout	3&3	2	CR immédiat	non	simple
E5MTC160201	3	Comp_Partie	3&3	2	CR immédiat	non	simple
E5MTC160301	2	Comp_Partie	4&3	2	CR possible	oui	complexe
E5MTC1900101	4	Comp_partie	3&3&4	3	CR possible	oui	complexe
E5MTO1910401	5	Comp_Partie & Div_valPart & Mult	2&2&2&2&2&3&4&4&4	9	CR possible	oui	complexe
E5MTO1910501	6	Comp_Partie & Div_valPart & Mult	2&2&2&2&2&3&4&4&4	9	CR possible	oui	complexe

Annexe 1.2.2 : Répartition des items 2014 selon l’ OMR2

	Groupe échelle		type de tâche	Niveau de convocation	technique attendues	niveau d'enseignement	registre d'entrée	registre de sortie	variables	taille du nombre	nombre de nombres en jeu	Présence de zéros dans l'EC	Format de question	Contexte
E5MIN040301	0	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique	$\tau_{Tec/np}$	CM1	NP	EC		7	1		QCM	
E5MTN250101	1	OML2a	$T_{Tec/eapdc}$	technique	τ_{Tpos}	CE2	EC&EAPDC	EC&EAPDC		4&4&5	3		V/F	
E5MTC390101	2	OML2a	T_{CNd}	technique	τ_{divPD}	CM2	LN&EC	EC	:10	3	2		QCM	
E5MTC390401	2	OML2a	T_{CNd}	technique	τ_{divPD}	CM2	LN&EC	EC	:100	4	2		QCM	
E5MTN1960101	3	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique	$\tau_{Tnp/ec}$	CM1	NP	EC		6&7& 8&9	4		QCM	
E5MTN1960201	3	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique	$\tau_{Tnp/ec}$	CM1	NP	EC		4&5& 6&7	4		QCM	
E5MTN1960301	3	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique	$\tau_{Tnp/ec}$	CM1	NP	EC		7&8& 9&10	4		QCM	
E5MIN910101	0	OML2c	T_{D_DG}	technique	τ_{D_DG}	CE2	EC+DG	EC+DG	pas: 1 & 1&100 &1000	2&2& 4&5	4		V/F	
E5MTN470102	3	OML2c	T_{AR}	TCST	τ_{AR}	CE1	EC	EC	pas=10	3		oui	QROC	
E5MTN470103	3	OML2c	T_{AR}	TCST	τ_{AR}	CE2	EC	EC	pas=100	4		oui	QROC	
E5MTN470104	3	OML2c	T_{AR}	TCST	τ_{AR}	CE1	EC	EC	pas=10	3		oui	QROC	

E5MTN470105	3	OML2c	T_{AR}	TCST	τ_{AR}	CE2	EC	EC	pas=10	4		oui	QROC	
E5MTN2000101	2	OML2b	T_{Dc}	TCAT	$\tau_{Dc\text{-}calc}$; $\tau_{Dc\text{-}ec}$ **et $\tau_{Dc\text{-}np\text{-}mult}$; $\tau_{Dc\text{-}np\text{-}add}$**	CE1	EMN	EC	Coll Org	3	1		QRC	
E5MTN2000201	2	OML2b	T_{Dc}	TCAT	$\tau_{Dc\text{-}calc}$; $\tau_{Dc\text{-}ec}$ **et $\tau_{Dc\text{-}np\text{-}mult}$; $\tau_{Dc\text{-}np\text{-}add}$**	CE1	EMN	EC	Coll semi org	3	1		QRC	
E5MTN2000301	2	OML2b	T_{Dc}	TCAT	$\tau_{Dc\text{-}calc}$; $\tau_{Dc\text{-}ec}$ **et $\tau_{Dc\text{-}np\text{-}mult}$; $\tau_{Dc\text{-}np\text{-}add}$**	CE1	EMN	EC	Coll semi org	3	1		QRC	
E5MTN1450101	2	OML2c	T_R	TCST	τ_R	CE2	LN&EC	EC		4&4& 4&4&4	5		QCM	
E5MTN1450201	2	OML2c	T_R	TCST	τ_R	CE2	LN&EC	EC		4&4& 4&4&4	5		QCM	
E5MTN1450301	2	OML2c	T_R	TCST	τ_R	CE2	LN&EC	EC		5&6&7 &8&9	5		QCM	
E5MTN2400101	3	OML2a	$T_{Tec/np}$	technique	$\tau_{Tnp/ec}$	CE2	EC	NP		5	1		QCM	Chèque (euros)
E5MTN2010201	5	OML2a	$T_{Teun/ec}$	technique	τ_{Tjuxt}	CE1	EUN	EC		3	1		QCM	
E5MTN2010301	5	OML2a	$T_{Teun/ec}$	technique	τ_{Tjuxt}	CE1	EUN	EC		3	1		QCM	

Annexe 1.2.3 : Répartition des items de l'OMR 3 - 2014 (éléments descripteurs de tâches - 1)

	Groupe échelle		type de tâche	Niveau de convocation	Sous type de tâche	Niveau de convocation	de types de tâches convoqués	technique attendues	techniques attendues	niveau d'enseignement	registre d'entrée	registre de sortie	variables
E5MPC2540102	1	OML3a	T_{CP_+}	technique			1	τ_{CP_+}		CE2	EC	EC	
E5MPC2540103	1	OML3a	T_{CP_+}	technique			1	τ_{CP_+}		CE2	EC	EC	
E5MPC510101	0	OML3a	T_{CP_+}	technique			1	τ_{CP_+}		CE2	EC	EC	
E5MPC520201	1	OML3a	T_{CP_-}	technique			1	$\tau_{CP\_-\_écart}$ (ou $\tau_{CP\_-\_num}$)		CE2	EC	EC	
E5MPC510201	2	OML3a	T_{CP_-}	technique			1	$\tau_{CP\_-\_écart}$ (ou $\tau_{CP\_-\_num}$)		CE2	EC	EC	
E5MPC2540402	2	OML3a	T_{CP_-}	technique			1	$\tau_{CP\_-\_écart}$ (ou $\tau_{CP\_-\_num}$)		CE2	EC	EC	
E5MPC2540403	2	OML3a	T_{CP_-}	technique			1	$\tau_{CP\_-\_écart}$ (ou $\tau_{CP\_-\_num}$)		CE2	EC	EC	
E5MPC2540501	2	OML3a	T_{CP_-}	technique			1	$\tau_{CP\_-\_écart}$ (ou $\tau_{CP\_-\_num}$)		CE2	EC	EC	
E5MPC510401	2	OML3a	$T_{CP\_:}$	technique			1	$\tau_{CP\_:}$		CM1	EC	EC	
E5MPC530401	3	OML3a	$T_{CP\_:}$	technique			1	$\tau_{CP\_:}$		CM1	EC	EC	
E5MEC2060101	2	OML3b	T_{CR_+}	technique	T_{CR_-}	technique	2	τ_{CR_+}	τ_{CR_-}	CE1	Schéma	EC	Prog

											&EC		calcul- nb fin
E5MEC2060201	2	OML3b	T_{CR_+}	technique	T_{CR_-}	technique	2	τ_{CR_+}	τ_{CR_-}	CE2	Schéma &EC	EC	Prog calcul- nb fin
E5MPC540401	3	OML3a	$T_{CP\_:}$	technique			1	$\tau_{CP\_:}$		CM1	EC	EC	
E5MTC150401	3	OML3a	$T_{CP\_:}$	technique			1	$\tau_{CP\_:}$		CM1	EC	EC	
E5MTC360301	0	OML3b	$T_{CR\_ODG\_+}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_ODG\_+}$		CE2	EC	EC	
E5MTC360101	2	OML3b	$T_{CR\_ODG\_+}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_ODG\_+}$		CE2	EC	EC	
E5MTC360401	2	OML3b	$T_{CR\_ODG\_+}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_ODG\_+}$		CE2	EC	EC	
E5MTC380101	2	OML3b	$T_{CR\_ODG\_-}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_ODG\_-}$		CM1	EC	EC	
E5MTC380201	2	OML3b	$T_{CR\_ODG\_-}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_ODG\_-}$		CM1	EC	EC	
E5MTC380301	2	OML3b	$T_{CR\_ODG\_-}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_ODG\_-}$		CM1	EC	EC	
E5MTC380401	2	OML3b	$T_{CR\_ODG\_\times}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_ODG\_\times}$		CM1	EC	EC	
E5MTC380501	2	OML3b	$T_{CR\_ODG\_\times}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_ODG\_\times}$		CM1	EC	EC	
E5MTC380601	2	OML3b	$T_{CR\_ODG\_\times}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_ODG\_\times}$		CM1	EC	EC	
E5MPC550101	2	OML3b	$T_{CR\_:}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_:\_dec-epdc}$; $\tau_{CR\_:\_dec-arithm\times}$; $\tau_{CR\_:\_dec-arithm+}$		CM1	LN&EC	EC	moitié
E5MPC550102	3	OML3b	$T_{CR\_:}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_:\_dec-epdc}$; $\tau_{CR\_:\_dec-arithm\times}$; $\tau_{CR\_:\_dec-arithm+}$		CM1	LN&EC	EC	moitié
E5MPC550103	3	OML3b	$T_{CR\_:}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_:\_dec-epdc}$; $\tau_{CR\_:\_dec-arithm\times}$; $\tau_{CR\_:\_dec-arithm+}$		CM1	LN&EC	EC	moitié

E5MPC550104	3	OML3b	$T_{CR\_:}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_:\_dec-epdc}$; τCR_:_dec-arithm× ; τCR_:_dec-arithm+		CM1	LN&EC	EC	moitié
E5MPC550204	3	OML3b	$T_{CR\_\times}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_\times\_dec\_epdc}$		CM1	LN&EC	EC	double
E5MPC550205	3	OML3b	$T_{CR\_\times}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_\times\_dec\_epdc}$		CM1	LN&EC	EC	double
E5MTC360201	3	OML3b	$T_{CR\_ODG\_+}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_ODG\_+}$		CE2	EC	EC	
E5MTC360501	3	OML3b	$T_{CR\_ODG\_+}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_ODG\_+}$		CE2	EC	EC	
E5MTC360601	3	OML3b	$T_{CR\_ODG\_+}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_ODG\_+}$		CE2	EC	EC	
E5MTC380701	3	OML3b	$T_{CR\_ODG\_:}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_ODG\_:}$		CM1	EC	EC	
E5MTC380801	3	OML3b	$T_{CR\_ODG\_:}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_ODG\_:}$		CM1	EC	EC	
E5MTC4301	3	OML3b	T_{CR_+}	TCST			1	$\tau_{CR\_posé}$			EC	EC	
E5MTC4302	3	OML3b	T_{CR_-}	TCST			1	$\tau_{CR\_posé}$			EC	EC	
E5MCC630101	3	OML3b	$T_{CR\_ODG\_\times}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_ODG\_\times}$		CM2	EC	LN & EC	
E5MCC630201	3	OML3b	$T_{CR\_ODG\_\times}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_ODG\_\times}$		CM2	EC	LN & EC	
E5MCC630301	3	OML3b	$T_{CR\_ODG\_\times}$	TCAT			1	$\tau_{CR\_ODG\_\times}$		CM2	EC	LN & EC	
E5MPC2550102	3	OML3a	$T_{CP\_\times}$	technique			1	$\tau_{CP\_\times}$		CE2	EC	EC	
E5MPC2550401	3	OML3a	$T_{CP\_:}$	technique			1	$\tau_{CP\_:}$		CE2	EC	EC	
E5MTC4303	4	OML3b	$T_{CR\_\times}$	TCST			1	$\tau_{CR\_posé}$			EC	EC	
E5MIC060101	0	savoirs décla	savoirs décla						ancien	LN	LN		
E5MIN030101	1	OML3b	TCR_:							ancien	LN&EC	EC	multiple

													de 7
E5MIN030201	2	OML3b	TCR_:							ancien	LN&EC	EC	multiple de8
E5MIN030301	2	OML3b	TCR_:							ancien	LN&EC	EC	multiple de 4
E5MIN030401	2	OML3b	TCR_:							ancien	LN&EC	EC	multiple de 6
E5MIC060301	2	savoirs décla	savoirs décla						ancien	LN	LN		
E5MTN280301	2	OML3b	TCR_×							ancien	LN&EC	EC	quadruple
E5MIC060201	3	savoirs décla							ancien	LN	LN		
E5MIC060401	3	savoirs décla	savoirs décla						ancien	LN	LN		
E5MTN290101	3	OML3b	TCR_:							ancien	LN&EC	EC	tiers
E5MTN290201	3	OML3b	TCR_:							ancien	LN&EC	EC	tiers
E5MPC2540301	4	OML3a	TCP_-	TCAT			1	τCP_-_add_trou ou τCP_-_écart (ou τCP_-_num)		CE2	EC	EC	opération à trou
E5MPC2540302	4	OML3a	TCP_-	TCAT			1	τCP_-_add_trou ou τCP_-_écart (ou τCP_-_num)		CE2	EC	EC	opération à trou
E5MPC2550103	4	OML3a	TCP_×	technique			1	τCP_×		CE2	EC	EC	
E5MPC2550501	4	OML3a	TCP_:	technique			1	τCP_:		CM1	EC	EC	
E5MPC2550502	4	OML3a	TCP_:	technique			1	τCP_:		CM1	EC	EC	
E5MEC2060301	4	OML3b	TCR_+	TCAT	TCR_-	TCAT	3	τCR_+	τCR_- & τCR_:	CE2	Schéma+EC	EC	Prog calcul- nb départ

E5MTN290301	3	OML3b	TCR_:							ancien	LN&EC	EC	tiers
E5MPC2540601	5	OML3a	T_{CP_+}	TCST			1	τ_{CP_+}		CE2	EC	EC	opération à trou
E5MPC2550301	5	OML3a	$T_{CP\_\times}$	RCST			1	$\tau_{CP\_\times}$		CE2	EC	EC	opération à trou
E5MPC2550402	5	OML3a	$T_{CP\_:}$	technique			1	$\tau_{CP\_:}$		CE2	EC	EC	

Annexe 1.2.3 Répartition des items de l'OMR 3 - 2014 (éléments descripteurs de tâches - 2)

	Groupe échelle	taille du nombre	nombre de nombres en jeu	Présence de zéros dans x et : ou de retenues dans + et -	Types de répertoires	Format de question
E5MPC2540102	1	3&4&5	3	oui	complexe	QROC
E5MPC2540103	1	4&4&4&4	4	oui	complexe	QROC
E5MPC510101	0	5&4&2	3	non	simple	QROC
E5MPC520201	1	6&5	2	non	simple	QROC
E5MPC510201	2	4&3	2	oui	complexe	QROC
E5MPC2540402	2	4&4	2	oui	complexe	QROC
E5MPC2540403	2	4&3	2	oui	complexe	QROC
E5MPC2540501	2	4&3	2	oui	complexe	QROC
E5MPC510401	2	3&1	2	non	simple	QROC
E5MPC530401	3	3 & 1	2	oui	simple	QROC
E5MEC2060101	2	1&1&1&1	4	non	simple	QRC
E5MEC2060201	2	1&1&1&3	6	non	simple	QRC
E5MPC540401	3	4 & 2	2	oui	complexe	QROC
E5MTC150401	3	3&1	2	non	simple	QROC

E5MTC360301	0	3	2			QCM
E5MTC360101	2	2	2			QCM
E5MTC360401	2	3	2			QCM
E5MTC380101	2	2				QCM
E5MTC380201	2	2				QCM
E5MTC380301	2	2				QCM
E5MTC380401	2	3				QCM
E5MTC380501	2	2 & 2				QCM
E5MTC380601	2	2 & 1				QCM
E5MPC550101	2	3	1	oui	simple	QROC
E5MPC550102	3	3	1	oui	simple	QROC
E5MPC550103	3	3	1	oui	simple	QROC
E5MPC550104	3	2	1	oui	simple	QROC
E5MPC550204	3	2	1	oui	simple	QROC
E5MPC550205	3	3	1	non	simple	QROC
E5MTC360201	3	2	2			QCM
E5MTC360501	3	3	2			QCM
E5MTC360601	3	3	3			QCM
E5MTC380701	3	2 & 2				QCM

E5MTC380801	3	3&2				QCM
E5MTC4301	3	1*2&6*4& 1*5& 1*6&1*8	10			QRC
E5MTC4302	3	2*1&3*2& 3*3&2*4	10			QRC
E5MCC630101	3	3 & 2	2	non	simple	QCM
E5MCC630201	3	2&2	2	non	simple	QCM
E5MCC630301	3	3&3	2	oui	simple	QCM
E5MPC2550102	3	3 & 2	2	non	complexe	QROC
E5MPC2550401	3	2&1	2	non	simple	QROC
E5MTC4303	4	1*2& 3*3 &5*4 &1*5	10			QRC
E5MIC060101	0	quotient				QCM
E5MIN030101	1	2				QCM
E5MIN030201	2	2				QCM
E5MIN030301	2	2				QCM
E5MIN030401	2	2				QCM
E5MIC060301	2	produit				QCM
E5MTN280301	2	3				QCM
E5MIC060201	3	Somme				QCM

E5MIC060401	3	Différence				QCM
E5MTN290101	3	2				QCM
E5MTN290201	3	2				QCM
E5MPC2540301	4	3&3&4	3	oui	complexe	QRC
E5MPC2540302	4	4&4&5	3	oui	complexe	QRC
E5MPC2550103	4	3 & 3	2	oui	complexe	QROC
E5MPC2550501	4	3&2	2	non	complexe	QROC
E5MPC2550502	4	4&2	2	oui	complexe	QROC
E5MEC2060301	4	1&1& 1&2	6	non	simple	QRC
E5MTN290301	3	2				QCM
E5MPC2540601	5	4&3&4	3	oui	complexe	QRC
E5MPC2550301	5	3&1&4	3	oui	complexe	QRC
E5MPC2550402	5	3&1	2	non	complexe	QROC

ANNEXE 1.3 RÉPARTITION DES ITEMS SELON LES FACTEURS DE COMPLEXITÉ ET LES NIVEAUX DE COMPÉTENCE

Annexe 1.3.1 Répartition pour CEDRE 2008

it2008	Groupe échelle	OML	FDC1	FDC2	NC
T_EDN_02	2	OMR1	1	1	1
T_EDN_03	4	OMR1	1	2	2
T_EDN_05	1	OMR1	1	1	1
T_EDN_06	3	OMR1	1	1	1
T_EDN_11	2	OMR1	1	2	1
T_EDN_14	2	OMR1	1	2	1
T_EDN_18	2	OMR1	1	1	2
T_EDN_17	3	OMR1	1	1	2
T_EDN_19	3	OMR1	1	1	2
T_EDN_20	2	OMR1	1	2	1
T_EDN_21	3	OMR1	1	2	1
T_EDN_22	3	OMR1	1	2	1
T_EDN_23	3	OMR1	1	2	1
T_EDN_24	1	OMR1	1	1	1
T_EDN_26	2	OMR1	1	1	1
T_EDN_25	3	OMR1	1	1	1
T_EDN_30	1	OMR1	1	2	1
T_EDN_31	3	OMR1	1	2	1
T_EDN_32	3	OMR1	1	2	1
T_EDN_33	3	OMR1	1	2	1
P_EDN_01	1	OMR1	1	1	1
P_EDN_03	2	OMR1	1	1	1
P_EDN_02	3	OMR1	1	1	1
P_EDN_04	1	OMR1	1	1	1
P_EDN_05	3	OMR1	1	1	1
P_EDN_06	3	OMR1	1	1	1
P_EDN_09	2	OMR1	1	1	1
P_EDN_07	3	OMR1	1	1	1
P_EDN_08	3	OMR1	1	1	1
P_EDN_10	4	OMR1	2	2	3
P_EDN_11	5	OMR1	2	2	3
CV_EDN_01a	2	OMR1	1	1	2
I_CNEN_01	1	OML2a	0	1	1
I_CNEN_02	1	OML2a	0	1	1
I_CNEN_03	1	OML2a	0	1	1
I_CNEN_04	1	OML2a	0	1	1
I_CNEN_09	1	OML2a	0	1	1
I_CNEN_10	1	OML2a	0	1	1
I_CNEN_11	1	OML2a	0	1	1
T_EDN_44	1	OML2a	1	1	1
T_EDN_45	2	OML2a	1	2	1
T_EDN_46	3	OML2a	1	2	1

T_EDN_47	3	OML2a	1	2	1
T_CNEN_11	1	OML2a	1	1	1
T_CNEN_09	2	OML2a	1	2	1
T_CNEN_10	2	OML2a	1	2	1
T_CNEN_04	3	OML2a	1	1	1
T_CNEN_05	3	OML2a	1	1	1
T_CNEN_06	3	OML2a	1	1	1
T_CNEN_07	3	OML2a	1	1	1
T_CNEN_08	au dela de 5	OML2a	1	2	1
T_CNEN_12a	1	OML2a	0	1	1
T_CNEN_13a	2	OML2a	0	1	1
T_C_23	2	OML2a	1	1	1
T_C_20	3	OML2a	0	1	1
I_EDN_01a	2	OML2c	1	1	1
T_CNEN_39a	2	OML2c	0	1	1
T_CNEN_32	2	OML2c	1	1	1
T_CNEN_33	2	OML2c	1	1	1
T_CNEN_34	2	OML2c	1	1	1
T_CNEN_35	2	OML2c	1	1	1
T_CNEN_37	2	OML2c	0	1	1
T_CNEN_38	1	OML2c	0	1	1
P_CNEN_01	2	OML2c	1	1	1
P_CNEN_02	3	OML2c	1	2	1
P_CNEN_03	3	OML2c	1	2	1
P_CNEN_04	3	OML2c	1	2	1
P_CNEN_05	3	OML2c	1	2	1
P_CNEN_07	1	OML2c	1	2	1
P_CNEN_06	2	OML2c	1	1	1
P_CNEN_08	2	OML2c	1	1	1
P_CNEN_09	2	OML2c	1	1	1
P_CNEN_10	2	OML2c	1	1	1
P_CNEN_11	2	OML2c	1	1	1
P_CNEN_12	2	OML2c	1	1	1
P_CNEN_13	3	OML2c	1	2	1
T_C_34	2	OML3a	1	1	2
T_C_33	3	OML3a	1	1	2
P_C_04	1	OML3a	0	1	1
P_C_05	2	OML3a	0	1	1
P_C_07	2	OML3a	0	1	1
P_C_19	1	OML3a	0	1	1
P_C_18	2	OML3a	0	1	1
P_C_20	2	OML3a	0	1	1
P_C_28	1	OML3a	0	1	1
P_C_32	1	OML3a	0	2	1
P_C_29	3	OML3a	0	1	1
E_C_09	1	OML3b	0	1	1
E_C_15	1	OML3b	0	1	1
E_C_07	2	OML3b	0	1	1
E_C_08	2	OML3b	0	1	1

E_C_10	2	OML3b	0	1	1
E_C_11	2	OML3b	0	1	1
E_C_12	2	OML3b	0	1	1
E_C_13	2	OML3b	0	1	1
E_C_14	2	OML3b	0	1	1
E_C_25	2	OML3b	0	1	1
E_C_06	3	OML3b	0	1	1
E_C_19	3	OML3b	0	2	1
E_C_21	3	OML3b	0	2	1
E_C_22	3	OML3b	0	1	1
E_C_23	3	OML3b	0	2	1
E_C_16	4	OML3b	0	2	1
E_C_18	4	OML3b	0	2	1
E_C_17	5	OML3b	0	2	1
T_C_03	1	OML3b	1	1	2
T_C_01	2	OML3b	1	1	2
T_C_02	2	OML3b	1	1	2
T_C_04	2	OML3b	1	1	2
T_C_05	3	OML3b	1	1	2
T_C_06	3	OML3b	1	1	2
T_C_07	4	OML3b	1	1	2
T_C_08	4	OML3b	1	2	2
T_C_09	4	OML3b	1	1	2
T_C_10	4	OML3b	1	1	2
T_C_11	4	OML3b	1	1	2
T_C_14	2	OML3b	1	1	2
T_C_15	2	OML3b	1	1	2
T_C_16	2	OML3b	1	1	2
T_C_12	3	OML3b	1	1	2
T_C_13	3	OML3b	1	1	2
T_C_17	3	OML3b	1	1	2
T_C_18	3	OML3b	1	1	2
T_C_19	3	OML3b	1	1	2
T_C_30	2	OML3b	1	2	1
T_C_31	2	OML3b	1	2	1
T_C_32	2	OML3b	1	2	1
T_C_29	4	OML3b	1	2	1
T_C_35	3	OML3b	2	1	2
T_C_36	3	OML3b	2	1	2
T_C_37	3	OML3b	2	1	2
P_C_08	2	OML3b	0	1	1
P_C_09	3	OML3b	0	1	1
P_C_10	3	OML3b	0	1	1
P_C_11	3	OML3b	0	1	1
P_C_15	3	OML3b	0	1	1
P_C_16	3	OML3b	0	1	1
P_C_33	1	OML3b	0	1	1
P_C_35	1	OML3b	0	1	1
P_C_34	2	OML3b	0	1	1
P_C_36	2	OML3b	0	1	1

P_C_37	2	OML3b	0	1	1
CV_C_02	3	OML3b	1	1	2
CV_C_03	3	OML3b	1	1	2
CV_C_04	4	OML3b	1	1	2
I_CNEN_05	1	OML3b	1	1	1
I_CNEN_06	2	OML3b	1	1	1
I_CNEN_07	2	OML3b	1	1	1
I_CNEN_08	2	OML3b	1	1	1
I_C_01	3	savoir décla	0	1	1
I_C_06	3	savoir décla	0	1	1
I_C_02	4	savoir décla	2	1	1
I_C_04	4	savoir décla	0	1	1
I_C_05	4	savoir décla	2	1	1
I_C_07	1	savoir décla	0	1	1
I_C_09	2	savoir décla	0	1	1
I_C_08	3	savoir décla	0	1	1
I_C_10	3	savoir décla	0	1	1
I_C_11	2	savoir décla	0	1	1
T_CNEN_03a	1	OML3b	1	1	1
T_CNEN_02a	2	OML3b	1	1	1
T_CNEN_01a	3	OML3b	1	1	1
T_CNEN_14	2	OML3b	1	1	1
T_CNEN_15	2	OML3b	1	1	1
T_CNEN_16	2	OML3b	1	1	1
T_CNEN_19	2	OML3b	1	1	1
T_CNEN_17	3	OML3b	1	1	1
T_CNEN_18	3	OML3b	1	1	1
T_CNEN_20	3	OML3b	1	1	1
T_CNEN_21	3	OML3b	1	1	1
T_CNEN_22	3	OML3b	1	1	1
T_CNEN_23	3	OML3b	1	1	1
T_CNEN_24	3	OML3b	1	1	1
T_CNEN_25	3	OML3b	1	1	1
T_CNEN_26	1	OML3b	1	1	1
T_CNEN_27	1	OML3b	1	1	1
T_CNEN_30	1	OML3b	1	1	1
T_CNEN_31	1	OML3b	1	1	1
T_CNEN_28	2	OML3b	1	1	1
T_CNEN_29	2	OML3b	1	1	1

Annexe 1.3.2 Répartition pour CEDRE 2014

it14	Groupe échelle	OMR	nombre de types de tâches convoqués	FDC1	FDC2	NC
E5MTC090101	0	OMR 1	1	1	1	1
E5MTC160101	0	OMR 1	2	1	1	1
E5MTC150101	1	OMR 1	2	1	2	1
E5MPC450301	2	OMR 1	3	1	1	1
E5MTC160301	2	OMR 1	2	1	1	1
E5MPC450101	3	OMR 1	2	1	1	1
E5MPC450201	3	OMR 1	2	1	1	1
E5MTC090201	3	OMR 1	1	1	1	1
E5MTC150201	3	OMR 1	3	1	2	1
E5MTC150301	3	OMR 1	3	1	2	1
E5MTC160201	3	OMR 1	2	1	1	1
E5MTC1900101	4	OMR 1	3	1	1	1
E5MPC2550701	5	OMR 1	2	1	2	2
E5MTO1910401	5	OMR 1	2	2	3	3
E5MTO1910501	6	OMR 1	4	2	3	3
E5MIN040301	0	OML2a	1	0	1	1
E5MTN250101	1	OML2a	1	0	1	1
E5MTC390101	2	OML2a	1	0	1	1
E5MTC390401	2	OML2a	1	1	1	1
E5MTN1960101	3	OML2a	1	2	1	1
E5MTN1960201	3	OML2a	1	2	1	1
E5MTN1960301	3	OML2a	1	2	1	1
E5MIN910101	0	OML2c	1	0	1	1
E5MTN470102	3	OML2c	1	1	1	1
E5MTN470103	3	OML2c	1	1	2	1
E5MTN470104	3	OML2c	1	1	2	1
E5MTN470105	3	OML2c	1	1	2	1
E5MTN2000101	2	OML2b	1	1	1	1
E5MTN2000201	2	OML2b	1	1	2	1
E5MTN2000301	2	OML2b	1	1	2	1
E5MTN1450101	2	OML2c	1	1	1	2
E5MTN1450201	2	OML2c	1	1	1	2
E5MTN1450301	2	OML2c	1	2	1	2
E5MTN2400101	3	OML2a	1	1	1	1
E5MTN2010201	5	OML2a	1	1	2	1
E5MTN2010301	5	OML2a	1	1	2	1
E5MPC2540102	1	OML3a	1	0	1	1
E5MPC2540103	1	OML3a	1	0	1	1
E5MPC510101	0	OML3a	1	0	1	1
E5MPC520201	1	OML3a	1	0	1	1
E5MPC510201	2	OML3a	1	0	1	1
E5MPC2540402	2	OML3a	1	0	1	1
E5MPC2540403	2	OML3a	1	0	1	1
E5MPC2540501	2	OML3a	1	0	1	1
E5MPC510401	2	OML3a	1	0	1	1

E5MPC530401	3	OML3a	1	0	1	1
E5MEC2060101	2	OML3b	2	2	1	2
E5MEC2060201	2	OML3b	2	2	1	2
E5MPC540401	3	OML3a	1	0	2	1
E5MTC150401	3	OML3a	1	0	1	1
E5MTC360301	0	OML3b	1	1	1	2
E5MTC360101	2	OML3b	1	1	1	2
E5MTC360401	2	OML3b	1	1	1	2
E5MTC380101	2	OML3b	1	1	1	2
E5MTC380201	2	OML3b	1	1	1	2
E5MTC380301	2	OML3b	1	1	1	2
E5MTC380401	2	OML3b	1	1	1	2
E5MTC380501	2	OML3b	1	1	1	2
E5MTC380601	2	OML3b	1	1	1	2
E5MPC550101	2	OML3b	1	0	1	1
E5MPC550102	3	OML3b	1	0	1	1
E5MPC550103	3	OML3b	1	0	1	1
E5MPC550104	3	OML3b	1	0	1	1
E5MPC550204	3	OML3b	1	0	1	1
E5MPC550205	3	OML3b	1	0	1	1
E5MTC360201	3	OML3b	1	1	1	2
E5MTC360501	3	OML3b	1	1	1	2
E5MTC360601	3	OML3b	1	1	1	2
E5MTC380701	3	OML3b	1	1	1	2
E5MTC380801	3	OML3b	1	1	1	2
E5MTC4301	3	OML3b	1	2	1	2
E5MTC4302	3	OML3b	1	2	1	2
E5MCC630101	3	OML3b	1	1	2	2
E5MCC630201	3	OML3b	1	1	2	2
E5MCC630301	3	OML3b	1	1	2	2
E5MPC2550102	3	OML3a	1	0	2	1
E5MPC2550401	3	OML3a	1	0	1	1
E5MTC4303	4	OML3b	1	2	1	2
E5MIC060101	0	savoirs décla	1	0	1	1
E5MIN030101	1	OML3b	1	1	1	1
E5MIN030201	2	OML3b	1	1	1	1
E5MIN030301	2	OML3b	1	1	1	1
E5MIN030401	2	OML3b	1	1	1	1
E5MIC060301	2	savoirs décla	1	0	1	1
E5MTN280301	2	OML3b	1	1	1	1
E5MIC060201	3	savoirs décla	1	0	1	1
E5MIC060401	3	savoirs décla	1	0	1	1
E5MTN290101	3	OML3b	1	1	2	1
E5MTN290201	3	OML3b	1	1	2	1
E5MPC2540301	4	OML3a	1	0	2	2
E5MPC2540302	4	OML3a	1	0	2	2

E5MPC2550103	4	OML3a	1	0	2	1
E5MPC2550501	4	OML3a	1	0	2	1
E5MPC2550502	4	OML3a	1	0	2	1
E5MEC2060301	4	OML3b	3	2	2	3
E5MTN290301	3	OML3b	1	1	2	1
E5MPC2540601	5	OML3a	1	0	2	2
E5MPC2550301	5	OML3a	1	1	3	2
E5MPC2550402	5	OML3a	1	0	2	1

Ces tableaux de synthèse par OMR permettent de préciser les répartitions données dans les tableaux 11 et 12 du paragraphe III.6 consacré à la complexité.

ANNEXE 1.4 : RÉPARTITION DES ITEMS SELON LES FACTEURS DE COMPLEXITÉ ET LES NIVEAUX DE COMPÉTENCES

Répartition des items de l'OMR 1

Évaluation CEDRE 2008

	FC1 = 0			FC1 = 1			FC1=2			Total
	FC2 = 1	FC2 = 2	FC2 = 3	FC2 = 1	FC2 = 2	FC2 = 3	FC2 = 1	FC2 = 2	FC2 = 3	
NC1	0	0	0	15	10	0	0	0	0	25
NC2	0	0	0	4	1	0	0	0	0	5
NC3	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2
Total	0	0	0	19	11	0	0	2	0	32

Répartition des items de CEDRE 2008 selon les facteurs de complexité et les niveaux de compétences

Évaluation CEDRE 2014

	FC1 = 0			FC1 = 1			FC1=2			Total
	FC2 = 1	FC2 = 2	FC2 = 3	FC2 = 1	FC2 = 2	FC2 = 3	FC2 = 1	FC2 = 2	FC2 = 3	
NC1	0	0	0	9	3	0	0	0	0	12
NC2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
NC3	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
Total	0	0	0	9	4	0	0	0	2	15

Répartition des items de CEDRE 2014 selon les facteurs de complexité et les niveaux de compétences

Répartition des items de l'OMR2

Évaluation CEDRE 2008

	FC1 = 0			FC1 = 1			FC1=2			Total
	FC2 = 1	FC2 = 2	FC2 = 3	FC2 = 1	FC2 = 2	FC2 = 3	FC2 = 1	FC2 = 2	FC2 = 3	
NC1	13	0	0	19	12	0	0	0	0	44
NC2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NC3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	13	0	0	19	12	0	0	0	0	44

Répartition des items de CEDRE 2008 selon les facteurs de complexité et les niveaux de compétences

Évaluation CEDRE 2014

	FC1 = 0			FC1 = 1			FC1=2			Total
	FC2 = 1	FC2 = 2	FC2 = 3	FC2 = 1	FC2 = 2	FC2 = 3	FC2 = 1	FC2 = 2	FC2 = 3	
NC1	4	0	0	4	7	0	3	0	0	18
NC2	0	0	0	2	0	0	1	0	0	3
NC3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	4	0	0	6	7	0	4	0	0	21

Répartition des items de CEDRE 2014 selon les facteurs de complexité et les niveaux de compétences

Répartition des items de l'OMR 3

Évaluation CEDRE 2008

	FC1 = 0			FC1 = 1			FC1=2			Total
	FC2 = 1	FC2 = 2	FC2 = 3	FC2 = 1	FC2 = 2	FC2 = 3	FC2 = 1	FC2 = 2	FC2 = 3	
NC1	31	7	0	0	4	0	0	0	0	42
NC2	0	0	0	23	1	0	3	0	0	27
NC3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	31	7	0	23	5	0	3	0	0	69

Répartition des items de CEDRE 2008 selon les facteurs de complexité et les niveaux de compétences

Évaluation CEDRE 2014

	FC1 = 0			FC1 = 1			FC1=2			Total
	FC2 = 1	FC2 = 2	FC2 = 3	FC2 = 1	FC2 = 2	FC2 = 3	FC2 = 1	FC2 = 2	FC2 = 3	
NC1	18	6	0	0	0	0	0	0	0	24
NC2	0	3	0	14	3	1	5	0	0	26
NC3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
Total	18	9	0	14	3	1	5	1		51

Répartition des items de CEDRE 2014 selon les facteurs de complexité et les niveaux de compétences

ANNEXE 2 : RÉPARTITION DES TÂCHES DANS LES GROUPES DE L'ÉCHELLE

Reprise des niveaux d'intervention des types de tâches (Niv Inter):

0 = technique ; 1 (t-convoqué sans choix de technique ; objet de savoir ancien) ; 2 (t-convoqué sans choix de technique ; objet de savoir nouveau) ; 3 (t-convoqué avec choix de technique ; objet de savoir ancien) ; 4 (t-convoqué avec choix de technique ; objet de savoir nouveau) ; 5 (r-convoqué sans choix de technique ; objet de savoir ancien) ; 6 (r-convoqué sans choix de technique ; objet de savoir nouveau) ; 7 (r-convoqué avec choix de technique ; objet de savoir ancien) ; 8 (r-convoqué avec choix de technique ; objet de savoir nouveau)

Il n'y a pas de hiérarchie entre les tâches sur les différentes lignes du tableau

ANNEXE 2.1 : RÉPARTITION DES ITEMS SELON LES GROUPES DE L'ÉCHELLE

ANNEXE 2.1.1 : RÉPARTITION DES ITEMS CEDRE 2008 SELON LES GROUPES DE L'ÉCHELLE ET LES TYPES DE TÂCHES

	OMR1		OMR2						OMR3				
	OMR1	Niv Inter	OML2A	Niv Inter	OML2B	Niv Inter	OML2C	Niv Inter	OML3A	Niv Inter	OML3B	Niv Inter	Savoirs déclaratifs
0													
Groupe 1	$T_{RP\_\times}$	0	$T_{Tnp/ec}$	0			T_{comp}	0	T_{CP_+}	0	T_{CR_+}	0	Sav. décla
	$T_{RP\_\times}$	0	$T_{Tnp/ec}$	0			T_{AR}	1	$T_{CP\_\times}$	0	T_{CR_+}	0	
	$T_{RP\_\times}$	1	$T_{Tnp/ec}$	0					$T_{CP\_:}$	0	$T_{CR\_ODG\_+}$	1	
	$T_{RP\_\times}$	0	$T_{Tnp/ec}$	0					$T_{CP\_:}$	0	T_{CR_-}	0	
	$T_{RP\_\times}$	0	$T_{Tnp/ec}$	0							T_{CR_-}	0	
			$T_{Tnp/ec}$	0							TCR_×		
			$T_{Tnp/ec}$	0							TCR_ :		
			$T_{Teunc/ec}$	0							TCR_×		
			T_{CNd}	0							TCR_×		
											TCR_ :		
			$T_{Tec/eapdc}$	0							TCR_ :		
	T_{RP_Ass}	0	TTeunc/ec	0			T_R	0	$T_{CP\_:}$	1	TCR_×	3	Sav. décla

	T_{RP_Ass}	0	T_{CNd}	0			T_{comp}	0	T_{CP_-}	0	$T_{CR\_\times}$	4	Sav. décla
	T_{RP_Ass}	0	T_{CNd}	0			T_{AR}	1	$T_{CP\_:}$	0	T_{CR_+}	0	
	T_{RP_+}	1	$T_{Tec/epdc}$	0			T_{AR}	1	T_{CP_-}	0	T_{CR_-}	2	
	T_{RP_+}	1	T_{CNd}	0			T_{AR}	1	$T_{CP\_:}$	0	T_{CR_-}	0	
	$T_{RP\_\times}$& T_{RP_+}	0					T_{AR}	1			$T_{CR\_\times}$	1	
	$T_{RP\_\times}$& T_{RP_+}	0					T_{D_DG}	0			$T_{CR\_\times}$	0	
	T_{RP_+}	2					T_{AR}	1			T_{CR_+}	0	
	T_{RP_Ass}	2					T_{AR}	1			$T_{CR\_ODG\_+}$	2	
							T_{AR}	1			$T_{CR\_ODG\_+}$	2	
							T_{AR}	1			$T_{CR\_ODG\_+}$	2	
							T_{AR}	1			$T_{CR\_ODG\_-}$	2	
							T_{AR}	1			$T_{CR\_ODG\_\times}$	2	
							T_{AR}	1			$T_{CR\_ODG\_\times}$	2	
											$T_{CR\_:}$	2	
											$T_{CR\_:}$	2	
											$T_{CR\_:}$	2	
											$T_{CR\_:}$	2	
											T_{CR_-}	0	
											T_{CR_-}	0	
											T_{CR_-}	0	
											$T_{CR\_:}$		
											$T_{CR\_\times}$		
											$T_{CR\_\times}$		
											$T_{CR\_\times}$		
											$T_{CR\_:}$		
											$T_{CR\_:}$		
											$T_{CR\_:}$		
											$T_{CR\_:}$		
											$T_{CR\_\times}$		
											$T_{CR\_\times}$		

											$T_{CR\_:}$		
Groupe 3	$T_{RP\_\times}$	0	$T_{Teunc/ec}$				T_{AR}	1	T_{CP_-}	3	$T_{CR\_\times}$	3	Sav. décla
	$T_{RP\_\times}$ &T_{RP_+}	0	$T_{Teunc/ec}$				T_{AR}	1	T_{CP_+}	0	$T_{CR\_\times}$	4	Sav. décla
	$T_{RP\_\times}$ &T_{RP_+}	0	T_{CNd}	0			T_{AR}	1			T_{CR_-}	3	Sav. décla
	T_{RP_+}	1	T_{CNd}	0			T_{AR}	1			T_{CR_-}	3	Sav. décla
	T_{RP_+}	1	T_{CNd}	0			T_{AR}	1			$T_{CR\_:}$	4	Sav. décla
	$T_{RP\_\times}$ &T_{RP_+}	0	T_{CNd}	0							$T_{CR\_ODG\_+}$	3	Sav. décla
	$T_{RP\_\times}$ &T_{RP_+}	0	T_{CNd}	0							$T_{CR\_ODG\_+}$	3	
	T_{RP_+}	1									$T_{CR\_ODG\_-}$	3	
	$T_{RP\_\times}$ &T_{RP_+}	0									$T_{CR\_ODG\_-}$	3	
	T_{RP_+}	1									$T_{CR\_ODG\_\times}$	3	
	T_{RP_+}	1									$T_{CR\_ODG\_:}$	3	
	$T_{RP\_\times}$	2									$T_{CR\_ODG\_:}$	3	
	$T_{RP\_\times}$	2									T_{CR_+}	2	
	T_{RP_+}	2									T_{CR_-}	2	
	T_{RP_+}	2									$T_{CR\_\times}$	2	
											$T_{CR\_:}$	3	
											$T_{CR\_:}$	3	
											$T_{CR\_:}$	3	
											$T_{CR\_\times}$	3	
											$T_{CR\_\times}$	3	
											$T_{CR\_ODG\_\times}$	4	
											$T_{CR\_ODG\_\times}$	4	
Groupe 4	$T_{RP\_\times}$	1									$T_{CR\_\times}$	4	Sav. décla
	T_{RP_Ass}	1									$T_{CR\_\times}$	4	Sav. décla
											$T_{CR\_:}$	3	

											TCR_:	3	
											TCR_:	3	
											TCR_:	3	
											TCR_:	3	
											TCR_:	3	
											TCR_ODG_×	3	
											TCR_:		
											TCR_:		
											TCR_:		
											TCR_×		
											TCR_×		
											TCR_:		
											TCR_×		
											TCR_×		
											TCR_:		
											TCR_:		
											TCR_:		
											TCR_×		
											TCR_×		
											TCR_×		
5	TRP_×										TCR_×	4	
6			TCNd	0									

ANNEXE 2.1.2 : RÉPARTITION DES ITEMS CEDRE 2014 SELON LES GROUPES DE L'ÉCHELLE ET LES TYPES DE TÂCHES

	OML1		OML2						OML3				
	O ML1	Niv Inter	OML2A	Niv Inter	OML2B	Niv Inter	OML2C	Niv Inter	OML3A	Niv Inter	OML3B	Niv Inter	Savoirs déclaratifs
0	$T_{RP\_\times}$	0	$T_{Tnp/ec}$	0					T_{CP_+}	0	$T_{CR\_ODG\_+}$	2	Sav. décla
0	T_{RP_+}	0	T_{D_DG}	0									
1	T_{RP_+}	0	TTec/eapdc	0					T_{CP_+}	0	$T_{CR\_:}$		
1									T_{CP_+}	0			
1									T_{CP_-}	0			
2	$T_{RP\_\times}$	0	TCNd	0	TDc	2	TR	1	T_{CP_-}	0	T_{CR_+}	0	Sav. décla
2	T_{RP_+}	1	TCNd	0	TDc	2	TR	1	T_{CP_-}	0	T_{CR_+}	0	
2					TDc	2	TR	1	T_{CP_-}	0	$T_{CR\_:}$	2	
2									T_{CP_-}	0	$T_{CR\_ODG\_+}$	2	
2									$T_{CP\_:}$	0	$T_{CR\_ODG\_+}$	2	
2											$T_{CR\_ODG\_-}$	2	
2											$T_{CR\_ODG\_-}$	2	
2											$T_{CR\_ODG\_-}$	2	
2											$T_{CR\_ODG\_\times}$	2	
2											$T_{CR\_ODG\_\times}$	2	
											$T_{CR\_ODG\_\times}$	2	
											$T_{CR\_:}$	0	
											$T_{CR\_:}$	0	
											$T_{CR\_:}$	0	
2											$T_{CR\_\times}$	0	
3	$T_{RP\_\times}$	2	$T_{Tnp/ec}$	0			TAR	1	$T_{CP\_\times}$	0	$T_{CR\_:}$	2	Sav. décla
3	$T_{RP\_\times}$	2	$T_{Tnp/ec}$	0			TAR	1	$T_{CP\_:}$	0	$T_{CR\_:}$	2	Sav. décla
3	$T_{RP\_\times}$	0	$T_{Tnp/ec}$	0			TAR	1	$T_{CP\_:}$	0	$T_{CR\_:}$	2	
3	$T_{RP\_\times}$&T_{RP}	2	TTec/np	0			TAR	1	$T_{CP\_:}$	0	$T_{CR\_\times}$	2	

	$_{\_+}$												
3	$T_{RP\_\times}$ & T_{RP_+}	2									$T_{CR\_\times}$	2	
3	T_{RP_+}	1									$T_{CR\_ODG\_+}$	2	
3											$T_{CR\_ODG\_+}$	2	
3											$T_{CR\_ODG\_+}$	2	
3											$T_{CR\_ODG\_:}$	2	
3											$T_{CR\_ODG\_:}$	2	
3											T_{CR_+}	1	
3											T_{CR_-}	1	
3											$T_{CR\_ODG\_\times}$	4	
3											$T_{CR\_ODG\_\times}$	4	
											$T_{CR\_ODG\_\times}$	4	
											$T_{CR\_:}$	0	
											$T_{CR\_:}$	0	
3											$T_{CR\_:}$	0	
4	T_{RP_+}	2							T_{CP_-}	2	T_{CR_+}	2	
4									T_{CP_-}	2	$T_{CR\_\times}$	1	
4									$T_{CP\_\times}$	0			
4									$T_{CP\_:}$	0			
4									$T_{CP\_:}$	0			
5	$T_{RP\_\times}$	2	$T_{Teun/ec}$	0					T_{CP_+}	1			
5	$T_{RP\_\times}$ & T_{RP_+}	1	$T_{Teun/ec}$	0					$T_{CP\_\times}$	3			
5									$T_{CP\_:}$	0			
6	$T_{RP\_\times}$& T_{RP_+}	6											

ANNEXE 2.2 : RÉPARTITION DES ITEMS DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES SELON LES TYPES DE PROBLÈMES

Groupe échelle	type de tâche	Niveau de convocation	Sous type de tâche	Niveau de convocation	Sous type de tâche	Niveau de convocation	nombre de types de tâches convoqués	Type de problème	Calcul posé ou réfléchi
1	$T_{RP\_\times}$	technique	calcul mental	technique			1	Mult	CR immédiat
1	T_{RP_+}	technique	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	Compo_Tout	CR immédiat
1	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	Transf_Ei	CR immédiat
1	T_{RP_+}	technique	T_{CR_+}	technique			2	Compo_tout	CR immédiat
1	T_{RP_+}	technique	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	Compo_Tout	CR immédiat
2	$T_{RP\_\times}$	technique					1	Compa_:_Ef	
2	T_{RP_+}	technique					1	Compa+_Ei	
2	T_{RP_+}	technique					1	Transf+_Ei	
2	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT	T_{CP_+} ou T_{CR_+}		2	Transf_Ei	CR immédiat
2	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	Compo_Partie	CR possible
2	$T_{RP\_\times}$	technique	T_{RP_+}	technique	T_{CR_+}	technique	3	Compo_Tout & Mult	CR immédiat
2	$T_{RP\_\times}$	technique	T_{RP_+}	technique	T_{CR_+}	technique	3	Compo_Tout &Mult	CR immédiat
2	TRP_+	TCAT					1	Transf_Ef	
2	T_{RP_+}	TCAT	T_{CR_-} ou T_{CR_-}	TCAT			2	Transf-_Ei	CR immédiat
3	$T_{RP\_\times}$	technique	calcul mental	technique			1	Div Quot_ Nb part	CR immédiat

3	$T_{RP\_\times}$	technique	T_{RP_+}	TCAT	T_{CR_+} & $T_{CR\_\times}$	technique	3	Mult & Transf_Transf	CR possible
3	$T_{RP\_\times}$	technique	T_{RP_+}	TCAT	T_{CR_+} & $T_{CR\_\times}$	technique	3	Mult & Transf_Ei	CR possible
3	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	Transf_Ei	CR possible
3	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	Compo_Partie	CR immédiat
3	$T_{RP\_\times}$	technique	T_{RP_+}	TCAT	T_{CR_+} & $T_{CR\_\times}$	technique	3	Mult & Transf_Transf	CR possible
3	$T_{RP\_\times}$	technique	T_{RP_+}	TCAT	T_{CR_+} & $T_{CR\_\times}$	technique	3	Mult & Transf_Ei	CR possible
3	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	Transf_Ei	CR possible
3	$T_{RP\_\times}$	technique	T_{RP_+}	technique	T_{CR_+} & $T_{CR\_\times}$	technique	3	Compo_Tout & Mult	CR possible
3	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	Compo_Partie	CR immédiat
3	T_{RP_+}	TCST	T_{CP_+} ou T_{CR_+}	TCAT			2	Compo_Partie	CR possible
3	$T_{RP\_\times}$	TCAT	$T_{CP\_:}$ ou $T_{CR\_:}$	TCAT			2	Div Part_ Val part	CR possible
3	$T_{RP\_\times}$	TCAT	$T_{CP\_:}$	TCAT			2	Div Part_ Val part	CR difficile
3	T_{RP_+}	TCAT	T_{CR_-} ou T_{CR_+}	TCAT			2	Transf+_Ei	CR immédiat
3	T_{RP_+}	TCAT	T_{CR_-} ou T_{CR_-}	TCAT			2	Compa+_Ef	CR immédiat
4	$T_{RP\_\times}$	technique	T_{RP_+}	technique			2	Mult&Compo_Tout	
4	T_{conv_RP}	TCST					1	Div Part_Nbparts	
5	$T_{RP\_\times}$	TCST	calcul mental	technique			1	Div Part_Val_Part	calcul mental

ANNEXE 2.3 : RÉPARTITION DES ITEMS 2008 ET 2014 DE L'OMR 1 SELON LE TYPE DE PROBLÈMES

	CEDRE 2008		CEDRE 2014	
	Type de tâche	Type de problèmes	Type de tâche	Type de problèmes
0			$T_{RP\_\times}$	Mult
			T_{RP_+}	Compo_Tout
1 1	$T_{RP\_\times}$	Mult	T_{RP_+}	Transf_Ei
	T_{RP_+}	Compo_Tout		
	T_{RP_+}	Transf_Ei		
	T_{RP_+}	Compo_tout		
	T_{RP_+}	Compo_Tout		
2 2	$T_{RP\_\times}$	Compa_:_Ef	$T_{RP\_\times}$& T_{RP_+}	Compo_Tout &Mult
	T_{RP_+}	Compa+_Ei	T_{RP_+}	Compo_Partie
	T_{RP_+}	Transf+_Ei		
	T_{RP_+}	Transf_Ei		
	T_{RP_+}	Compo_Partie		
	$T_{RP\_\times}$& T_{RP_+}	Compo_Tout & Mult		
	$T_{RP\_\times}$& T_{RP_+}	Compo_Tout &Mult		
	T_{RP_+}	Transf_Ef		
	T_{RP_+}	Transf-_Ei		
3	$T_{RP\_\times}$	Div Quot_ Nb part	$T_{RP\_\times}$	Div Part_ Val part
	$T_{RP\_\times}$ &T_{RP_+}	Mult & Transf_Transf	$T_{RP\_\times}$	Div Part_ Val part
	$T_{RP\_\times}$ &T_{RP_+}	Mult & Transf_Ei	$T_{RP\_\times}$	Div Quot_ Nb part
	T_{RP_+}	Transf_Ei	$T_{RP\_\times}$& T_{RP_+}	Mult & Transf_Transf
	T_{RP_+}	Compo_Partie	$T_{RP\_\times}$ & T_{RP_+}	Mult & Transf_Ei
	$T_{RP\_\times}$ &T_{RP_+}	Mult & Transf_Transf	T_{RP_+}	Compo_Partie
	$T_{RP\_\times}$ &T_{RP_+}	Mult & Transf_Ei		
	T_{RP_+}	Transf_Ei		
	$T_{RP\_\times}$ &T_{RP_+}	Compo_Tout & Mult		
	T_{RP_+}	Compo_Partie		

	T_{RP_+}	Compo_Partie		
	$T_{RP\_\times}$	Div Part_ Val part		
	$T_{RP\_\times}$	Div Part_ Val part		
	T_{RP_+}	Transf+_Ei		
	T_{RP_+}	Compa+_Ef		
4	$T_{RP\_\times}$&T_{RP_+}	Mult&Compo_Tout	T_{RP_+}	Compo_partie
4	Tconv_RP	Div Part_Nbparts		
5	TRP_×	Div Part_Val_Part	$T_{RP\_\times}$	Div Quot_ Nb part + 1
5			$T_{RP\_\times}$&T_{RP_+}	Compo_Partie & Div_valPart & Mult
6			$T_{RP\_\times}$&T_{RP_+}	Compo_Partie & Div_valPart & Mult

ANNEXE 2.4 : RÉPARTITION DES ITEMS 2008 ET 2014 DE L'OMR 2 SELON LE TYPE DE TÂCHES ET LE NIVEAU DE CONVOCATION

groupe	CEDRE 2008		
1	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique
	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique
	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique
	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique
	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique
	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique
	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique
	OML2a	T_{Teunc}/ec	technique
	OML2a	T_{CNd}	technique
	OML2a	$T_{Tec/eapdc}$	technique
	OML2c	T_{comp}	technique
	OML2c	T_{AR}	TCST
2	OML2a	T_{Teunc}/ec	technique
	OML2a	T_{CNd}	technique
	OML2a	T_{CNd}	technique
	OML2a	$T_{Tec/epdc}$	technique
	OML2a	T_{CNd}	technique
	OML2c	T_R	technique
	OML2c	T_{comp}	technique
	OML2c	T_{AR}	TCST
	OML2c	T_{AR}	TCST
	OML2c	T_{AR}	TCST
	OML2c	T_{AR}	TCST
	OML2c	T_{D_DG}	technique
	OML2c	T_{AR}	TCST
	OML2c	T_{AR}	TCST

groupe	CEDRE2014		
0	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique
	OML2c	T_{D_DG}	technique
1	OML2a	$T_{Tec/eapdc}$	technique
2	OML2a	T_{CNd}	technique
	OML2a	T_{CNd}	technique
	OML2b	T_{Dc}	TCAT
	OML2b	T_{Dc}	TCAT
	OML2b	T_{Dc}	TCAT
	OML2c	T_R	TCST
	OML2c	T_R	TCST
	OML2c	T_R	TCST
3	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique
	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique
	OML2a	$T_{Tnp/ec}$	technique
	OML2a	$T_{Tec/np}$	technique
	OML2c	T_{AR}	TCST
	OML2c	T_{AR}	TCST
	OML2c	T_{AR}	TCST
	OML2c	T_{AR}	TCST
5	OML2a	$T_{Teun/ec}$	technique
	OML2a	$T_{Teun/ec}$	technique

	OML2c	T_{AR}	TCST		
	OML2c	T_{AR}	TCST		
	OML2c	T_{AR}	TCST		
	OML2c	T_{AR}	TCST		
	OML2c	T_{AR}	TCST		
3	OML2a	T_{Teunc}/ec	technique		
	OML2a	T_{Teunc}/ec	technique		
	OML2a	T_{CNd}	technique		
	OML2a	T_{CNd}	technique		
	OML2a	T_{CNd}	technique		
	OML2a	T_{CNd}	technique		
	OML2a	T_{CNd}	technique		
	OML2c	T_{AR}	TCST		
	OML2c	T_{AR}	TCST		
	OML2c	T_{AR}	TCST		
	OML2c	T_{AR}	TCST		
	OML2c	T_{AR}	TCST		
6	OML2a	T_{CNd}	technique		

ANNEXE 2.5 : RÉPARTITION DES ITEMS 2008 ET 2014 DE L'OMR 3 SELON LE TYPE DE TÂCHES ET LE NIVEAU DE CONVOCATION

Annexe 2.5.1 Calcul posé

groupe	**CEDRE 2008**		
	OML3a	TCP_+	technique
1	OML3a	TCP_×	technique
1	OML3a	TCP_:	technique
	OML3a	TCP_:	technique
	OML3a	TCP_:	TCAT
	OML3a	TCP_-	technique
2	OML3a	TCP_:	technique
	OML3a	TCP_-	technique
	OML3a	TCP_:	technique
3	OML3a	TCP_-	TCAT
3	OML3a	TCP_+	technique

groupe	**CEDRE2014**		
0	OML3a	TCP_+	technique
1	OML3a	TCP_+	technique
1	OML3a	TCP_+	technique
	OML3a	TCP_-	technique
	OML3a	TCP_-	technique
2	OML3a	TCP_-	technique
2	OML3a	TCP_-	technique
	OML3a	TCP_-	technique
	OML3a	TCP_:	technique
	OML3a	TCP_×	technique
3	OML3a	TCP_:	technique
3	OML3a	TCP_:	technique
	OML3a	TCP_:	technique
	OML3a	TCP_:	technique
	OML3a	TCP_-	TCAT
4	OML3a	TCP_-	TCAT
	OML3a	TCP_×	technique
4	OML3a	TCP_:	technique
	OML3a	TCP_:	technique
5	OML3a	TCP_+	TCST
	OML3a	TCP_×	RCST
	OML3a	TCP_:	technique

Annexe 2.5.2 Répartition des items de calcul réfléchi en support papier

groupe	CEDRE 2008				groupe	CEDRE2014		
1	OML3b	TCR_+	technique		0	OML3b	TCR_ODG_+	TCAT
	OML3b	TCR_+	technique		2	OML3b	TCR_+	technique
	OML3b	TCR_ODG_+	TCAT			OML3b	TCR_+	technique
	OML3b	TCR_-	technique			OML3b	TCR_:	TCAT
	OML3b	TCR_-	technique			OML3b	TCR_ODG_+	TCAT
2	OML3b	TCR_×	TCAT			OML3b	TCR_ODG_+	TCAT
	OML3b	TCR_×	TCAT			OML3b	TCR_ODG_-	TCAT
	OML3b	TCR_+	technique			OML3b	TCR_ODG_-	TCAT
	OML3b	TCR_-	TCAT			OML3b	TCR_ODG_-	TCAT
	OML3b	TCR_-	technique			OML3b	TCR_ODG_×	TCAT
	OML3b	TCR_×	TCAT			OML3b	TCR_ODG_×	TCAT
	OML3b	TCR_×	technique			OML3b	TCR_ODG_×	TCAT
	OML3b	TCR_+	technique		3	OML3b	TCR_:	TCAT
	OML3b	TCR_ODG_+	TCAT			OML3b	TCR_:	TCAT
	OML3b	TCR_ODG_+	TCAT			OML3b	TCR_:	TCAT
	OML3b	TCR_ODG_+	TCAT			OML3b	TCR_×	TCAT
	OML3b	TCR_ODG_-	TCAT			OML3b	TCR_×	TCAT
	OML3b	TCR_ODG_×	TCAT			OML3b	TCR_ODG_+	TCAT
	OML3b	TCR_ODG_×	TCAT			OML3b	TCR_ODG_+	TCAT
	OML3b	TCR_:	TCAT			OML3b	TCR_ODG_+	TCAT
	OML3b	TCR_:	TCAT			OML3b	TCR_ODG_:	TCAT
	OML3b	TCR_:	TCAT			OML3b	TCR_ODG_:	TCAT
	OML3b	TCR_:	TCAT			OML3b	TCR_+	TCST
	OML3b	TCR_-	technique			OML3b	TCR_-	TCST
	OML3b	TCR_-	technique			OML3b	TCR_ODG_×	TCAT
	OML3b	TCR_-	technique			OML3b	TCR_ODG_×	TCAT
3	OML3b	TCR_×	TCAT			OML3b	TCR_ODG_×	TCAT
	OML3b	TCR_×	TCAT		4	OML3b	TCR_+	TCAT

3	OML3b	TCR_-	TCAT			OML3b	TCR_×	TCST
	OML3b	TCR_-	TCAT					
	OML3b	TCR_:	TCAT					
	OML3b	TCR_ODG_+	TCAT					
	OML3b	TCR_ODG_+	TCAT					
	OML3b	TCR_ODG_-	TCAT					
	OML3b	TCR_ODG_-	TCAT					
	OML3b	TCR_ODG_×	TCAT					
	OML3b	TCR_ODG_:	TCAT					
	OML3b	TCR_ODG_:	TCAT					
	OML3b	TCR_+	TCST					
	OML3b	TCR_-	TCST					
	OML3b	TCR_×	TCST					
	OML3b	TCR_:	TCAT					
	OML3b	TCR_:	TCAT					
	OML3b	TCR_:	TCAT					
	OML3b	TCR_×	TCAT					
	OML3b	TCR_×	TCAT					
	OML3b	TCR_ODG_×	TCAT					
	OML3b	TCR_ODG_×	TCAT					
4	OML3b	TCR_×	TCAT					
	OML3b	TCR_×	TCAT					
	OML3b	TCR_:	TCAT					
	OML3b	TCR_:	TCAT					
	OML3b	TCR_:	TCAT					
	OML3b	TCR_:	TCAT					
	OML3b	TCR_:	TCAT					
	OML3b	TCR_:	TCAT					
	OML3b	TCR_ODG_×	TCAT					
5	OML3b	TCR_×	TCAT					

Annexe 2.5.3 Répartition des items 2008 de calcul réfléchi à partir de consignes orales

Groupe	Type de tâche	Niveau de convocation
1	TCR_+	technique
	TCR_+	technique
2	TCR_×	TCAT
	TCR_×	TCAT
	TCR_+	technique
	TCR_-	TCAT
	TCR_-	technique
	TCR_×	TCAT
	TCR_×	technique
	TCR_+	technique
3	TCR_×	TCAT
	TCR_×	TCAT
	TCR_-	TCAT
	TCR_-	TCAT
	TCR_:	TCAT
4	TCR_×	TCAT
	TCR_×	TCAT
5	TCR_×	TCAT

ANNEXE 3 : RECODAGE DES DONNÉES - CALCUL MENTAL

Annexe 3. 1 - Taux de réussite, de non réponse et R_{bis} par item (items hiérarchisés par ordre de réussite décroissant)

item	Taux de réussite	Rbis	Non Réponse
540+905	9,1 %	0,12	45,6 %
710-70	18,3 %	0,24	36,3 %
3600+440	15,2 %	0,27	28,3 %
1840+800	22,2 %	0,28	30,0 %
85-63	27,6%	0,27	36,4 %
83-8	32,5 %	0,29	39,9 %
1500+900	35,9 %	0,25	26,7 %
71-7	35,6 %	0,25	29,0 %
42/6	39,6 %	0,34	40,5 %
45/9	46,3 %	0,31	40,6 %
12/4	54,2 %	0,46	26,9 %
81/9	55,3 %	0,35	28,0 %
8*7	54,8 %	0,23	26,2 %
9*8	66,6 %	0,31	17,5 %
9+6	81,7 %	0,16	11,9 %
5+4	85 %	0,10	7,1 %
8+5	86,7 %	0,10	5,0 %
4*5	87,4 %	0,07	8,6 %
6*3	86,3 %	0,14	7,0 %
6+5	88, 3 %	0,10	7,1 %

Annexe 3.2 - Codage des items de calcul mental par bloc

BLOC 1

E5MEC10901 **9 + 6**	15	13	14	16	17	96	54	3	autres	Non réponse
Nb d'élèves	371	0	3	4	3	0	0	1	18	54
Pourcentage	81,7%	0,0%	0,7%	0,9%	0,7%	0,0%	0,0%	0,2%	4,0 %	11,9 %
		Résultat à 1 ou 2 près : 2, 3 %								

E5MEC10902 **6 × 3**	18	12	16	20	24	63	9	2	autres	Non réponse
Nb d'élèves	392	6	0	1	1	0	4	1	17	32
Pourcentage	86,3%	1,3%	0,0%	0,2%	0,2%	0,0%	0,9%	0,2%	3,7 %	7 %
			Résultats à 2 près : 0,2 %							

	7	6	8	9	71 ou 72	426	48	36	autres	Non réponse
Nb d'élèves	180	7	12	1	2	0	1	0	67	184
Pourcentage	39,6%	1,5%	2,6%	0,2%	0,4%	0,0%	0,2%	0,0%	14,8 %	40,5%
		Résultat à 1 ou 2 près : 4,3 %								

E5MEC10904 **710 - 70**	640	760	70	10	610-620	650-660	64	6	780	autres	Non réponse
Nb d'élèves	83	2	4	5	11	49 (19+30)	6	30	3	96	165
Pourcentage	18,3 %	0,4 %	0,9 %	1,1 %	2,4 %	10,8 %	1,3 %	6,6 %	0,7 %	21,1 %	36,3 %
					Résultat à 1 ou 2 dizaines près : 13,2 %		Inachevé				

E5MEC10904 **1500 + 900**	2400	9500 ou 10500	240	1400	2100-2200-2300	2500-2600-	1900	2 ou 24	600	autres	Non réponse
Nb d'élèves	163	0	3	12	28 (12 + 8 + 8)	7 (4+3)	5	18 (16+2)	3	94	121
Pourcentage	35,9 %	0 %	0,7 %	2,6 %	6,2 %	1,5 %	1,1 %	4 %	0,7 %	20,7 %	26,7 %
					Résultat à 1 - 2 ou 3 centaines près : 13,2 %						

BLOC 2

E5MEC11202 5 + 4	9	7	8	10	11	54	20	1	autres	Non réponse
Nb d'élèves	345	0	4	1	0	0	11	1	15	29
Pourcentage	85,0%	0,0%	1,0%	0,2%	0,0%	0,0%	2,7 %	0,2%	3,7 %	7,1 %
		Résultat à 1 ou 2 près : 1,2 %								

E5MEC11201 **4 × 5**	20	16	18	22	24	54	9	2	autres	Non réponse
Nb d'élèves	355	1	0	0	0	0	2	2	11	35
Pourcentage	87,4%	0,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,5%	0,5%	2,7 %	8,6 %

E5MEC11203 **45 : 9**	5	4	6	7	51 ou 52	459	54	36	autres	Non réponse
Nb d'élèves	188	4	2	2	0	0	1	0	44	165
Pourcentage	46,3%	1,0%	0,5%	0,5%	0,0%	0,0%	0,2%	0,0%	10,8 %	40,6 %
		Résultat à 1 ou 2 près : 2 %								

E5MEC11204 **83 - 8**	75	74 ou 73	76 ou 77	7	5	85	71(83-10+2)	838	91	autres	Non réponse
Nb d'élèves	132	16 (2+14)	16 (11 + 5)	19	6	6	1	0	0	48	162
Pourcentage	32,5%	3,9 %	3,9 %	4,7 %	1,5 %	1,5%	0,2%	0,0%	0%	11,8%	39,9 %
		Résultat à 1 ou 2 près : 7,8 %		inachevé							

E5MEC11205 **540 + 905**	1445	1345	1045	1450	1405	1	14	144	145	autres	Non réponse
Nb d'élèves	37	4	7	4	17	11	15	1	4	121	185
Pourcentage	9,1%	1,0%	1,7%	1,0%	4,2%	2,7%	3,7%	0,2%	1,0 %	29,8 %	45,6 %
						Inachevé : 6,6 %					

BLOC 3

E5MEC11301 **6 + 5**	11	10	9	12	13	65	30	1	autres	Non réponse
Nb d'élèves	521	2	5	4	1	0	0	0	15	42
Pourcentage	88,3%	0,3%	0,8%	0,7%	0,2%	0,0%	0,0%	0,0%	2,5 %	7,1 %
		Résultats à 1 ou 2 près : 2 %								

E5MEC11302 **9 × 8**	72	71 ou 70	73 ou 74	63	81	54	7	98	17	autres	Non réponse
Nb d'élèves	393	5 (+0)	8 (+0)	10	17	3	7	0	7	37	103
Pourcentage	66,6%	0,8%	1,4%	1,7%	2,9%	0,5%	1,2%	0%	1,2%	6,3 %	17,5 %
		1 ou 2 près : 2,2 %									

E5MEC11303 **12 : 4**	3	2	4	5	6	48	16	8	autres	Non réponse
Nb d'élèves	320	16	24	9	8	4	2	3	45	159
Pourcentage	54,2%	2,7%	4,1%	1,5%	1,4%	0,7%	0,3%	0,5%	7,6 %	26,9%
		1 ou 2 près : 8,3 %								

E5MEC11304 **71 - 7**	64	63	62	65 ou 66	67	68 ou 69	6	1	78	autres	Non réponse
Nb d'élèves	210	20	20	52 (27 +25)	7	15 (8 + 7)	30	0	4	61	171
Pourcentage	35,6%	3,4%	3,4%	8,8%	1,2 %%	2,5%	5,1%	0%	0,7 %	10,3 %	29 %
		1 ou 2 près : 12,7 %									

E5MEC11306 **1840 + 800**	2640	1640	1040	2600	2840	2 ou 26 ou 264	2680	2440	1040	autres	Non réponse
Nb d'élèves	131	13	12	11	5	46 (24 + 16 +6)	13	7	12	163	177
Pourcentage	22,2 %	2,2 %	2,0 %	1,9 %	0,8 %	7,8%	2,2 %	1,2 %	2,0 %	27,6 %	30,0%
						inachevé					

BLOC 4

E5MEC11301 8 + 5	13	11	12	14	15	85	40	3	autres	Non réponse
Nb d'élèves	543	4	13	10	3	0	1	1	20	31
Pourcentage	86,7%	0,6%	2,1%	1,6%	0,5%	0,0%	0,2%	0,2%	3,2 %	5,0 %
		1 ou 2 près : 4,8 %								

E5MEC11302 **8 × 7**	56	54	55	57	58	48 ou 64 ou 72	42 ou 49 ou 63	15	87	autres	Non réponse
Nb d'élèves	343	17	1	2	0	20 (5 + 5 + 10)	23 (13 + 7 + 6)	5	0	51	164
Pourcentage	54,8%	2,7%	0,2%	0,3%	0,0%	3,2%	3,7%	0,8%	0%	8,1 %	26,2 %
		1 ou 2 près : 3 %									

E5MEC11203 **81 : 9**	9	7	8	10 ou 11	2	90	72	819	autres	Non réponse
Nb d'élèves	346	2	23	3	8	1	0	0	68	175
Pourcentage	55,3%	0,3%	3,7%	0,5%	1,3%	0,2%	0,0%	0,0%	10,9%	28,0%
		1 près : 4 %								

E5MEC11204 **85-63**	22	20 ou 21	23 ou 24	12	32	13, 14 ou 15	33, 34 ou 35	2	148	autres	Non réponse
Nb d'élèves	173	14	37	12	16	12 (6+2+4)	9 (5+2+2)	25	0	100	228
Pourcentage	27,6%	2,2%	5,9%	1,9%	2,6%	1,9%	1,4%	4,0%	0%	16,0 %	36,4 %
		1 ou 2 près : 8,1 %						inachevé			

E5MEC11205 **3600 + 440**	4040	4400 ou 4440	7640 ou 7000 ou 8000	3940	3640 ou 36440	4000	4010-4020-4030-4050-4060	4 ou 40 ou 404	3160	autres	Non réponse
Nb d'élèves	95	19 (12 + 7)	7 (1+1+5)	2	13 (10+3)	51	15 (3+2+1+0 + 9)	29 (20 +5 + 4)	0	218	177
Pourcentage	15,2%	3,0%	1,1%	0,3%	2,1%	8,1%	2,4%	4,6%	0 %	34,8%	28,3%

ANNEXE 4 : RECODAGE DES DONNÉES - CALCUL POSÉ

Effectif : 569 élèves

RÉSULTATS GLOBAUX

Résultats globaux sur les quatre techniques opératoires (4 additions, 4 soustractions, 3 multiplications, 4 divisions à poser) :

		addition	soustraction	multiplication	division
Nombre d'élèves	**4 bonnes réponses**	302	291		171
	3 bonnes réponses	186	151	188	127
	2 bonnes réponses	60	66	196	108
	1 bonne réponse	11	37	138	54
	0 bonne réponse	10	24	47	109
pourcentage	**4 bonnes réponses**	53,1%	51,1%		30,1%
	3 bonnes réponses	32,7%	26,5%	33,0%	22,3%
	2 bonnes réponses	10,5%	11,6%	34,4%	19,0%
	1 bonne réponse	1,9%	6,5%	24,3%	9,5%
	0 bonne réponse	1,8%	4,2%	8,3%	19,2%

		Nombre d'élèves	Pourcentage
Nombre de réponses correctes sur toutes les opérations à poser	**15**	41	7,2%
	14	71	12,5%
	13	96	16,9%
	12	81	14,2%
	11	64	11,2%
	10	38	6,7%
	9	43	7,6%
	8	44	7,7%
	7	21	3,7%
	6	23	4,0%
	5	17	3,0%
	4	16	2,8%
	3	5	0,9%
	2	3	0,5%
	1	5	0,9%
	0	1	0,2%

RÉSULTATS PAR OPÉRATION

Éléments méthodologiques de codage

BR : bonne réponse ; NR : non réponse : Ill : illisible

Additions et soustractions

Codage choisi pour les additions	Codage choisi pour les soustractions
e1 : méconnaissance des répertoires e2 : mauvais alignement des chiffres e3 : mauvais gestion de la retenue e4 : technique opératoire de gauche à droite. e5 : calcul d'une différence e6 : erreur de recopie	e1 : méconnaissance des répertoires e2 : confusion addition-soustraction sur un des rangs e3 : pour chaque rang, calcul du nombre d'unités le plus grand moins le plus petit e4 : mauvais alignement des chiffres (alignement à gauche) e5 : mauvais gestion de « la retenue »(oubli pour le nombre « du bas », mauvais position...) e6 : erreur de recopie e7 : technique opératoire de gauche à droite. e8 : confusion avec addition

Pour la soustraction :à partir des productions, nous avons repéré les techniques qui étaient utilisées par les élèves et les traces de ces techniques.

Codage employé :

A : technique « à l'anglaise » Trou : addition à trous dix : l'élève indique +10 pour indiquer ce qui est ajouté au premier terme.

Multiplications et divisions

Les codages ont été effectués uniquement à partir des résultats ; ce sont donc des types d'erreurs inférés des réponses.

Codage choisi pour les multiplications
e1 : erreur dans les étapes intermédiaires (oubli des zéros (=e1a) ou d'un seul zéro dans l'étape 2 (=e1b))
e3 : technique opératoire de gauche à droite (l'élève commence par le 1er chiffre de gauche du multiplicateur)
e4 : e2 et e1.
e5 : confusion avec addition ou soustraction
e6 : calcul non abouti (*pour les multiplications dont le multiplicateur est à deux chiffres au moins, l'élève s'arrête à la première ligne de calcul)* +e6b : seuls figurent les deux ou trois derniers chiffres de la première ligne.

Codage choisi pour les divisions
Erreurs relatives au calcul :
m : erreur dans un des produits
s : erreur dans une des soustractions intermédiaires

Erreurs ou procédures relatives à la technique :
e1 : passage division décimale faux (la technique est correcte pour la division euclidienne, mais la gestion d'un reste non nul est problématique : ajout de zéro au quotient, pas de virgule, le reste devient la partie décimale du quotient…)
e2 : dans une des étapes de la TO, un des restes est supérieur ou égal au quotient (les produits et soustractions pouvant être par ailleurs corrects)
e3 : l'élève commence la technique par la droite
e4 : l'élève n'abaisse pas le bon chiffre (par exemple, lorsqu'il prend en compte deux chiffres au dividende, il ré-abaisse à l'étape suivante un de ces deux chiffres) ; nous n'intégrons pas dans cette erreur les élèves qui ne recopient pas correctement le « bon » chiffre.
e5 : erreur que l'on ne peut pas interpréter
e6 : utilisation des soustractions successives (pas forcément de façon correcte jusqu'au bout)
e7 : calculs corrects « sous la potence », mais pas de prise en compte du « à » (ou d'une façon erronée) dans 1530 :15

e8 : calcul inachevé

Bilan pour l'addition

	BR	NR	ill	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	Autres (e)
235+362	542	7	1		*			*	*			19
13786+215+3291	418	8	1		*			*	*			140
3435+2164+4148+2015	419	13	1		*			*	*			134
5392+629 (recodé)	518	11			2	3	1	1	5			28

Bilan pour la soustraction

	BR	NR	Ill	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	autres
749-217	517	20		23	2			*	*			7
5329-2852	417	21	1	55		19	*	*	*			56
2143-527	421	25		9	3	12	*	*	*			99
1627-870 (recodé)	431	27		40	3	9	1	19	4	0	1	28

Techniques utilisées : Anglaise : 23 dix : 3

Bilan pour la multiplication

	BR	NR	Ill	e1	e3	e4	e5	e6	Autres
513 × 6	495	23	1						50
247 × 36	348	37	22	e1a : 4	0	1	0	e6 : 11 e6b : -	90
759 × 109	251	54	22	e1a : 9 e1b : 17	0	8	0	e6 : 10 e6b : 8	188

21 élèves font une seule erreur de décalage et seul 1 élève ne décale pas correctement pour les deux opérations. On peut donc conclure que ce n'est pas une erreur courante en fin d'école. La difficulté se situe vraiment du côté des tables et pas du côté de la technique.

Bilan pour la division

Les totaux peuvent excéder 569 par ligne : certaines productions présentent à la fois des erreurs dans les répertoires (m & s) et dans la technique.

	BR	NR	m	s	m&s	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8
74 : 4	379	67	36	17		29	13	2	2	26	4	*	7
186 : 7	375	98	15	10		28	6	1	2	27	4	*	3
432 : 12	288	138	44	23	5	0	16	2	5	39	0	*	8
1530 : 15	293	154	11	7	2	0	2	2	0	34	1	57	6

Annexes du chapitre 6

ANNEXE 1 : TAXONOMIE DE BODIN (2010) ADAPTÉE DE CELLE DE GRAS (1979)

Extrait de Bodin (2010) : Taxonomie pour les énoncés de mathématiques - Classement par niveaux hiérarchisés de complexité cognitive

	Catégorie		Sous-catégorie	Champ d'application	Types de demandes
A	**Connaissance Et reconnaissance**	A1	des faits	Définitions – Propriétés - Théorèmes Règles de décision et d'inférence. Application directe	Énoncer Identifier - Classer – Déduire Exécuter – Effectuer des algorithmes.
		A2	du vocabulaire		
		A3	des outils		
		A4	des procédures		
B	**Compréhension**	B1	des faits	Production d'exemples et de contre-exemples. Analyse en compréhension de textes mathématiques et en particulier de raisonnements et de démonstrations.	Expliquer – justifier - "Expliquer comment ça marche" Interpréter - Changer de langage -Transposer Redire avec ses propres mots - Résumer Justifier un argument - Déduire. Analyser un énoncé, une situation. Associer - Mettre en relation... Anticiper.
		B2	du vocabulaire		
		B3	des outils		
		B4	des procédures		
		B5	des relations		
		B6	des situations		
C	**Application**	C1	Dans des situations familières simples	Il s'agit de l'application d'outils et de procédures dans des situations supposant analyse et mobilisation de plusieurs éléments (faits vocabulaire, outils, procédures...)	Exécuter – Implémenter -Choisir Prendre des initiatives Adapter -Démontrer
		C2	Dans des situations familières moyennement complexes		
		C3	Dans des situations familières complexes		
D	**Créativité**	D1	Utiliser dans une situation nouvelle des outils et des procédures connus	En étendant ou modifiant leur champ d'application familier.	Adapter – Prolonger – Production de démonstrations personnelles Conjecturer – Généraliser -Modéliser
		D2	Émission d'idées nouvelles		
		D3	Création d'outils et de démarches personnelles		
E	**Jugement**	E1	Production de jugements relatifs à des productions externes		Évaluer la qualité d'une argumentation
		E2	Auto-évaluation		Analyse métacognitive

ANNEXE 2 : LES DIMENSIONS DU MODÈLE PÉPITE EN ALGÈBRE

V1, V2, V3 : critères d'évaluation de la dimension « Validité »		
V1 : correct	V2 : correct partiel ou non attendu	V3 : incorrect
EA1, EA31, EA32, EA33, EA41, EA42 : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des règles d'Écriture et de réécriture Algébrique »		
EA1 : Utilisation correcte des règles de transformation EA2 : Maîtrise technique fragile EA31 : Utilisation inadaptée des parenthèses qui conduit à un résultat correct EA32 : Utilisation inadaptée des parenthèses qui conduit à un résultat incorrect EA33 : Utilisation de règles de transformation fausses identifiées EA41 : Les règles de transformation utilisées linéarisent les expressions : EA42 : Les règles de transformation utilisées « assemblent » les termes EA5 : Confusion écriture algébrique et dans système numération		
L1, L2, L3, L4, L5 : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des lettres »		
L1 : Utilisation correcte des lettres L2 : Utilisation des lettres pour leur substituer des valeurs numériques L3 : Utilisation des lettres pour faire du calcul algébrique avec des règles fausses L4 : Utilisation des lettres comme étiquette ou abréviation L5 : Aucune utilisation des lettres		
J1, J2, J31, J32, J33 : critères d'évaluation de la dimension « Type de justification »		
J1 : Justification par l'algèbre		
J2 : Justification par l'exemple numérique		
J31 : Justification reposant sur l'application de règles incorrectes		
J32: Justification en langage naturel par argumentation		
J33 : Justification s'appuyant sur des formulations d'ordre légal		
T1, T3, T4 : critères d'évaluation de la dimension « Traduction entre deux registres de représentation »		
T132 : Traduction correcte de la géométrie vers l'algèbre	T332 : Traduction incorrecte de la géométrie vers l'algèbre	T432 : Traduction abréviative de la géométrie vers l'algèbre

Annexes du chapitre 7

ANNEXE 1 : ÉNONCÉ DU TEST DIAGNOSTIQUE

Exercice 1

1a. Écris en lettres 127050 :...

1b. Écris en chiffres deux-millions-trois-cents : ....

Exercice 2

Complète la suite de nombres : 4677 – 4777 – 4877 – .... - ……..........

Exercice 3

Coche pour chaque question la bonne réponse :

- Combien y a t-il de milliers dans 5 millions ?

□ 5 □ 50 □ 500 □ 5 000

- 20 centaines et 15 dizaines est égal à :

□ 2015 unités □ 200 150 unités □ 215 unités □ 2 150 unités □ 20 150 unités

Exercice 4

Entoure le nombre le plus grand parmi les deux:

2 milliers et 26 centaines 3 milliers et 15 centaines

Explique comment tu as fait :

………
………

Exercice 5

Écris en ligne les différents calculs que tu fais pour trouver le résultat de chaque calcul. <u>Tu ne dois pas poser l'opération.</u>

358+99

………
………

150-19

………
………

<u>Sans poser la division</u>, donne le quotient entier et le reste de 243 : 10

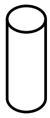
Explique avec des calculs en ligne ou une phrase comment tu as fait : ....
………

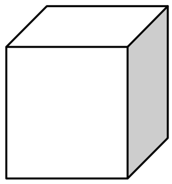
quotient = …………. reste = ………….

Exercice 6

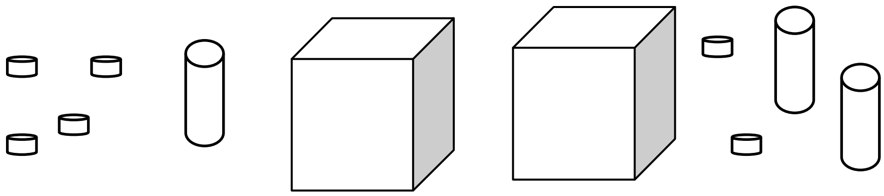
Une entreprise de fabrication de bonbons a différents emballages selon le nombre de bonbons emballés :

1 sachet  contient 10 bonbons

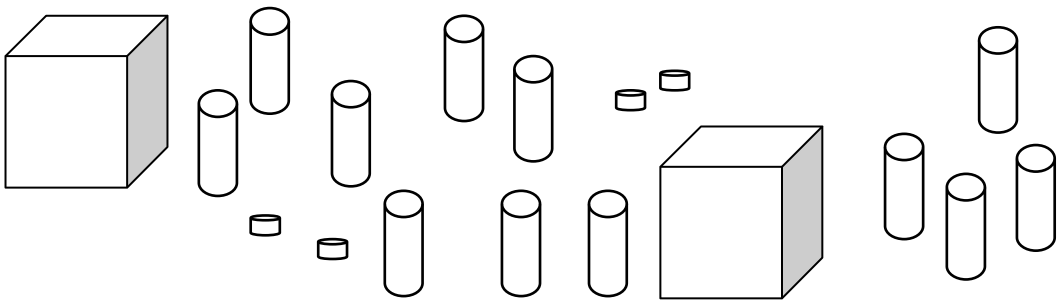
1 tube  contient 10 sachets

1 boîte  contient 10 tubes

1. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? ....



2. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? ....



3. De combien de tubes a-t-on besoin pour emballer 859 bonbons ?

....

Exercice 7

a. Pose et effectue : 538 x 702

b. Pose et effectue la division euclidienne 8463 : 12

Exercice 8

Dans une librairie, les 3 vendeuses doivent ranger des livres dans des cartons.
Dans chaque carton, il faut placer 8 livres ; elles doivent mettre en tout moins de 4 heures pour ranger l'ensemble.
De combien de cartons auront-elles besoin pour ranger 427 livres ?

………

………

………

Exercice 9

Coche <u>les expressions</u> qui sont égales à 345 012 :

□ 34 + 5 012 □ 300 000 + 45 012 □ 34 000 + 5 012
□ 10 + 345 000 + 2 □ 12 + 40 000 + 300 000 + 5000

Exercice 10

Nombre de départ → Nombre d'arrivée

$$\boxed{\mathbf{6}} \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{+8} 20 \xrightarrow{-3} \boxed{\mathbf{17}}$$

Dans ce programme de calcul, si je choisis 6 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée est 17

1. Si je choisis 30 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée que j'obtiens est ....
Écris les calculs que tu as faits : ....
………

2. J'ai obtenu 125 comme nombre d'arrivée. Quel nombre avais-je choisi au départ ?
Écris les calculs que tu as faits : ....
………

Exercice 11

Noam a voulu calculer 1 379 + 562 à la calculatrice, mais il a tapé par erreur : 1 279 + 562.
A partir du résultat qu'il a obtenu, que doit-il faire pour corriger son erreur sans taper à nouveau tout le calcul ?
Coche la bonne réponse

□ Ajouter 10 □ Ajouter 100 □ Soustraire 10 □ Soustraire 100

Exercice 12

Dans une boulangerie, Pierre a vendu 3 fois moins de brioches que de croissants. Il a vendu 24 croissants. Combien a t-il vendu de brioches ?
Coche la bonne réponse

□ 21 □ 8 □ 27 □ 72

ANNEXE 2 : ANALYSE *A PRIORI* DES TÂCHES DU TEST

Nous décrivons chacune des tâches selon les éléments descripteurs des tâches établis au chapitre 5. Nous précisons aussi les choix réalisés sur chacune des variables ; les erreurs anticipées ainsi que les techniques et les technologies sont décrites en lien avec le codage des réponses dans le paragraphe I.2 de ce chapitre.

Exercice 1

1a. Écris en lettres 127050 1b. Écris en chiffres deux-millions-trois-cents

Analyse *a priori* de l'item :

Caractère outil ou objet du savoir en jeu :	objet	
Type de tâches convoqué et le nombre de types de tâches convoqués	$\mathbf{T_{Tec/np}}$	$\mathbf{T_{Tnp/ec}}$
Ancienneté de l'objet de savoir	Ancien	
Types de représentation sémiotique	Départ : EC Arrivée : NP	Départ : EC Arrivée : NP
La (ou les) technique(s) attendue(s)	$\boldsymbol{\tau_{ec\text{-}np}}$	
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche	technique	
Les différentes variables didactiques	- nombre de l'ordre des milliers (6 chiffres) - groupements de trois chiffres non marqués - présence de zéros dans l'écriture du nombre	- nombre de l'ordre des millions (7 chiffres) - deux niveaux de segmentation principaux (millions et cents) - présence de zéros dans l'écriture du nombre

Choix des variables : les nombres choisis sont de l'ordre de la centaine de mille et du million pour être en accord avec le programme du cycle 3. Comme nous l'avons étudié dans le chapitre 2 de la thèse, les registres de l'écriture chiffrée et du nom du nombre ne sont pas congruents et les conversions d'un registre vers l'autre (et réciproquement) mobilisent à la fois des éléments relevant de $\boldsymbol{\Theta_{np}}$ et le principe positionnel du nombre par le biais de la technologie $\boldsymbol{\Theta_P}$.

1a : le nombre en jeu dans cette question est inférieur au million pour que la complexité ne réside pas uniquement dans la gestion de l'écriture (6 chiffres accolés). L'écriture chiffrée ne fait pas apparaître les groupements de 3 chiffres, pour repérer si l'élève les discerne, organise (au moins mentalement) l'écriture et convertit ensuite dans le registre de la numération avec des niveaux de segmentation corrects : 127 050 = 127 x 1 000 + 50, ce qui se traduit par : **Cent**-**vingt**-sept-**mille**-cinquante, c'est-à-dire : [cent + vingt + sept] × mille + cinquante.

<u>1b :</u> choisir un nombre supérieur au million avec une classe des milliers qui n'apparait pas dans le nom du nombre permet d'étudier la façon dont l'élève la prend en compte et repère à la fois les niveaux de segmentation pour faire le lien ensuite avec la numération écrite chiffrée (zéros intercalaires et finaux). Deux-**<u>millions</u>**-trois-**<u>cents</u>** se décompose donc de la façon suivante : (deux × un million) + (trois ×cents), c'est-à-dire, dans le registre des écritures chiffrées : 2 x 1 000 000 + 3 x 100, donc 2 000 300.

Il s'agit pour ces deux questions de tâches usuellement pratiquées à l'école et pour lesquelles les praxéologies $\mathbf{T_{Tec/np}}$ et $\mathbf{T_{Tnp/ec}}$ sont convoquées à un niveau technique.

Exercice 2

Complète la suite de nombres : 4677 – 4777 – 4877 – .... - ....

<u>Analyse *a priori* de l'item :</u>

	2a : premier nombre	2b : second nombre
Caractère outil ou objet du savoir en jeu :	Objet	
Type de tâches convoqué et le nombre de types de tâches convoqués	$\mathbf{T_{AR}}$	$\mathbf{T_{AR}}$
Ancienneté de l'objet de savoir	ancien	
Types de représentation sémiotique	Départ : EC Arrivée : EC	
La (ou les) technique(s) attendue(s)	$\tau_{AR\text{-}np}$ ou τ_{pos}	$\tau_{AR\text{-}np}$ ou τ_{juxt}
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche	technique	t-convoqué avec choix de technique
Les différentes variables didactiques	Nombre de l'ordre du millier Passage au rang supérieur pour le second nombre	

<u>Choix des variables :</u> les nombres sont de la taille du millier. Il s'agit de s'assurer que l'élève est capable de comprendre la régularité d'une suite de nombres écrits en chiffres (ajout d'une centaine) et de passer à l'unité d'ordre supérieur pour un des deux nombres demandés.

<u>Description des deux techniques pour déterminer le 1^er nombre :</u>

- dans le registre des écritures chiffrées avec $\boldsymbol{\tau_{pos}}$: il suffit de repérer que le deuxième chiffre en partant de la gauche ou le troisième en partant de la droite augmente de 1 puis d'appliquer ce même procédé pour passer de 4**8**77 à 4**9**77, en ajoutant 1 à huit.

- dans le registre des écritures chiffrées avec celui de la numération parlée comme intermédiaire avec $\tau_{AR\text{-}np}$ en comptant de cent en cent : le mot qui précède cent (ou celui qui suit mille) correspond à un nombre qui augmente de 1, il faudra passer par conséquent de « quatre-mille-**huit**-cent-soixante-dix-sept » à « quatre-mille-**neuf**-cent-soixante-dix-sept ».

Description des deux techniques pour déterminer le 2ème nombre :

- dans le registre des écritures chiffrées avec $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{juxt}}$: $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$ apparaît ici de façon sous-jacente et complémentaire avec $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{P}}$ (10 centaines sont égales à un millier) pour trouver le dernier nombre manquant ; si on ajoute une centaine à 4977 succède le nombre composé de 4 milliers, 10 centaines, 7 dizaines et 7 unités, c'est-à-dire 5 milliers, 7 dizaines, 7 unités, qui s'écrit 5077. Notons, comme pour le premier nombre, qu'il n'est pas utile d'identifier que ce sont les ordres des centaines et des milliers qui sont concernés, il suffit de repérer la position des chiffres et de savoir qu'il y a un rapport de 10 entre les nombres d'unités de deux rangs donnés qui sont contigus dans une EC ($\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$).

- avec $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{AR\text{-}np}}$en comptant de cent en cent : « quatre-mille-six-cent-soixante-dix-sept » - « quatre-mille-sept-cent-soixante-dix-sept » -....-....- « quatre-mille-neuf-cent-soixante-dix-sept » - «cinq-mille-soixante-dix-sept ». On peut alors utiliser l'aspect ordinal de la numération parlée (Mounier 2010, p.68) en s'appuyant sur une comptine de cent en cent, ici : « quatre-mille-six-cent-... » - « quatre-mille-sept-cent-... » - « quatre-mille-huit-cent-... » - « quatre-mille-neuf-cent-... » - « cinq-mille... », puis transcrire ensuite dans le registre des EC. La technique attendue étant plutôt la précédente, nous ne développons pas davantage celle-ci.

Nous avons jugé que $\mathbf{T}_{\mathbf{AR}}$ était t-convoquée avec choix de technique puisque, même si la tâche est assez usuelle, c'est à l'élève de trouver la raison de la suite (100) et il a la possibilité d'utiliser deux techniques différentes ; la première basée uniquement sur les EC est celle attendue à ce niveau scolaire.

Exercice 3 - *Analyse a priori figurant dans le corps de la thèse*

Coche pour chaque question la bonne réponse :
3a. Combien y a t-il de milliers dans 5 millions ?
□ 5 □ 50 □ 500 □ 5 000
3b. 20 centaines et 15 dizaines est égal à :
□ 2015 unités □ 200 150 unités □ 215 unités □ 2 150 unités □ 20 150 unités

Analyse *a priori* de l'item :

	Question 3a	Question 3b
Caractère outil ou objet du savoir en jeu :	objet	
Type de tâches convoqué et le nombre de types de tâches convoqués	$\mathbf{T}_{\mathbf{C\_eun}}$	$\mathbf{T}_{\mathbf{C\_eun}}$
Ancienneté de l'objet de savoir	ancien	
Types de représentation sémiotique	Départ : EUNC Arrivée : EUNC	Départ : EUNC Arrivée : EUNC
La (ou les) technique(s) attendue(s)	$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{conv}}$	$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{conv}}$
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche	technique	technique
Les différentes variables didactiques	Nombres de l'ordre des millions	Nombres de l'ordre du millier

<u>Choix des variables :</u> nous avons choisi dans cet exercice des « grands nombres » (de l'ordre du million) afin d'évaluer la maitrise de la relation entre le million et le millier ; ce qui correspond à un savoir spécifique du cycle 3. Par contre, pour évaluer les techniques de conversion entre unités de numération, nous avons choisi de travailler la conversion centaines - milliers, qui devrait, selon les programmes être enseignée depuis le CE1 ; les travaux en didactique de Chambris (2008) et Tempier (2013) ayant montré que ce type de tâche est peu présent actuellement dans l'enseignement, nous avons préféré ne pas augmenter la complexité de l'exercice en proposant des nombres plus grands. Les praxéologies sont convoquées à un niveau technique puisqu'il s'agit de mettre directement en application la technique de conversion.

<u>Choix du format et des distracteurs :</u> nous avons choisi de poser la question 3a sous une forme QCM pour éviter une mauvaise interprétation de la question, l'élève pouvant répondre 0, puisqu'il n'y a pas de milliers « isolés » dans 5 millions. Les distracteurs de la question 3a sont rangés par ordre croissant pour avoir une certaine régularité dans les écritures (aucun d'eux n'est mis ainsi en avant) et la bonne réponse se situe en dernière position ; dans la question 3b, les distracteurs ne sont pas écrits dans un ordre donné, la réponse se situe aussi en 4ème position, mais n'est pas la dernière de la liste.

<u>Techniques :</u> comme nous l'avons exposé dans le chapitre 3, deux techniques sont possibles selon l'utilisation de l'EC comme un registre de représentation sémiotique intermédiaire ou non ; nous les décrivons dans le corps de la thèse (Paragraphe II.2)

<u>Pour la première question</u> : la technique de conversion $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{conv}}$ permet une résolution uniquement avec les EUN ; le passage par les écritures chiffrées demande successivement la mise en œuvre de la technique de traduction canonique $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{pos}}$, puis de la technique de troncature $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{tronc}}$ afin de déterminer le nombre de milliers pour la question 3a ; le nombre d'unités est donné directement par l'écriture chiffrée :

- avec $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{conv}}$: 1 million = 1 000 milliers et par conséquent 5 millions = 5 milliers

- avec $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{pos}}$ 5 millions s'écrit 5 000 000, il s'agit ensuite de déterminer le nombre de milliers ($\mathbf{T}_{\mathbf{CNd}}$) à l'aide de la technique de$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{tronc}}$.

<u>Pour la seconde question</u> les erreurs auxquelles nous nous attendons reposent sur une utilisation erronée du principe décimal, sur l'écriture du nombre de dizaines (et non d'unités qui pourrait traduire une utilisation incorrecte du principe positionnel) et sur la juxtaposition de nombres obtenus après conversion de chacun des éléments composant le nombre.

Ce qui donne :

20 centaines et 15 dizaines est égal à :

□ 2015 unités : juxtaposition des chiffres présents dans l'énoncé (pas de prise en compte du principe décimal)

□ 200 150 unités : conversion de chacun des nombres évoqués dans l'énoncé en unités (20 centaines = 200) et (15 dizaines = 150), puis juxtaposition des deux écritures.

□ 215 unités : confusion nombre de dizaines - nombre d'unités

□ 2 150 unités: bonne réponse

□ 20 150 unités : conversion en unités du nombre de dizaines et juxtaposition avec le nombre de centaines.

Exercice 4

Entoure le nombre le plus grand parmi les deux :	
2 milliers et 26 centaines	3 milliers et 15 centaines
Explique comment tu as fait.	

<u>Analyse *a priori* de l'item :</u>

Caractère outil ou objet du savoir en jeu :	objet	
Type de tâches convoqué et le nombre de types de tâches convoqués	$\mathbf{T_{C\_eun}}$	$\mathbf{T_{Comp}}$
Ancienneté de l'objet de savoir	Ancien	
Types de représentation sémiotique	Départ : EUN Arrivée : EUNC ou EC	Départ : EUNC ou EC Arrivée : LN
La (ou les) technique(s) attendue(s)	$\boldsymbol{\tau_{Conv}}$	$\boldsymbol{\tau_{Comp\_ec}}$
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche	t-convoqué sans choix de technique	technique
Les différentes variables didactiques	Écriture des nombres non canonique en unités de numération	

<u>Choix des variables :</u> évaluer la comparaison de deux nombres à partir des écritures chiffrées révèle finalement assez peu de difficultés chez les élèves de cycle 3, comme nous l'avons vu dans l'étude des résultats des évaluations ; la mise en place de $\boldsymbol{\tau_{Comp\_ec}}$ semblant ainsi maitrisée. Il est par conséquent difficile d'évaluer si les technologies de la numération sous-tendant cette technique sont ou non maitrisées par les élèves à partir de ce type de question ; il nous a donc semblé plus pertinent de demander la comparaison de nombres exprimés en unités de numération non canonique, pour laquelle, la mise en œuvre directe de $\boldsymbol{\tau_{Comp\_ec}}$ est inadaptée. Ce qui permet d'évaluer si :

- l'élève transfère la technique appliquée aux EC aux écritures en unités de numération sans aucune adaptation (ce qui montre qu'il n'a pas conscience des éléments technologiques qui la sous-tendent) ;

- le type de tâche de conversion $\mathbf{T_{C\_eun}}$ ou de traduction $\mathbf{T_{Teun/ec}}$ est convoqué (pour se ramener à une même unité de numération, la centaine, la dizaine ou l'unité ou à l'écriture chiffrée des deux nombres) pour effectuer la comparaison.

Nous avons choisi les deux nombres pour que le plus grand soit celui qui ait le nombre le plus petit de millier (unité d'ordre le plus grand). La justification demandée par écrit permet d'accéder aux technologies de l'élève et de savoir sur quels arguments son choix se fonde.

Exercice 5

Écris en ligne les différents calculs que tu fais pour trouver le résultat de chaque calcul. Tu ne dois pas poser l'opération.

5a. 358+99 5b. 150-19

5c. Sans poser la division, donne le quotient entier et le reste de 243 : 10. Explique avec des calculs en ligne ou une phrase comment tu as fait.

Analyse *a priori* des tâches :

	5a	5b	5c
Caractère outil ou objet du savoir en jeu :	Objet		
Type de tâches convoqué et le nombre de types de tâches convoqués	T_{CR_+}	T_{CR_-}	$T_{CR\_:}$
Ancienneté de l'objet de savoir	ancien		
Types de représentation sémiotique	Départ : EA Arrivée : EA et EC		Départ : EA Arrivée : EA (ou LN) et EC
La (ou les) technique(s) attendue(s)	$\tau_{CR\_+\_dec\_eapd}$ $\tau_{CR\_+\_dec\text{-}arithm+}$ $\tau_{CR\_+\_excès}$	$\tau_{CR\_-\_dec\_eapd}$ $\tau_{CR\_-\_dec\text{-}arithm+\_}$ $\tau_{CR\_-\_excès}$ $\tau_{CR\_-\_compens}$	τ_{CNd} τ_{divPD}
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche	t-convoqué avec choix de technique		
Les différentes variables didactiques	Nombres de l'ordre de la centaine		

Les différentes praxéologies sont ici convoquées par la tâche avec choix de technique ; nous ne détaillons pas dans ces annexes les différentes techniques de résolution puisqu'elles sont décrites selon les justifications auxquelles elles conduisent dans le corps de ce chapitre. Nous revenons ici sur certains choix de variables en lien avec les techniques de résolution posée.

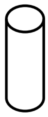
Choix des variables pour 358 +99& pour 150 - 19 :comme nous souhaitions étudier les technologies mises en jeu dans le calcul réfléchi, les deux résultats des calculs ne devaient pas être déterminés par τ_{CR_np}(pour la somme) et pas facilement par $\tau_{CR\_posé}$ (pour les deux calculs) : ce qui implique que les nombres choisis conduisent à des retenues avec $\tau_{CR\_posé}$. Par ailleurs, nous avons choisi des calculs spécifiques (ajout de 99 et retrait de 19), qui correspondent à des techniques adaptées identifiées ($\tau_{CR\_+\_excès}$: ajout de 100 et retrait de 1 pour la somme et $\tau_{CR\_-\_excès}$: retrait de 20 et ajout de 1 pour la différence) ; le codage des productions permet ainsi de repérer les techniques élèves au regard de celles attendues.

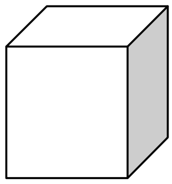
Choix des variables pour la division euclidienne de 243 par 10 : proposer une question avec une division par 10, mais en lien avec la division euclidienne et non la division décimale, permet de repérer les élèves qui utilisent la technique τ_{div_multPD} sans maitriser les technologies qui lui sont sous-jacentes, en particulier de ne pas pouvoir déterminer le reste même quand il est nul si la réponse est donnée sous la forme d’un quotient décimal.

Exercice 6

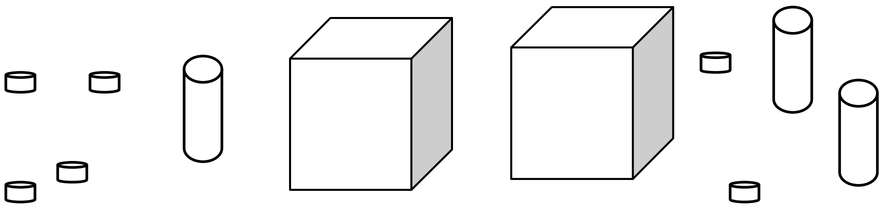
Une entreprise de fabrication de bonbons a différents emballages selon le nombre de bonbons emballés :

1 sachet  contient 10 bonbons

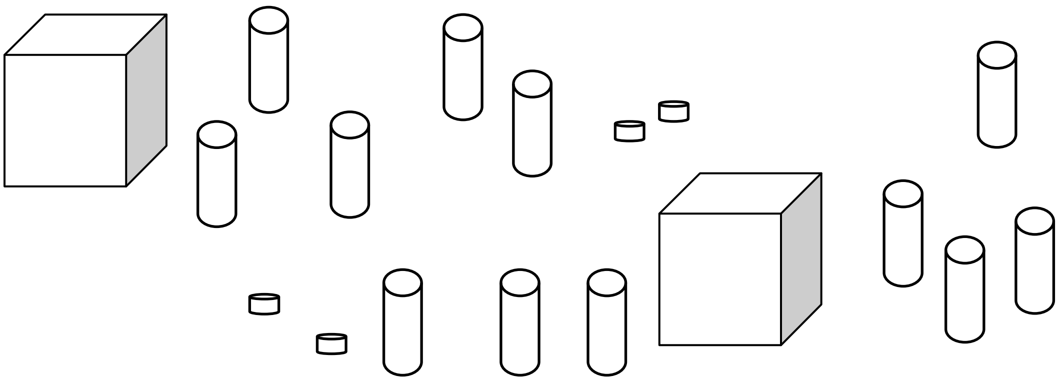
1 tube  contient 10 sachets

1 boîte  contient 10 tubes

6a. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ?



6b. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ?



6c. De combien de tubes a-t-on besoin pour emballer 859 bonbons ?

Analyse *a priori* des tâches :

L'exercice est formulé dans un contexte que nous considérons comme sociétal (la situation évoque des objets qui sont familiers à l'élève, mais elle ne relève pas pour autant de son quotidien).

Il est nécessaire, pour la réussite de l'exercice avec des techniques de numération, d'interpréter les données de l'énoncé et de comprendre qu'un sachet représente 1 dizaine, 1 tube, 1 centaine... ou avec des techniques de calcul qu'il faut multiplier par 10 le nombre de sachets par 100 celui de tubes... Ce choix correspond à la volonté d'avoir une tâche plus complexe que celles usuellement proposées dans le dénombrement de collections : non seulement elle n'est pas proposée avec du matériel de numération, mais en plus, elle ne fait pas référence de façon directe aux unités de numération en jeu.

L'exercice est ainsi composé de deux tâches représentant des types de tâches de dénombrement convoquées par l'élève avec choix de techniques ; nous estimons la situation suffisamment inhabituelle pour considérer que ce n'est pas la tâche elle-même qui convoque la praxéologie de dénombrement, mais l'élève.

	6a	6b	6c
Caractère outil ou objet du savoir en jeu :	outil		
Type de tâches convoqué et le nombre de types de tâches convoqués	$\mathbf{T_{Dc}}$	$\mathbf{T_{Dc}}$	$\mathbf{T_{CNd}}$
Ancienneté de l'objet de savoir	ancien		
Types de représentation sémiotique	Départ : RI & LN Arrivée : EC		Départ : LN & RI&EC Arrivée : EC
La (ou les) technique(s) attendue(s)	$\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}np}}$ ou $\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}calc}}$ ou $\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}ec}}$		$\mathbf{T_{CNd}}$
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche	r-convoqué avec choix de technique		
Les différentes variables didactiques	Nombres de dizaines et non d'unités Nombres de l'ordre du millier Collections organisées de façon maximale (6a) et non maximale (6b)		Nombre de centaines +1

La passation du test sous une forme écrite papier-crayon ne permet pas facilement de discerner les techniques mises en jeu dans la résolution des deux premières questions ($\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}np}}$ ou $\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}calc}}$ ou $\boldsymbol{\tau_{Dc\text{-}ec}}$).

Exercice 7

7a. Pose et effectue : 538 x 702
7b. Pose et effectue la division euclidienne 8463 : 12

<u>Analyse *a priori* des tâches :</u>

	7a	7b
Caractère outil ou objet du savoir en jeu :	outil	
Type de tâches convoqué et le nombre de types de tâches convoqués	$\mathbf{T}_{CP\_\times}$	$\mathbf{T}_{CP\_:}$
Ancienneté de l'objet de savoir	ancien	
Types de représentation sémiotique	Départ : EA Arrivée : EC	Départ : EA Arrivée : EC
La (ou les) technique(s) attendue(s)	$\tau_{CP\_\times}$	$\tau_{CP\_:}$
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche	technique	
Les différentes variables didactiques	Nombres à 3 chiffres Présence de zéro dans un des deux facteurs Répertoires simples et complexes	Diviseur à 2 chiffres Présence de zéro dans le quotient Quotient décimal possible (705,25)

<u>Choix des variables :</u> dans la multiplication comme dans la division, nous avons choisi de faire apparaître des nombres avec des zéros que ce soit dans un des facteurs du produit ou dans le quotient de la division afin d'évaluer la maitrise des techniques de calcul dans des cas où elles nécessitent la mobilisation des technologies de la numération ; les erreurs traduisant alors le fait que ces éléments technologiques ne soient pas convoqués.

Pour le produit (7a) : il met en jeu des petits et grands répertoires afin d'évaluer la connaissance de ces répertoires conjointement avec celle de la technique. Nous avons choisi des nombres à 3 chiffres parce qu'ils sont suffisamment grands pour atteindre l'objectif d'évaluation fixé et éviter des calculs fastidieux, sources d'erreurs éventuelles qui ne seraient pas forcément significatives.

Pour la division (7b) : nous avons choisi de la complexifier avec un diviseur à deux chiffres pour évaluer la maitrise de la technique dans ce cas ; par ailleurs, une division à un chiffre peut être posée pour résoudre l'exercice 8 (problème de division-quotition). Si nous attendons un quotient entier correspondant à l'effectuation d'une division euclidienne comme réponse exacte, nous avons veillé à ce que le calcul d'un quotient décimal (et non rationnel non décimal) soit possible et avec une partie décimale courte (de l'ordre du centième) afin que les élèves puissent éventuellement le calculer.

Exercice 8

Dans une librairie, les 3 vendeuses doivent ranger des livres dans des cartons. Dans chaque carton, il faut placer 8 livres ; elles doivent mettre en tout moins de 4 heures pour ranger l'ensemble. De combien de cartons auront-elles besoin pour ranger 427 livres ?

<u>Analyse *a priori* de l'item :</u>

Caractère outil ou objet du savoir en jeu :	outil	
Type de tâches convoqué et le nombre de types de tâches convoqués	$\mathbf{T}_{\mathbf{RP\_x}}$	$\mathbf{T}_{\mathbf{CP\_:}}$
Ancienneté de l'objet de savoir	ancien	
Types de représentation sémiotique	Départ : LN Arrivée : EA	Départ : EA Arrivée : EC
La (ou les) technique(s) attendue(s)	$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{RP\_calc}}$	$\mathbf{T}_{\mathbf{CP\_:}}$
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche	TCAT	technique
Les différentes variables didactiques	Données inutiles (3 heures ; 4 heures) Interprétation du quotient pour répondre à la question posée Contexte proche de celui de l'élève Nombres conduisant à une division par un nombre à un chiffre	

<u>Choix des variables :</u>le problème que nous proposons ici est similaire à celui des wagons de l'évaluation CEDRE 2014. Il s'agit d'un problème de division-quotition dans lequel le résultat est donné par la valeur du quotient à laquelle il faut ajouter une unité.

Nous avons choisi de placer des données inutiles afin d'identifier si les élèves étaient capables de sélectionner les données pour déterminer le modèle mathématique à utiliser ; le contexte est proche de celui de l'élève pour qu'il puisse se représenter la situation, mais il ne peut pas avoir un ordre de grandeur du résultat s'il se réfère uniquement à la situation, sans déterminer une opération conduisant à la réponse.

Les nombres sont suffisamment grands pour dissuader l'élève d'employer une technique de groupements/partage en représentant la collection de façon unitaire.

Exercice 9

Coche <u>les expressions</u> qui sont égales à 345 012 :		
□ 34 + 5 012	□ 300 000 + 45 012	□ 34 000 + 5 012
□ 10 + 345 000 + 2	□ 12 + 40 000 + 300 000 + 5000	

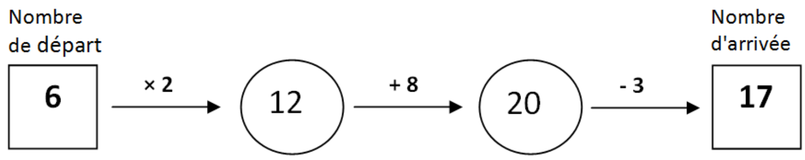
Analyse *a priori* de l'item :

Caractère outil ou objet du savoir en jeu :	objet
Type de tâches convoqué et le nombre de types de tâches convoqués	$\mathbf{T}_{C\_eapd}$ $\mathbf{T}_{Tec/eapd}$ et/ou $\mathbf{T}_{Teapd/ec}$
Ancienneté de l'objet de savoir	ancien
Types de représentation sémiotique	Départ : EC Arrivée : EAPD
La (ou les) technique(s) attendue(s)	τ_{juxt}
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche	technique
Les différentes variables didactiques	Taille du nombre : de l'ordre des centaines de milliers Représentations choisies (EAPD) Plusieurs choix de réponses possibles

Choix des variables : en choisissant des nombres à 6 chiffres, nous proposons des tâches qui relèvent de savoirs anciens, mais spécifiquement du cycle 3. Nous avons choisi les distracteurs en fonction des technologies de la numération en jeu ; en particulier, la réponse (a) correspond à la conception « concaténation » décrite par Fuson (1997) qu'il nous semble nécessaire de repérer.

Proposer un QCM avec choix de réponses multiples permet de mieux évaluer les savoirs de l'élève, et d'un point de vue psycho-didactique, demande à l'élève d'étudier chacun des choix de réponse ; en effet, comme plusieurs réponses sont possibles, en trouver une ne suffit pas pour que l'exercice soit terminé. Il est donc nécessaire de passer en revue chacun des choix de réponse et de déterminer si la décomposition est ou non correcte.

Exercice 10



Dans ce programme de calcul, si je choisis 6 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée est 17.

10a. Si je choisis 30 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée que j'obtiens est ....

Écris les calculs que tu as faits.

10b. J'ai obtenu 125comme nombre d'arrivée. Quel nombre avais-je choisi au départ ?

Écris les calculs que tu as faits.

L'exercice 10 met en jeu un programme de calcul mêlant multiplication, addition et soustraction ; si ce type d'exercice est proposé assez usuellement en collège, il semble qu'il soit moins habituel à l'école primaire.

Nous avons choisi dans cet exercice de considérer qu'intervenaient des types de tâches de modélisation (et de conversion), puisqu'il s'agit de produire une expression arithmétique et des types de tâches de calcul réfléchi. Si la modélisation et la conversion sont assez simples dans la question 10a puisqu'il y a une congruence entre la représentation sous forme de schéma et le registre des écritures arithmétiques, elles sont plus complexes dans la question 10b, puisqu'il s'agit d'inverser le programme de calcul et de produire une ou plusieurs expression(s) arithmétique(s)qui ne sont pas congruentes avec celles représentées dans l'énoncé de l'exercice.

Analyse *a priori* de l'item :

	10a	10b
Caractère outil ou objet du savoir en jeu :	ancien	
Type de tâches convoqué et le nombre de types de tâches convoqués	$\mathbf{T_{CR\_\times}}$ **;** $\mathbf{T_{CR\_+}}$ **et** $\mathbf{T_{CR\_-}}$	$\mathbf{T_{RP\_\times}}$; $\mathbf{T_{RP\_+}}$ $\mathbf{T_{CR\_\times}}$ **;** $\mathbf{T_{CR\_+}}$ **et** $\mathbf{T_{CR\_-}}$
Ancienneté de l'objet de savoir	ancien	
Registres de représentation sémiotiques	Départ : Schéma & EA & EC Arrivée : EC	Départ : Schéma & EA & EC Arrivée : EC
La (ou les) technique(s) attendue(s)		
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche		TCST
Les différentes variables didactiques	Nombres en jeu de petite taille Opérations peu complexes Trois opérations successives Écriture du programme sous forme de schéma avec un exemple	

La première question met principalement en jeu la connaissance des répertoires additifs et multiplicatifs ; elle permet par la suite une évaluation de la dimension RE à travers les réécritures produites par les élèves.

La seconde question demande la reconnaissance d'un certain modèle mathématique associé à la définition des opérations et à celle de leurs inverses ; l'élève est amené à remonter le programme de calcul, dans le bon ordre pour retrouver le nombre de départ. Nous considérons alors qu'il s'agit de convoquer $\mathbf{T_{RP\_\times}}$ et $\mathbf{T_{RP\_+}}$ à niveau TCST, puis à effectuer correctement les calculs à l'aide de $\mathbf{T_{CR\_\times}}$, $\mathbf{T_{CR_+}}$et $\mathbf{T_{CR\_-}}$, convoqués à un niveau technique.

Choix des variables : nous ne souhaitons pas spécifiquement évaluer à travers cet exercice la capacité à convoquer les praxéologies de calcul réfléchi, c'est pourquoi nous avons choisi de proposer des nombres assez petits à la fois dans les opérations du programme et dans les nombres de départ et d'arrivée.

Nous estimons que la présentation du programme de calcul sous la forme d'un schéma, plutôt que sous celle d'un texte, permet une meilleure compréhension de la part des élèves ; c'est aussi pour cette raison que nous avons complété les différentes cases pour montrer un exemple.

Exercice 11

Noam a voulu calculer 1 379 + 562 à la calculatrice, mais il a tapé par erreur : 1 279 + 562.
A partir du résultat qu'il a obtenu, que doit-il faire pour corriger son erreur sans taper à nouveau tout le calcul ?
Coche la bonne réponse
□ Ajouter 10 □ Ajouter 100 □ Soustraire 10 □ Soustraire 100

Il s'agit ici de reconnaitre l'écart d'une centaine entre deux nombres puis de le traduire sous la forme d'une opération (ajouter 100). Pour constater l'écart de 100 entre les deux nombres, il suffit de reconnaître en comparant chacune des écritures la différence sur le chiffre des centaines (en convoquant $\mathbf{T_{CNd}}$ et en utilisant la technique de position $\boldsymbol{\tau_{pos}}$. L'écart de 1 sur les centaines étant repéré, il s'agit de le convertir en écriture chiffrée (100) et de considérer un ajout de 100 sur le second et non un retrait. Nous ne considérons pas ici la convocation d'un nouveau type de tâche pour justifier de cette conversion de registre. La résolution peut être menée aussi par des techniques de calcul en calculant l'écart entre les deux nombres par une soustraction, mais ce n'est pas la technique attendue.

Il ne s'agit pas d'une tâche usuelle et elle peut amener l'élève à devoir choisir plusieurs techniques de résolution ; nous considérons donc que la praxéologie $\mathbf{T_{CNd}}$ est t-convoquée avec choix de technique.

Analyse *a priori* de l'item :

Caractère outil ou objet du savoir en jeu :	objet
Type de tâches convoqué et le nombre de types de tâches convoqués	$\mathbf{T_{CNd}}$
Ancienneté de l'objet de savoir	ancien
Types de représentation sémiotique	Départ : langage naturel et écritures arithmétiques Arrivée : langage mathématique
La (ou les) technique(s) attendue(s)	$\boldsymbol{\tau_{pos}}$
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche	t-convoqué avec choix de technique
Les différentes variables didactiques	Taille des nombres Contexte mathématique de la situation

Choix des variables :les nombres sont de l'ordre du millier pour pouvoir aussi évaluer les savoirs de la numération sur des nombres de cette taille. Nous avons choisi un contexte mathématique pour varier les contextes, mais aussi pour induire peut être davantage la convocation de praxéologies de numération et non de calcul (même si, encore une fois, il est difficile de distinguer ces praxéologies lorsqu'elles sont convoquées par les élèves sans nécessairement amener à des traces écrites).

Nous avons choisi aussi d'avoir une tâche qui ne mettait en jeu que τ_{pos}et pas τ_{juxt}. L'écart se perçoit directement et uniquement sur les chiffres des centaines ; il n'est pas nécessaire de prendre en compte le chiffre du rang des milliers (ce qui serait le cas si les nombres 1979 et 2079 étaient en jeu).

Exercice 12

Dans une boulangerie, Pierre a vendu 3 fois moins de brioches que de croissants. Il a vendu 24 croissants. Combien a t-il vendu de brioches ?

Coche la bonne réponse

□ 21 □ 8 □ 27 □ 72

<u>Analyse *a priori* de l'item :</u>

Caractère outil ou objet du savoir en jeu :	outil
Type de tâches convoqué et le nombre de types de tâches convoqués	$\mathbf{T}_{RP\_ass}$
Type de problème	Problème multiplicatif de comparaison
Ancienneté de l'objet de savoir	ancien
Types de représentation sémiotique	Départ : langage naturel Arrivée : écriture chiffrée En jeu : écriture arithmétique
La (ou les) technique(s) attendue(s)	τ_{RP_calc}
Niveau d'intervention du (ou des) type(s) de tâche	t-convoqué sans choix de technique
Les différentes variables didactiques	Contexte : boulangerie Taille des nombres : de l'ordre de la dizaine Mots inducteurs « fois moins »

<u>Choix des variables :</u>

Le contexte du problème est évocateur pour l'élève et lui permet de se représenter la situation sans pour autant qu'il puisse déterminer un ordre de grandeur du résultat uniquement à partir de la connaissance du contexte. Les nombres sont petits pour que le problème puisse avoir un sens dans le contexte donné et que la difficulté ne réside pas dans le calcul. Par contre, nous avons choisi un problème multiplicatif de comparaison qui conduit à une division, pour différentes raisons : ne pas proposer à nouveau un problème de division-partition ou de division-quotition en plus de l'exercice 8, mais néanmoins évaluer la reconnaissance de la division, qui relève pleinement de la fin d'école, dans un autre type de problème.

La formulation de la comparaison sous la forme « 3 fois moins » nécessite la reconnaissance d'un problème multiplicatif et d'un modèle de division qui peut mener à la production d'une écriture arithmétique sous la forme d'une division ou d'une multiplication à trou dans un registre mathématique ; le format QCM de l'item ne demande pas la production d'une telle écriture (celle-ci étant néanmoins sous-jacente, quelle que soit sa forme) pour déterminer la réponse correcte à l’exercice. L’utilisation de l’expression « fois moins » conduisant à un modèle de division implique une non congruence entre les termes employés dans le langage naturel et les opérations mathématiques ; des erreurs peuvent alors provenir de la traduction de « fois » en une multiplication et de « moins » en une soustraction, et par conséquent conduire au choix des distracteurs 72 et 21.

Les distracteurs ont été choisis pour correspondre aux quatre opérations réalisables à partir des données de l’énoncé ; deux des distracteurs peuvent être écartés directement puisqu’ils sont supérieurs à 24. Un élève qui utiliserait cette stratégie, comme celle de comparer les choix de réponse avec 24 pour retrouver le coefficient de comparaison, met indirectement en jeu les techniques attendues, et en ce sens nous pouvons considérer l’item comme adapté à l’objectif visé.

ANNEXE 3 : ANALYSE DES EXERCICES EN TERMES DE DIMENSIONS

Exercice 1

Cet exercice est composé de deux tâches représentant pour la première $\mathbf{T_{Tec/np}}$ et pour la seconde $\mathbf{T_{Tnp/ec}}$. La technique pour les résoudre est $\boldsymbol{\tau_{ec\text{-}np}}$; elle s'appuie à la fois sur le principe de position $\mathbf{\Theta_P}$et sur des éléments relevant de la technologie de la numération parlée $\mathbf{\Theta_{np}}$. Les nombres que nous avons choisis ne sont pas révélateurs des irrégularités de la numération parlée, mais nous avons choisis pour chacun d'eux d'avoir une absence d'élément d'un certain ordre (pas de centaine, ni d'unité pour 1a, aucun élément de la classe des milliers, ni de dizaine ou d'unité pour 1b) qui se traduit par des zéros intercalaires et des zéros finaux dans l'écriture du nombre ; ce qui est source de difficulté pour les élèves (Deblois 1996, p.96).

1a. Écris en lettres 127050

La distinction entre N1 et N2 se fait avec la réponse « cent-vingt-sept-mille-zéro-cinquante » que nous considérons comme caractérisant N2 : $\boldsymbol{\tau_{ec\text{-}np}}$ est mise à l'œuvre correctement, mais le besoin de préciser l'absence de centaine par le mot « zéro » témoigne d'une maitrise non assurée de $\mathbf{\Theta_P}$.

Les erreurs attendues se situent au niveau du repérage des niveaux de segmentation dans l'écriture en lettres (numération parlée du nombre), c'est-à-dire à un manque de maitrise de $\mathbf{\Theta_{np}}$ en lien avec la connaissance du rang des chiffres dans l'écriture chiffrée ($\mathbf{\Theta_P}$).

Pour caractériser les réponses codées N3, nous anticipons des erreurs qui proviennent soit :
-d'un mauvais regroupement des chiffres en lien avec une technologie $\mathbf{\Theta_{np}}$ déficiente :
- un million-vingt-sept-mille-cinquante (qui proviendrait d'un regroupement : 1 27050)
- douze-millions-sept-mille-cinquante (à partir d'une écriture : 12 7050
- d'un manque de connaissance la signification des zéros dans l'écriture chiffrée en lien avec $\mathbf{\Theta_P}$:
- cent-vingt-sept-mille-cinq ou cent-vint-sept-mille-cinq-cents

Les réponses faisant figurer plusieurs fois le terme de « millions » ou telles que « douze-soixante-dix-cinquante » ou « douze-sept-zéro-... » ne prennent en compte aucun des principes de la numération écrite chiffrée ni de la numération parlée ; elles sont donc codées N4.

Codage des réponses de la question 1 a :

N1	cent-vingt-sept-mille-cinquante : traduit la maitrise de $\mathbf{\Theta_p}$ et de $\mathbf{\Theta_{np}}$
N2	cent-vingt-sept-mille-zéro-cinquante : traduit une maitrise non assurée de $\mathbf{\Theta_p}$ et de $\mathbf{\Theta_{np}}$
N3	un million-vingt-sept-mille-cinquante // douze-millions-sept-mille-cinquante cent-vingt-sept-mille-cinq // cent-vint-sept-mille-cinq-cents//cent-vingt-sept-millions-cinquante : se réfère à une technologie $\mathbf{\Theta_p}$ et/ou $\mathbf{\Theta_{np}}$ mais de façon incorrecte.
N4	Présence du mot « millions » plusieurs fois ou noms successifs des chiffres ou des nombres composés de deux chiffres sans aucune présence de mots de segmentation témoignant de technologies inadaptées.

1b. Écris en chiffres : deux-millions-trois-cents

Le nom de ce nombre ne présente que deux niveaux de segmentation principaux (millions et cents). Les technologies en jeu dans cette tâche sont $\mathbf{\Theta_{np}}$ et $\mathbf{\Theta_P}$; comme nous l'avons évoqué dans l'analyse épistémologique, une traduction de cette écriture en EUNC (2 millions 3 centaines) peut permettre de répondre à la question posée (les EUN jouant ainsi un rôle d'intermédiaire entre l'écriture chiffrée et celle en lettres) ; la technique de traduction canonique $\boldsymbol{\tau_{juxt}}$ ne s'appuyant que sur $\mathbf{\Theta_P}$.

Nous n'avons pas distingué les codes N1 et N2 pour cette question et codons la réponse 2 000 300 par N1.

Un manque de maitrise dans les technologies $\mathbf{\Theta_P}$ et $\mathbf{\Theta_{np}}$, caractérisant N3, se traduit par des erreurs reposant sur une mauvaise interprétation de la numération parlée qui conduit à traduire le nom du nombre par des nombres en écritures chiffrées juxtaposées :

- 2 000 000 300 : juxtaposition des deux désignations (« deux millions » et « trois-cents ») sans faire la somme des nombres (défaut de maitrise dans $\mathbf{\Theta_{np}}$) ou manque de connaissance de la position du rang des millions dans l'écriture chiffrée (en lien avec $\mathbf{\Theta_P}$).

- 2 000 000 000 300 ou 2 300 ou 200 300: juxtaposition des désignations ou manque technologique supplémentaire sur $\mathbf{\Theta_p}$.

Par contre, nous estimons que toutes les écritures chiffrées qui ne prennent pas en compte l'interprétation multiplicative de la numération parlée, c'est-à-dire faisant apparaître la transcription de « million » par 1000 000 ou de cent par 100 et conduisant à des écritures du type 2 000 000 3 100 ou 2 1000 000 300 traduisent, à ce niveau scolaire, la non compréhension du système de numération écrite chiffrée et l'inadaptation des technologies utilisées pour produire la réponse ; en ce sens, elles sont codées N4.

<u>Codage des réponses de la question 1 b :</u>

N1	2 000 300 : traduit la maitrise de $\mathbf{\Theta_p}$ et de $\mathbf{\Theta_{np}}$
N2	
N3	2 000 000 300 // 2 000 000 000 300 // 2 300 // 200 300 : correspond à une maitrise non assurée de $\mathbf{\Theta_P}$ et/ou $\mathbf{\Theta_{np}}$
N4	2 1000 000 300 // 2 000 000 3 100 : témoigne de technologies inadaptées.

<u>**Exercice 5 - Questions 5a et 5c**</u>

5a. 358+99

De nombreuses techniques de calcul réfléchi peuvent être employées pour calculer cette somme ; nous reprenons la catégorisation donnée dans le chapitre 3 pour étudier à la fois les réponses possibles et le codage qui leur est attribué et ne plaçons dans le tableau uniquement les technologies principales sous-tendant chacune des techniques. En particulier nous ne précisons pas systématiquement la connaissance des propriétés de numération ni la connaissance des répertoires additifs nécessaires pour la réussite de la tâche dans toutes les techniques, sauf pour $\boldsymbol{\tau_{compt}}$.

Techniques	Éléments technologiques	Réponse élève correcte
$\tau_{CR\_posé}$	Idem T_{CP_+} : Θ_P et Θ_D et Θ_{max}	9 unités + 8 unités =17 unités = 1 dizaine + 7 unités 1 dizaine + 9 dizaines +5 dizaines = 15 dizaines 1 centaine + 3 centaine = 4 centaines Le nombre obtenu est donc 4 centaines 5 dizaines et 7 unités = 457[3]
τ_{compt}	Θ_{compt}	*J'ai compté de un en un...*
$\tau_{CR\_+\_np}$	Θ_{np}	Incorrecte
$\tau_{CR\_+\_dec\_eapd}$	Θ_P et Θ_D et Θ_{max}	358 + 99 = 350 + 8 + 90 + 9= (350+90) + (8 + 9) = 440+ 17 = 457 358+99 = 300 + (90+50) + 8 + 9 = 300+ 140 + 17 = 457 358 + 99 = (350 + 50) + 8+ 49=400 + 57 = 457
$\tau_{CR\ \_+\_dec\text{-}arithm+}$	Θ_{Dec_+} - Θ_{ass_+}- Θ_{comm_+}	358+99= 358 + 2 + 97 = 360 + 97 = 457 358+99= 358 + 42 + 57 = 400 + 57 = 457 358+99= (357 + 1) + 99 = 357 + (1 +99) = 457
$\tau_{CR\_+\_compens}$	Θ_{Dec_+} - Θ_{ass_+}- Θ_{comm_+}	358 + 99 = (358 + 42) + (99 + 1) - 42 - 1 358 + 99 = 358 + (99 + 1) – 1
$T_{CR\_+\_excès}$	Θ_{Dec_+} - Θ_{ass_+}- Θ_{comm_+}	358+99= 358 + (100 - 1) = (358 + 100) -1 = 458 -1 = 457

Les techniques attendues dans ce calcul sont celles qui font apparaître le nombre 100 soit en décomposant 99 comme 100 - 1 (**$T_{CR\_+\_excès}$**), soit en ajoutant 100 et en retranchant 1 (**$\tau_{CR\_+\_compens}$**) ou encore en décomposant 358 sous la forme 357 + 1 (**$\tau_{CR\ \_+\_dec\text{-}arithm+}$**).

Les réponses codées CA1 se distinguent de celles codées CA2 par la connaissance et la maitrise des technologies **Θ_{Dec_+} - Θ_{ass_+}-Θ_{comm_+}** liées aux propriétés arithmétiques des nombres et des opérations pour CA1 ; les technologies **Θ_P**, **Θ_D** et **Θ_{max}** de la numération étant communes. Puisqu'il est difficile de lister de façon exhaustive toutes les techniques de calcul possibles (certaines résolutions appelant successivement différentes techniques), les productions correctes des élèves sont codées de la façon suivante : toutes celles faisant apparaître une décomposition arithmétique d'un des nombres relèvent de CA1, alors que celles qui ne font apparaître que des décompositions en EAPD relèvent de CA2. Comme nous l'avons prévu lors de la définition des modes technologiques de la dimension CA, les réponses correctes faisant explicitement et uniquement référence à **$\tau_{CR\_posé}$** sont codées CA3 et celles relevant de la technologie de comptage **Θ_{compt}**, CA4.

En ce qui concerne les réponses erronées : les erreurs peuvent provenir d'un manque de connaissance dans les répertoires avec l'utilisation adaptée d'une des techniques de calcul réfléchi ou de l'utilisation non adaptée d'une technique (par exemple ajouter 100 + 1 plutôt que 100 - 1 signifiant la déficience de **Θ_{Dec_+}**) par un manque de mobilisation de la technologie sous-jacente. Dans les deux cas, ces erreurs correspondent à l'absence de mobilisation de technologies du calcul, ou de façon incomplète, et par conséquent sont codées CA3.

Toutes les productions qui font référence au comptage (**Θ_{compt}**), à une autre technique non identifiée, ou à l'utilisation erronée de **$\tau_{CR\_posé}$**, due à une méconnaissance des technologies **Θ_p**, **Θ_d** et **Θ_{max}** et

[3] Le discours technologique des élèves risque de ne pas faire apparaître les différents termes renvoyant aux unités de numération et de correspondre à un discours du type : 9 plus 8 égal à 17 ; je pose 7 et je retiens... ou à des égalités du type : 9 + 8 = 17 ; 9 + 5 + 1 = 15 ; 3 + 1 = 4, 358 + 99 = 457.

conduisant à des réponses du type 31417 (9 + 8 = 17 ; 5 + 9 = 14) ou 12148 (3 + 9 = 12 ; 5 + 9 = 14) ou encore 331 (9 + 8 = 17 ; 5 + 9 = 14 ; 14 + 17 = 31) relèvent de CA4.

Codage des réponses de la question 5a :

CA1	Réponses correctes reposant sur une décomposition arithmétique d'un des nombres ($\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{Dec\_+}}$ - $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{ass\_+}}$- $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{comm\_+}}$ & $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{p}}$ - $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{d}}$ - $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{max}}$)
CA2	Réponses correctes reposant uniquement sur des décompositions en EAPD ($\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{p}}$ - $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{d}}$- $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{max}}$)
CA3	Réponses correctes avec $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_pos\acute{e}}}$($\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{p}}$ - $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{d}}$- $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{max}}$) et réponses incorrectes dues à des erreurs dans les répertoires ou dans l'utilisation d'une des techniques de calcul réfléchi correspondant à un manque de mobilisation des technologies liées aux propriétés des opérations
CA4	31417 - 12148 - 331 ... Réponse faisant référence à la technique de comptage ($\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{compt}}$)

5c. Sans poser la division, donne le quotient entier et le reste de 243 : 10. Explique avec des calculs en ligne ou une phrasecomment tu as fait. quotient = ………….. reste = …………..

Les réponses considérées comme correctes sont celles où le quotient et le reste sont justes ; nous avons inclus les réponses qui donnent le quotient décimal 24,3 avec un reste nul.

Nous avons considéré cette tâche comme représentant un type de tâche de calcul réfléchi $\mathbf{T}_{\mathbf{CR\_:}}$ et non de numération puisqu'elle est formulée dans des termes évoquant le calcul et non la numération (nombre de dizaines...) ; par ailleurs, il ne s'agit pas uniquement d'écrire le nombre de dizaines, mais il faut aussi donner le nombre d'unités (reste). Certains élèves peuvent néanmoins utiliser $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CNd}}$ ou $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{divPD}}$ et faire référence aux technologies de la numération ($\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{P}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$) pour donner le nombre de dizaines correspondant au quotient et déterminer par la suite le reste. Cette justification relève ainsi du codeCA2, caractérisées par $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{P}}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{D}}$ dans la dimension CA. Les réponses évoquant la technique de troncature (enlever le chiffre 3 pour déterminer le quotient) sont interprétées aussi comme reposant sur des technologies de numération, tout comme le décalage de la virgule dans une division par 10.

Les réponses exactes (du quotient et du reste) justifiées par des éléments faisant référence à la définition de la division euclidienne par son égalité caractéristique ($\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{div\text{-}euc}}$) sont codées CA1, caractérisé en partie par les technologies relatives aux opérations.

Comme pour les deux questions précédentes, les réponses justifiées par la technique de calcul posé $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_pos\acute{e}}}$ sont caractéristiques de CA3, ainsi que celles correspondant à la mise en œuvre de techniques inadaptées comme par exemple : l'ajout d'un zéro au résultat (2430 résultant d'une confusion entre $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{multPD}}$et $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{divPD}}$) ou un manque de maitrise de $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{p}}$ et de $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{d}}$ conduisant à des raisonnements du type : 20 × 10 =200 et 4 ×10 = 40, le quotient est 204 ou 240. L'utilisation de la technique $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{divPD}}$ sans la mobilisation des technologies de la numération et de $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{div\text{-}euc}}$ conduit à des réponses où le quotient est de 24,3 et le reste est de 0,3 ou de 3 ou n'est pas déterminé. Nous avons considéré ces réponses comme étant fausses et nous les codons ici CA3.

Enfin, le codage CA4 correspond à une mise en œuvre incorrecte de $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CR\_pos\acute{e}}}$ ou de toute autre technique ne faisant référence à aucun élément technologique de la numération ou des opérations.

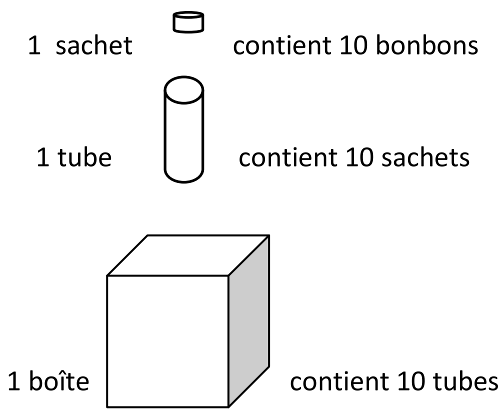
Codage des réponses de la question 5c :

CA1	Réponses correctes reposant sur la définition d'une division euclidienne et de son égalité caractéristique (**$\Theta_{div\text{-}euc}$**) et éventuellement de la division décimale.
CA2	Réponses correctes évoquant le nombre de dizaines ou un décalage de la virgule dans une division par 10, et reposant sur les technologies de la numération (**Θ_p** et **Θ_d**)
CA3	Réponses correctes avec **$\tau_{CR\_posé}$** ou erreur due à des technologies**$\Theta_{div\text{-}euc}$** ou **Θ_p** et **Θ_d** qui ne sont pas encore suffisamment maitrisées : q = 204 ou q =240 ; q= 24,3 avec r= 0,3 ou 3 ; q=240 et r=3
CA4	Réponse s'appuyant sur une technique de calcul ne se référant à aucune technologie de la division ou de la numération.

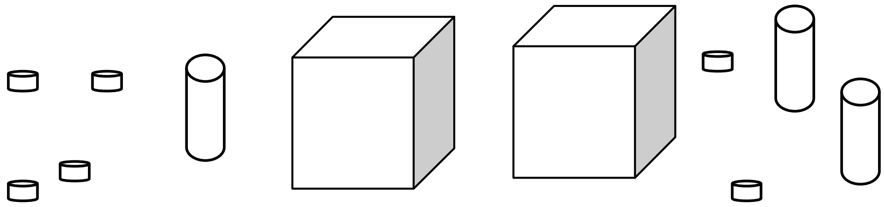
Exercice 6

L'exercice est composé de trois questions permettant, dans un contexte donné, de mobiliser le nombre sous son aspect cardinal ; la tâche n'étant pas usuelle, sa résolution demande au résolveur de convoquer les praxéologies **T_{Dc}** et **T_{CNd}** avec choix de technique ; ce qui fait de cet exercice l'un des plus complexes du test.

Une entreprise de fabrication de bonbons a différents emballages selon le nombre de bonbons emballés :



6a. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ?



Dans l'analyse que nous faisons du problème, les techniques de résolution sont celles correspondant à **T_{Dc}** : **$\tau_{Dc\text{-}ec}$** (avec les technologies de la numération **Θ_P**et **Θ_D**), **$\tau_{Dc\text{-}calc}$** (avec des technologies de calcul) et $\tau_{Dc\text{-}np}$ (s'appuyant sur les technologies de la numération parlée). La question 6a, mettant en jeu une collection organisée de façon maximale, ne demande pas de réorganisation ou de groupement ; par conséquent, la technologie Θ_{max} n'est pas convoquée.

Nous avons choisi de coder N2 toutes les réponses correctes faisant apparaitre des traces de calcul posé et N1 toutes les réponses correctes sans trace de ce type, et s'appuyant par conséquent sur des techniques justifiées par les technologies de la numération.

La mise en œuvre de techniques erronées s'appuyant sur des technologies de la numération insuffisamment mobilisées caractérise N3 et conduit à des réponses du type : 236 (où il n'est pas pris en compte le fait qu'un sachet ne corresponde pas à une unité, mais à une dizaine) ou 23 600 et toute réponse correspondant à une permutation circulaire des chiffres 2,3, 6 et 0 comme par exemple 6320 ou 20360.

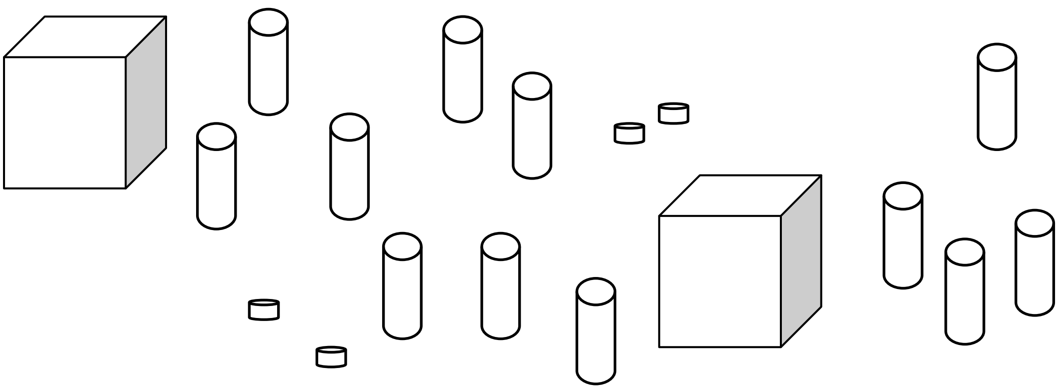
La technologie dominante N4 est en partie caractérisée par des technologies de comptage Θ_{compt} et l'absence de référence à des technologies de numération ; elle correspond ici aux réponses 11 ou 110 correspondant au nombre d'éléments de la collection ou à ce nombre multiplié par 10.

Codage des réponses de la question 6a :

N1	2360 sans trace de calcul (avec les technologies de la numération Θ_P et Θ_D)
N2	2360 avec trace de calcul
N3	236 - 20 360 - 23 600 ou toute réponse étant une permutation circulaire des chiffres 3, 2, 6 et 0 et caractérisant un manque de maitrise dans les technologies Θ_P et Θ_D
N4	11 ou 110 justifié par Θ_{compt}

Tableau 16 - Codage des réponses de la question 6a selon les technologies caractérisant la dimension N

6b. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ?



Les techniques de résolution de la question 6b sont identiques à celles de la question précédente, mais comme le nombre de tubes est supérieur à 10, il est nécessaire pour la mise en œuvre de $\tau_{Dc\text{-}ec}$ de faire apparaitre un groupement supplémentaire ; ce qui se traduit par la convocation des technologies Θ_P et Θ_D (comme pour la question 6a), mais aussi de Θ_{max}. Le codage des réponses pour N1 et N2 est identique à celui effectué dans la question précédente.

Pour N3 : les erreurs peuvent provenir de l'absence de mobilisation de Θ_{max}, et par conséquent sur Θ_P et Θ_D et conduire à des réponses du type 21240 ou 2124 : ces réponses sont construites par la juxtaposition du nombre de boîtes, puis de tubes et de sachets. Nous considérons que les réponses du type 2 120040 ou 2 1204 ou encore 2 12040 résultent d'un manque de maîtrise similaire sur $\mathbf{\Theta_P}$ et $\mathbf{\Theta_D}$; il en est de même des réponses qui ne prennent pas en compte comme le groupement supplémentaire de dix centaines en un millier et qui sont de la forme 2240.

Comme pour la question précédente, les réponses 18 ou 180, bâties à partir du nombre d'éléments de la collection, relèvent du comptage et sont codées N4 ; nous interprétons les réponses 17-170 et 19-190 comme des erreurs dans le dénombrement des objets de la collection, mais elles relèvent de la mise en œuvre d'une technologie de comptage $\mathbf{\Theta_{compt}}$ et de la non connaissance des technologies de la numération.

Codage des réponses de la question 6b :

N1	3240 sans trace de calcul (avec les technologies de la numération $\mathbf{\Theta_P}$ et $\mathbf{\Theta_D}$ et $\mathbf{\Theta_{max}}$)
N2	3240 avec trace de calcul
N3	21240 ou 212040 ou 2240... $\mathbf{\Theta_P}$, $\mathbf{\Theta_D}$ et $\mathbf{\Theta_{max}}$ ne sont pas mobilisées
N4	18 - 180 - 17- 170 - 19-190 justifié par $\mathbf{\Theta_{compt}}$

6c. De combien de tubes a-t-on besoin pour emballer 859 bonbons ?

Cette dernière question demande une interprétation de l'énoncé pour pouvoir être réussie : il ne s'agit pas uniquement de donner le nombre de centaines du nombre, mais de lui ajouter 1 pour déterminer le nombre de tubes nécessaires pour emballer ce nombre de bonbons.

Les réponses considérées comme correctes sont 9 tubes ou 8 tubes et 6 sachets ; la distinction entre N1 et N2 est toujours identique aux items précédents et basée sur la présence ou non de trace de calcul (une division par 100 par exemple). Nous considérons comme fausses les réponses 8 tubes et 5 sachets ; elles ne caractérisent pas pour autant N3, puisqu'elles ne relèvent pas d'un défaut sur les technologies de numération, mais plutôt d'une mauvaise interprétation de l'énoncé.

Les réponses codées N3 sont du type 900-90 ; ou 800 - 80 ; ou encore 86 ou 85 où la relation entre les tubes, les boites et les sachets à travers les écritures chiffrées n'a pas été complètement perçue. Nous les interprétons comme une défaillance des technologies de numération, mais elles pourraient aussi provenir d'une mauvaise interprétation de l'énoncé.

La mise en œuvre de techniques inadaptées, ne reposant sur aucune technologie de la numération peuvent conduire à des réponses comme 22 correspondant à la somme des chiffres de 859 ou 13 (somme de 8 et 5).

Codage des réponses de la question 6c :

N1	9 tubes ou 8 tubes et 6 sachets sans trace de calcul avec les technologies de la numération
N2	9 tubes ou 8 tubes et 6 sachets avec trace de calcul
N3	85 - 86 - 80 - 800 -90 - 900 qui témoignent d'un manque de maitrise dans les technologies $\mathbf{\Theta_p}$ et $\mathbf{\Theta_d}$ et $\mathbf{\Theta_{max}}$
N4	22 ou 13

Exercice 7 - question 7b

7b. Pose et effectue la division euclidienne 8463 : 12

La réponse attendue pour cet exercice et caractérisant N1 est celle ci-contre : elle correspond à la mise en œuvre de $\boldsymbol{\tau_{CP\_:}}$, qui est justifiée par $\boldsymbol{\Theta_p}$et $\boldsymbol{\Theta_d}$ et $\boldsymbol{\Theta_{div\_euc}}$. Toutes les productions qui font apparaitre une étape de calcul se traduisant par la soustraction intermédiaire 6-0 sont codées N2 pour les mêmes raisons que dans la question 7a.

8	4	6	3	1	2	
	0	6	3	7	0	5
			3			

Nous considérons que les réponses laissant apparentes les soustractions intermédiaires (84 - 84 ou 63 - 60) relèvent du palier N1.

De la même façon que pour la question 7a, les erreurs dues à une méconnaissance des répertoires ou celles qui proviennent de l'utilisation d'une technique erronée relèvent de CA3. L'utilisation d'une technique erronée peut être due à un manque de maitrise :

- de $\boldsymbol{\Theta_p}$ et $\boldsymbol{\Theta_d}$ conduit à un quotient de 75 ou de 7,5 ou 70,5 au lieu de 705

- de $\boldsymbol{\Theta_{div\text{-}euc}}$ imposant que le reste soit inférieur au diviseur ; le type de réponse obtenue serait alors de 6105 par exemple.

Le palier technologique N4 peut correspondre à la mise en œuvre de techniques de soustractions successives (peu attendues ici, notamment par effet de contrat, les élèves risquent de ne pas s'autoriser de tels calculs) ou de procédés ne reposant pas sur des technologies sous-tendant $\tau_{CP\_:}$.

Codage des réponses de la question 7b :

CA1	q = 705 et r =3 ou q = 705,25 et r =0 ou q = 705,2 et r=0,3 sans ligne de calcul intermédiaire qui traduit la maitrise experte de $\boldsymbol{\Theta_p}$et $\boldsymbol{\Theta_d}$ et $\boldsymbol{\Theta_{div\_euc}}$.
CA2	q = 705 et r =3 ou q = 705,25 et r =0 ou q = 705,2 et r=0,3 avec ligne de calcul intermédiaire qui traduit la maitrise de $\boldsymbol{\Theta_p}$et $\boldsymbol{\Theta_d}$ et $\boldsymbol{\Theta_{div\_euc}}$.
CA3	q = 75 ou q = 7,5 ou q = 70,5 ou q = 6105 qui correspond à un manque de maitrise de $\boldsymbol{\Theta_p}$et $\boldsymbol{\Theta_d}$ ou de $\boldsymbol{\Theta_{div\_euc}}$ et/ou erreur due à une méconnaissance des répertoires
CA4	Utilisation d'une technique qui ne se réfère pas à des technologies de la numération ou du calcul.

Exercice 8

Le codage de la dimension UA «usage de l'arithmétique » a été réalisé dans le corps du texte de la thèse. Nous précisons ici le codage de la dimension CA.

Dans une librairie, les 3 vendeuses doivent ranger des livres dans des cartons. Dans chaque carton, il faut placer 8 livres ; elles doivent mettre en tout moins de 4 heures pour ranger l'ensemble. De combien de cartons auront-elles besoin pour ranger 427 livres ?

Il est délicat de coder cette dimension puisque tous les élèves ne vont pas poser le même calcul ; ce dernier dépend du modèle choisi pour traiter le problème. Les codages de la dimension CA sont en accord avec ceux de la dimension UA, en particulier la réussite au problème en utilisant des calculs de produits relève d'une technologie dominante CA2 ; les erreurs dans la connaissance de répertoires ou dans les techniques de calcul de la division sont considérées comme caractérisant CA3.

Codage des réponses de la question 8 pour la dimension CA :

CA1	le calcul de la division est correct (qu'il soit effectué de façon posée ou mentalement) et témoigne d'une maîtrise des répertoires et des propriétés de la division
CA2	Les calculs aboutissent à un résultat correct, mais correspondent à des multiplications (modèle multiplicatif utilisé). Le quotient de la division est obtenu par essais-erreurs.
CA3	Le quotient et/ou le reste obtenu dans la division correspondent à un manque de maitrise des répertoires ou des technologies de la numération et/ou de la division euclidienne ($\boldsymbol{\Theta_p}$et $\boldsymbol{\Theta_d}$ ou de $\boldsymbol{\Theta_{div\_euc}}$)
CA4	Utilisation d'un procédé qui ne relève pas des technologies de la numération ou du calcul ; en particulier pour les productions qui aboutissent à des sommes ou à des produits mettant en jeu les nombres 3 ou 8 ou 4 (et qui ne prennent pas en compte 427).

Exercice 9

Coche les expressions qui sont égales à 345 012[4] :		
□ (a) 34 + 5 012	□ (b) 300 000 + 45 012	□ (c) 34 000 + 5 012
□ (d) 10 + 345 000 + 2	□ (e) 12 + 40 000 + 300 000 + 5000	

Nous considérons ici qu'il s'agit d'une tâche représentant $\mathbf{T_{Tec/eapd}}$; même si nous ne les avons pas distingués comme des types de tâches spécifiques dans l'OMR 2, il s'agit ici plus précisément, par le format QCM de la question, d'un type de tâche d'association entre un type de représentation d'un nombre (écritures chiffrées) et un autre type de représentation (écritures additives en puissances de 10).

Les choix de réponses permettent de repérer la mise en œuvre des technologies de la numération ou éventuellement celles du calcul :

□ (a) 34 + 5 012 : réponse fausse relevant d'une conception « concaténation » (Fuson 1997) qui traduit l'absence des technologies $\boldsymbol{\Theta_P}$ et $\boldsymbol{\Theta_D}$ et codée UA4.

□ (b) 300 000 + 45 012 : décomposition correcte. $\boldsymbol{\Theta_P}$ n'est pas suffisante pour associer la représentation (b) à 345 012 puisque la décomposition n'est pas canonique ; $\boldsymbol{\Theta_D}$ est aussi convoquée.

□ (c) 34 000 + 5 012 : réponse fausse. Le nombre de dizaines de milliers présent dans la décomposition (c)n'est pas correct (34 000 au lieu de 340 000). La réponse est interprétée comme l'utilisation de $\boldsymbol{\tau_{pos}}$ en dehors de son domaine de validité et provient de la non mobilisation des technologies $\boldsymbol{\Theta_P}$ et $\boldsymbol{\Theta_D}$ permettant de la justifier.

[4] Nous ajoutons, pour qualifier les nombres représentés dans les choix de réponses, des lettres afin de pouvoir les désigner plus facilement dans le texte ; elles n'apparaissent pas dans le test passé par les élèves.

□ (d) 10 + 345 000 + 2 : décomposition correcte séparant les milliers des autres unités (dizaines et unités simples). Comme pour (b), Θ_P et Θ_D sont mobilisées pour le choix de cette réponse.

□ (e) 12 + 40 000 + 300 000 + 5000 : réponse correcte correspondant à une décomposition canonique mais non réduite. La technologie Θ_P est principalement en jeu pour associer 345 012 à (e).

Les réponses attendues sont donc (b), (d) et (e) ; nous estimons que les technologies Θ_P et Θ_D sont maitrisées lorsque ces trois choix de réponses sont effectués ; ils caractérisent le palier N1. Si une ou deux de ces trois réponses correctes sont données avec une présence de calculs (trace de calculs posés), cela signifie que les technologies de calcul viennent suppléer dans certains cas celles de la numération et par conséquent que la réponse correspond aux technologies dominantes N2.

Le distracteur (a) correspond à une conception qui n'intègre aucune des technologies de la numération ; par conséquent son choix dans les réponses, même s'il est accompagné d'autres réponses correctes, est interprété comme correspondant à la technologie N4 caractérisant l'absence de ces technologies.

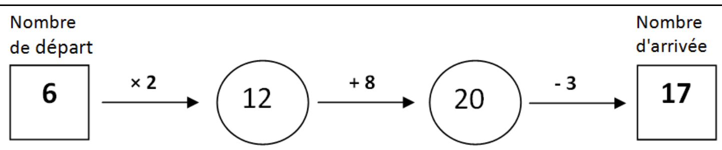
Comme la technologie dominante N3 est caractérisée par Θ_P, avec un manque de maitrise de Θ_D, les combinaisons de réponses suivantes lui sont associées :
- la présence de la réponse fausse (c) ;
- une seule ou deux réponses correctes accompagnées ou non d'une seule réponse fausse.

<u>Codage des réponses de la question 9 :</u>

N1	(b) & (d) & (e) uniquement caractérisant Θ_P et Θ_D
N2	(b) & (d) & (e) uniquement avec trace de calcul caractérisant Θ_P et Θ_D
N3	Présence de (c) ou une ou deux des réponses correctes caractérisant la présence de Θ_P mais pas celle de Θ_D
N4	Présence de la réponse (a) qui traduit le manque de Θ_P et celui de Θ_D

Exercice 10

Il s'agit dans les deux questions de l'exercice 10 d'appliquer un programme de calcul, dans le sens direct (10a) et dans le sens indirect (10b).



Dans ce programme de calcul, si je choisis 6 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée est 17.

10a. Si je choisis 30 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée que j'obtiens est ....

Écris les calculs que tu as faits.

10b. J'ai obtenu 125comme nombre d'arrivée. Quel nombre avais-je choisi au départ ?

Écris les calculs que tu as faits.

Nous utilisons cet exercice pour déterminer trois dimensions : UA, CA et RE.

Codage de la dimension UA à partir de la question 10b

Nous cherchons dans cette dimension à étudier les modèles mis en jeu par les élèves à travers les écritures qu'ils produisent et nous ne prenons pas en compte ce qui relève des écritures non adaptées ou des erreurs de calcul.

La technique de résolution attendue dans cette question consiste à inverser chacune des opérations successivement, en commençant par la dernière du programme de calcul, pour retrouver le nombre de départ ; la résolution de cette question conduit à la production d'expressions arithmétiques et demande la reconnaissance d'un modèle mathématique permettant de passer du nombre d'arrivée au nombre de départ.

Toute réponse, témoignant de la mise en œuvre des opérations inverses dans le bon ordre (ajouter 3, soustraire 8 et diviser par 2), est considérée comme justifiée par la technologie $\mathbf{\Theta_{RP\_Prod\_ea}}$ qui lie le problème avec l'expression arithmétique produite ; ce type d'écriture est alors codée UA1.

Nous distinguons UA1 de UA2, par le type d'écriture qui est produite selon les modèles mathématiques convoqués. Dans UA1, les écritures donnent à voir la mobilisation des opérations inverses ((125 + 3 - 8) : 2), alors que dans UA2, elles donnent à voir les opérations dans le sens du programme de calcul, c'est-à-dire : ... × 2 + 8 - 3 = 120, l'élève pouvant ensuite produire une expression du type 60 × 2 + 8 - 3 = 120 (ou plusieurs égalités pas à pas enchaînées équivalentes à cette dernière).

Les technologies dominantes de UA3 conduisent à des techniques employées en dehors de leur domaine de validité ; une technique de ce type ici consiste à repérer que l'on passe de 6 à 17 en ajoutant 11 et d'étendre cette technique au nombre 125. Les expressions 125 - 11 ou 125 + 11 (ou les réponses 114 ou 136) sont donc codées UA3. Nous considérons aussi comme caractérisant UA3 les expressions numériques où une des opérations n'est pas correctement inversée (avec par exemple des calculs de ce type : (125 + 3 + 8) × 2

Les réponses témoignant de l'application du programme dans le sens direct et qui conduisent à 255 (s'il n'y a pas d'erreur de calcul) ou celles qui correspondent à l'application du programme en sens inverse, mais sans modification des opérations (soustraire 3, ajouter 8, multiplier par 2) montrent que les modèles mathématiques en jeu dans l'exercice ne sont pas reconnus ; il en est de même lorsque des écritures font intervenir les nombres 6, 12, 20 ou 17présents dans l'énoncé. Nous codons ces réponses UA4.

UA1	Calculs faisant intervenir les opérations inverses (125 + 3 = 128 ; 128 - 8 = 120 ; 120 : 2= 60)
UA2	Calculs corrects, mais ne faisant pas intervenir les opérations inverses et menant à des écritures à trous du type (... × 2 + 8 - 3 = 120)
UA3	Utilisation de techniques en dehors de leur domaine de validité : - des erreurs dans la transformation d'une des opérations en son inverse (modèle mathématique inadapté) ; - la modification de chacune des opérations mais pas dans le « bon » sens : divise par 2, retranche 8 et ajoute 3 ; - la soustraction de 11 pour obtenir 114 (ou tout autre résultat correspondant à cette démarche avec d'éventuelles erreurs de calcul).

UA4	Pas de reconnaissance du modèle mathématique en jeu : - une application du programme dans le sens direct - la réalisation du programme en sens inverse, mais sans modifier les opérations - l'utilisation de données non adaptées (nombres 6, 12, 20 ou 17)

Codage de la dimension CA à partir de la question 10b :

Pour la réalisation des calculs de cet exercice, il s'agit d'utiliser des techniques de calcul pas à pas reposant principalement sur les propriétés de la numération et sur la connaissance des répertoires ; dans la question 10a comme dans la question 10b, il n'est pas utile de décomposer les nombres de façon arithmétique. L'ajout ou le retrait de 8 et de 3 se fait uniquement sur les unités simples, sans nécessiter de retenue ou de transformation du nombre ; la multiplication et la division par 2 ne mettent en jeu que des nombres multiples de 10. C'est donc principalement la connaissance des répertoires qui est en jeu dans les calculs, et de façon sous-jacente et très implicite, les technologies de la numération ($\boldsymbol{\Theta_p}$ et $\boldsymbol{\Theta_d}$).

Nous considérons simultanément les résultats obtenus dans les questions 10a et 10b pour coder les réponses selon la dimension CA.

Les réponses correctes 65 et 60 obtenues sans trace de calcul posé sont codées CA1 : l'élève maîtrise les répertoires et les propriétés des opérations pour remonter le programme de calcul. Nous distinguons CA2 de CA1 par la présence éventuelle de calcul posé ; ce dernier témoignant d'une moindre maitrise du calcul ou des propriétés des opérations.

Le code CA3 correspond à un manque de maitrise des répertoires, les réponses erronées dues à de telles erreurs sont ainsi codées CA3. Nous prenons aussi en compte les erreurs de calcul témoignant de l'absence de mobilisation (ou de façon incomplète) des propriétés des opérations, qui peut se traduire par la méconnaissance des opérations inverses, nécessaires pour la remontée du programme de calcul (par exemple la réponse 260 correspond à l'application du programme en remontant, mais sans modifier les opérations : 125 - 3 + 8 × 2).

Les réponses témoignant de la mise en œuvre de techniques de comptage (difficiles à repérer ici) ou celles ne faisant intervenir dans leur calcul que les nombres en jeu ou reprenant les nombres donnés dans l'énoncé (30 et 125) sont codées CA4 puisqu'elles témoignent que l'élève n'est pas entré dans un procédé de calcul.

CA1	65 et 60 sans trace de calcul
CA2	65 et 60 avec trace éventuelle de calcul posé liée à un défaut de la technologie $\boldsymbol{\Theta_{dec\_\times}}$
CA3	Résultat faux avec erreur de calcul lié à la maitrise des répertoires, ou erreurs liées aux opérations inverses (en lien avec UA3)
CA4	Résultat faux avec technique de calcul ne faisant référence à aucune technologie correcte ou ne mobilisant que les nombres présents dans l'énoncé (12,20, 6...) ou correspondant aux nombres présents dans la question (30 ou 125).

Codage des réponses de la question 10a et de la question 10b selon la dimension RE :

Les écritures de la question 10b peuvent être de la forme de celle de la question 10a selon la façon dont la modélisation et la conversion ont été effectuées ; des expressions telles que ((60 × 2) + 8) - 3 = 120 + 8 - 3 = 125 peuvent ainsi caractériser RE1.

	Question 10a	Question 10b
RE1	((30 × 2) + 8) - 3 = 60 + 8 - 3 = 65	((125 + 3) - 8) : 2 = 60
RE2	30 × 2 = 60 ; 60 + 8 = 68 ; 68 - 3 = 65 ou utilisation d'un schéma avec des flèches comme dans l'exemple.	125 + 3 = 128 ; 128 - 8 = 120 ; 120 : 2 = 60 utilisation d'un schéma avec des flèches comme dans l'exemple.
RE3	30 × 2 =60 + 8 = 68 - 5 = 63	125 + 3 = 128 - 8 = 120 : 2 = 60
RE4	Résultats de calculs intermédiaires écrits sans signe « = » ni schéma.	

Exercice 11

Noam a voulu calculer 1 379 + 562 à la calculatrice, mais il a tapé par erreur : 1 279 + 562.

A partir du résultat qu'il a obtenu, que doit-il faire pour corriger son erreur sans taper à nouveau tout le calcul ?

□ (a) Ajouter 10 □ (b) Ajouter 100 □ (c) Soustraire 10 □(d) Soustraire 100

Nous identifions ce problème comme relevant uniquement de la numération, bien qu'une conversion de représentation entre l'énoncé, les écritures arithmétiques qui y figurent et les réponses proposées soit nécessaire pour résoudre le problème.

Les distracteurs du QCM portent sur la confusion entre ajout/retrait et sur le rang auquel se joue l'écart entre les nombres (celui des centaines). Nous avons choisi de n'interpréter les erreurs que dans la dimension N puisqu'il ne s'agit pas d'un problème arithmétique conduisant à la production d'une expression arithmétique (c'est pourquoi nous ne le traitons pas dans la dimension UA).

Les réponses (b) et (d) témoignent de la reconnaissance d'un écart de 100 entre les deux nombres, et par conséquent, elles sont justifiées par la présence d'éléments technologiques relevant de $\boldsymbol{\Theta_P}$ (constat d'un écart sur le chiffre des centaines) ou indirectement par le calcul (ajout ou retrait de 100). La réponse correcte (b) est codée N1 ou N2 si l'élève a réalisé un calcul du type : 1379 - 1279 ou 1279 + 100 pour effectuer son choix. La réponse (d) est incorrecte, mais témoigne que l'élève a reconnu un écart de 100, ce que nous interprétons comme la présence de la technologie $\boldsymbol{\Theta_P}$ mais avec une maitrise qui n'est pas encore suffisante : ce que nous codons N3.

Les réponses correspondant à un ajout ou à un retrait de 10, signifient que l'élève ne reconnaît pas que la différence d'écriture entre 1379 et 1279 se joue sur le chiffre des centaines (ou correspond à un écart de 100), et que par conséquent, la technologie de position $\boldsymbol{\Theta_p}$ n'est pas présente ; les réponses (a) et (c) caractérisent par conséquent N4.

Codage des réponses de l'exercice 11 sur la dimension N:

N1	(b) sans trace de calcul caractérisant $\boldsymbol{\Theta_P}$ et $\boldsymbol{\Theta_D}$
N2	(b) avec trace de calcul
N3	(d) provenant d'un manque de maitrise de $\boldsymbol{\Theta_P}$
N4	(a) ou (c) provenant d'un manque de $\boldsymbol{\Theta_P}$

Exercice 12

Dans une boulangerie, Pierre a vendu 3 fois moins de brioches que de croissants. Il a vendu 24 croissants. Combien a t-il vendu de brioches ?

□ 21 □ 8 □ 27 □ 72

Choix des distracteurs :

□ 21 = 24 - 3 □ 8 =24 : 3 □ 27 =24 + 3 □ 72 =24 × 3

21 et 27 correspondent à la reconnaissance d'un modèle additif ou soustractif ou à la mise en œuvre d'un modèle collection conduisant à une technologie de comptage0

72 correspond à une erreur dans la reconnaissance du modèle multiplicatif ; la présence du terme « fois » ayant pu impliquer une conversion du problème par la multiplication 24 × 3. La structure multiplicative de ce problème est par conséquent reconnue, ce qui témoigne de la présence d'éléments de la technologie.

Enfin, nous ne pouvons distinguer, par ce format de question, ce qui relèverait de la technologie dominante UA1 de UA2 à travers la réponse correcte 8, qui correspond à la reconnaissance du modèle multiplicatif sous-jacent avec la mise en œuvre d'une multiplication. Nous codons donc UA1 la réponse 8.

Codage des réponses de l'exercice 12 :

UA1	8 témoignant de la reconnaissance d'un modèle de division
UA2	
UA3	72 témoignant de la reconnaissance d'un modèle multiplicatif et non de division
UA4	21 et 27 témoignant de la reconnaissance d'un modèle additif ou soustractif, voire de technologies et de techniques de comptage inadaptées

ANNEXE 4 : RÉPARTITION SELON LES DIMENSIONS

RÉPARTITION SELON LA DIMENSION UA

Répartition en nombre d'élèves :

	Exercice 8	Exercice 10	Exercice 11
UA1	75	75	118
UA2	25	1	0
UA3	2	19	10
UA4	25	35	67
pas de codage	78	75	10

Répartition en pourcentages

	Exercice 8	Exercice 10	Exercice 11
UA1	37%	37%	58%
UA2	12%	0%	0%
UA3	1%	9%	5%
UA4	12%	17%	33%
pas de codage	38%	37%	5%

RÉPARTITION SELON LA DIMENSION N

Répartition en nombre d'élèves :

	Ex 1a	Ex 1b	Ex 2	Ex 3a	Ex 3b	Ex 4	Ex 6a	Ex 6b	Ex 6c	Ex 9	Ex 11
N1	178	151	153	108	24	10	44	43	65	75	161
N2	2	0	0	0	0	0	41	37	0	2	0
N3	18	53	24	47	51	172	16	17	39	87	14
N4	5	0	22	40	125	8	34	22	1	25	22
pas de codage	2	1	6	10	5	15	70	86	100	16	8

Répartition en pourcentages :

	Ex 1a	Ex 1b	Ex 2	Ex 3a	Ex 3b	Ex 4	Ex 6a	Ex 6b	Ex 6c	Ex 9	Ex 11
N1	87%	74%	75%	53%	12%	5%	21%	21%	32%	37%	79%
N2	1%	0%	0%	0%	0%	0%	20%	18%	0%	1%	0%
N3	9%	26%	12%	23%	25%	84%	8%	8%	19%	42%	7%
N4	2%	0%	11%	20%	61%	4%	17%	11%	0%	12%	11%
pas de codage	1%	0%	3%	5%	2%	7%	34%	42%	49%	8%	4%

RÉPARTITION SELON LA DIMENSION CA

Répartition en nombre d'élèves :

	Ex 5a	Ex 5b	EX 5c	Ex 7a	Ex 7b	Ex 8	Ex 10
CA1	59	38	21	43	32	63	74
CA2	16	17	36	57	61	22	0
CA3	31	50	47	91	73	10	41
CA4	7	16	2	2	0	5	8
pas de codage	92	84	99	12	39	105	82

Répartition en pourcentages :

	Ex 5a	Ex 5b	EX 5c	Ex 7a	Ex 7b	Ex 8	Ex 10
CA1	29%	19%	10%	21%	16%	31%	36%
CA2	8%	8%	18%	28%	30%	11%	0%
CA3	15%	24%	23%	44%	36%	5%	20%
CA4	3%	8%	1%	1%	0%	2%	4%
pas de codage	45%	41%	48%	6%	19%	51%	40%

RÉPARTITION SELON LA DIMENSION RE

Répartition en nombre d'élèves :

	Question 5a	Question 5b	question 10a	Question 10b
RE1	18	13	6	3
RE2	46	46	57	53
RE3	38	34	83	68
RE4	3	3	1	1
pas de codage	100	109	58	80

Répartition en pourcentages

	Question 5a	Question 5b	question 10a	Question 10b
RE1	9%	6%	3%	1%
RE2	22%	22%	28%	26%
RE3	19%	17%	40%	33%
RE4	1%	1%	0%	0%
pas de codage	49%	53%	28%	39%

ANNEXE 5 : PRODUCTIONS D'ÉLÈVES AU TEST DIAGNOSTIQUE : DIMENSIONS N - CA - RE

Annexe 5.1 : Dimension N

Production de Maili (N1)

Exercice 1
Écris en lettres 127050 : cent vingt-sept mille cinquante

Écris en chiffres deux-millions-trois-cents : 2000 300

Exercice 2
Complète la suite de nombres : 4677 – 4777 – 4877 – 4977 - 5077

Exercice 3
Coche pour chaque question la bonne réponse :

- Combien y a t-il de milliers dans 5 millions ?

□ 5 □ 50 □ 500 ☒ 5 000

- 20 centaines et 15 dizaines est égal à :

□ 2015 unités □ 200 150 unités □ 215 unités ☒ 2 150 unités □ 20 150 unités

Exercice 4
Entoure le nombre le plus grand parmi les deux :

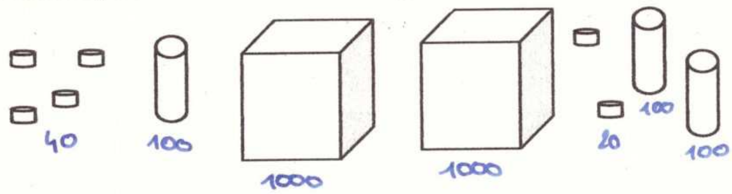
2 milliers et 26 centaines 3 milliers et 15 centaines

Explique comment tu as fait :

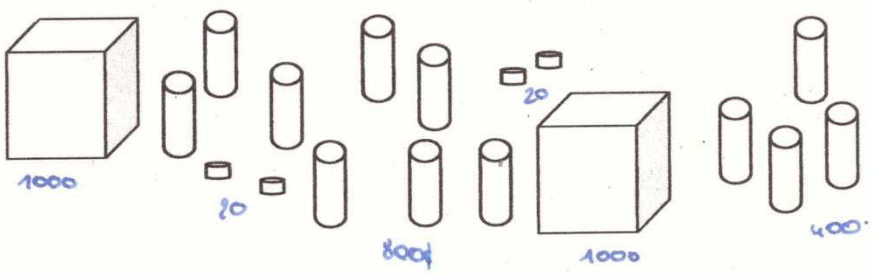
2 milliers et 26 centaines = 4600 unités

3 milliers et 15 centaines = 4500 unités

1. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? 2360 bonbons



2. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? 3240 bonbons



3. De combien de tubes a-t-on besoin pour emballer 859 bonbons ?

9 tubes

Réponse correcte à l'exercice 9.

Production de Gianni (N2)

Exercice 1

Écris en lettres 127050 : cent vingt sept mille cinquante

Écris en chiffres deux-millions-trois-cents : 2 000 300

Exercice 2

Complète la suite de nombres : 4677 – 4777 – 4877 – 4977 - 5077

Exercice 3

Coche pour chaque question la bonne réponse :

- Combien y a t-il de milliers dans 5 millions ?

☐ 5 ☐ 50 ☐ 500 ☒ 5 000

- 20 centaines et 15 dizaines est égal à :

☐ 2015 unités ☐ 200 150 unités ☐ 215 unités ☒ 2 150 unités ☐ 20 150 unités

Exercice 4

Entoure le nombre le plus grand parmi les deux :

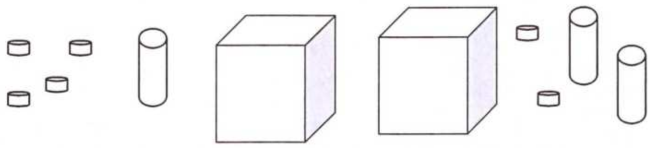
2 milliers et 26 centaines 3 milliers et 15 centaines

Explique comment tu as fait :

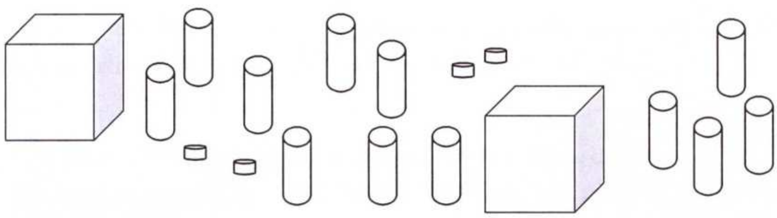
2 milliers + 20 centaines = 4 millers + 6 centaines = 4 milliers 6 centaines

3 milliers + 10 centaines = 4 milliers + 5 centaines = 4 millers et 6 centaines

1. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? 2 360



2. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? 3 240



3. De combien de tubes a-t-on besoin pour emballer 859 bonbons ?

On a besoin de 9 tubes

exo6

60 + 300 + 2000 = 2 360

40 + 1200 + 2000 = 3.240

Réponse correcte à l'exercice 9

Production de Swann (N3)

Exercice 1
Écris en lettres 127050 : Cent vingt sept mille cinquante

Écris en chiffres deux-millions-trois-cents : 2.0000.000.300

Exercice 2
Complète la suite de nombres : 4677 – 4777 – 4877 – 4977 5077

Exercice 3
Coche pour chaque question la bonne réponse :

- Combien y a t-il de milliers dans 5 millions ?

☒ 5 ☐ 50 ☐ 500 ☐ 5 000

- 20 centaines et 15 dizaines est égal à :

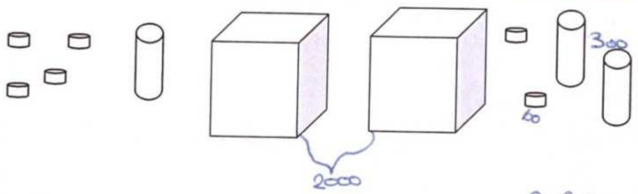
☐ 2015 unités ☐ 200 150 unités ☒ 215 unités ☐ 2 150 unités ☐ 20 150 unités

Exercice 4
Entoure le nombre le plus grand parmi les deux :

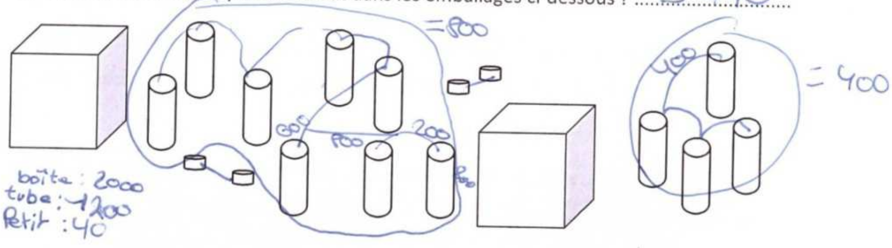
2 milliers et 26 centaines — 3 milliers et 15 centaines

Explique comment tu as fait :
J'ai regarder les "millier" et je me suis dit que 3 est plus grand que 2

1. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? 2 360



2. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? 3 240



3. De combien de tubes a-t-on besoin pour emballer 859 bonbons ?
8 tubes

Exercice 9
Coche les expressions qui sont égales à 345 012 :

☐ 34 + 5 012 ☒ 300 000 + 45 012 ☒ 34 000 + 5 012
☒ 10 + 345 000 + 2 ☒ 12 + 40 000 + 300 000 + 5000

Production d'Amandeen (N4)

Exercice 1

Écris en lettres 127050 : mille-deusc-cent-soixante-dix million cinquante

Écris en chiffres deux-millions-trois-cents : 2 1300

Exercice 2

Complète la suite de nombres : 4677 – 4777 – 4877 – 4977 4087

Exercice 3

Coche pour chaque question la bonne réponse :

- Combien y a t-il de milliers dans 5 millions ?

☐ 5 ☐ 50 ☐ 500 ☒ 5 000

- 20 centaines et 15 dizaines est égal à :

☐ 2015 unités ☒ 200 150 unités ☐ 215 unités ☐ 2 150 unités ☐ 20 150 unités

Exercice 4

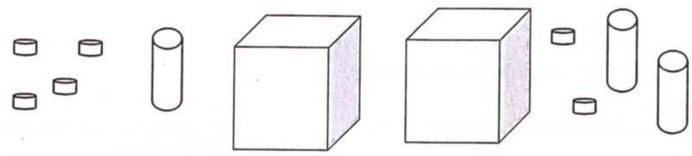
Entoure le nombre le plus grand parmi les deux :

2 milliers et 26 centaines 3 milliers et 15 centaines

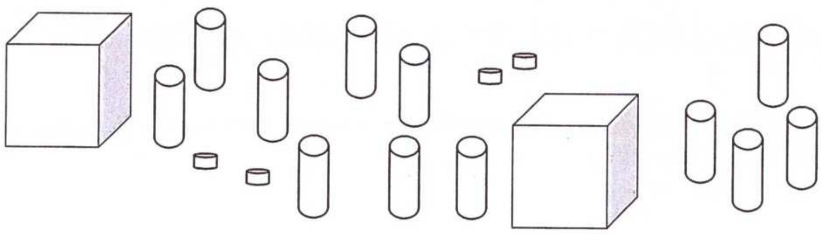
Explique comment tu as fait :

parce que dans le deux ièmes il y a écrit 3 milliers et 15 centiemes ~~es~~ c'est la plus grand

1. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? 110



2. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? 180



3. De combien de tubes a-t-on besoin pour emballer 859 bonbons ?

on a besoin 102 tubes

Exercice 9

Coche les expressions qui sont égales à 345 012 :

☒ 34 + 5 012 ☒ 300 000 + 45 012 ☒ 34 000 + 5 012

☐ 10 + 345 000 + 2 ☐ 12 + 40 000 + 300 000 + 5000

Annexe 5.2 : Dimension CA

Production de Sébastien (CA1)

358 + 99 358 + 100 − 1 = 457 150 - 19 150 − 20 − 1 = 151	538 × 702 1076 +3766.. 377676	8463 | 12 006 | 705 63 03
Exercice 5	Exercice 7	

Production de Lahra (CA2)

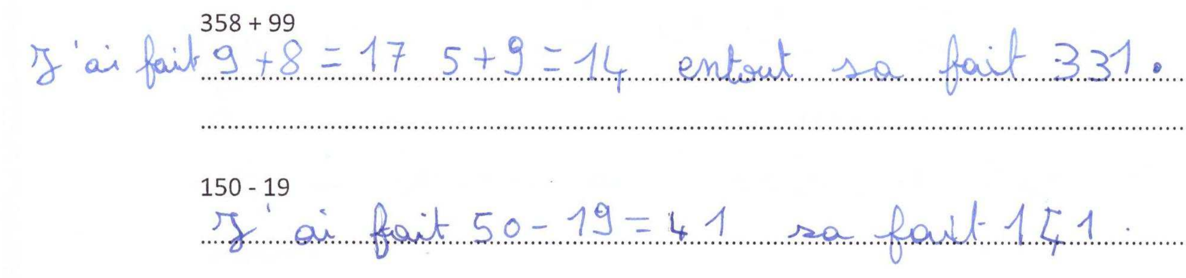
358 + 99
358 + 90 = 448 448 + 9 = 457

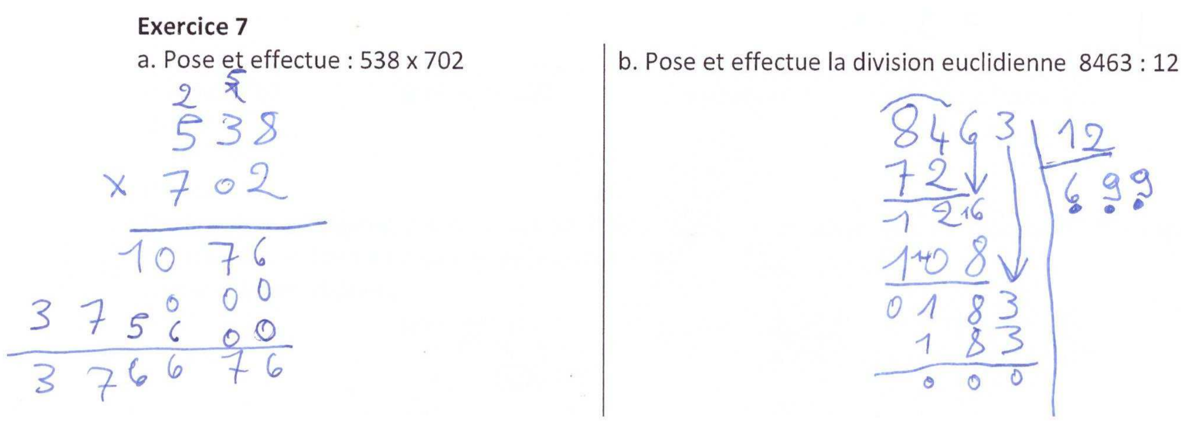
150 - 19
150 − 10 = 140 140 − 9 = 131

538
× 702
1076
0000
376600
377676

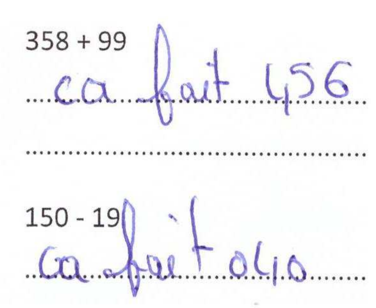
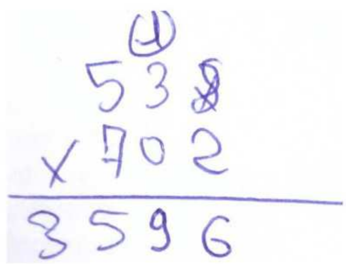
8463 | 12
84 | 705
006
0
63
60
03

Production d'élève de Wekelia (CA3)





Production de Mohamadou (CA4)

		*Pas de réponse sur la division*
Exercice 5	Exercice 7	

ANNEXE 5.3 : DIMENSION RE

Production de Maelle

1. Si je choisis 30 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée que j'obtiens est ....

Écris les calculs que tu as faits : 30x2 = 60 60+8 = 68 – 3 = 65

C'est 65

2. J'ai obtenu 125 comme nombre d'arrivée. Quel nombre avais-je choisi au départ ?

Écris les calculs que tu as faits : 125 x 2 = 250 250+8 = 258 258 – 3 = 255

C'est 255

358 + 99

~~(357+100 [illegible] 454+3 453+4)~~ [(358 + 100) – 1] = 457

150 - 19

[(150 – 20) + 1] = 131 ou [(150 – 10) – 9] = 131

Production d' Enora

358 + 99

358 + 100 = 458 458 – 1 = 457

150 - 19

150 – 20 = 130 130 + 1 = 131

1. Si je choisis 30 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée que j'obtiens est ....

Écris les calculs que tu as faits : 30 x 2 = 60 60 + 8 = 68 – 3 = 65

2. J'ai obtenu 125 comme nombre d'arrivée. Quel nombre avais-je choisi au départ ?

Écris les calculs que tu as faits : 123 + 3 = 128 128 – 8 = 120

120 : 2 = 70

Production de Vaishaga

358 + 99 = 457

350 + 100 = 450 ~~+1~~

450 + 8 = 458 − 1 = 457

150 - 19 = 131

150 − 10 = 140 − 9 = 131

1. Si je choisis 30 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée que j'obtiens est 65

Écris les calculs que tu as faits : 30 × 2 = 60 + 8 = 68 − 3 = 65

2. J'ai obtenu 125 comme nombre d'arrivée. Quel nombre avais-je choisi au départ ? 60

Écris les calculs que tu as faits : ~~125 + 835~~

125 + 3 = 128 − 8 = 120 ÷ 2 = 60

Production d'Aaliyah

358 + 99

459. Je fait 358 + 100 = 458 puis − 1 = 459.

150 - 19

131. Je fait 150 − 20 = 130 puis + 1 = 131.

1. Si je choisis 30 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée que j'obtiens est 65

Écris les calculs que tu as faits : 30 × 2 = 60 ; 60 + 8 = 68 68 − 3 = 65

2. J'ai obtenu 125 comme nombre d'arrivée. Quel nombre avais-je choisi au départ ? 60

Écris les calculs que tu as faits : 125 + 3 = 128 128 − 8 = 120

120 ÷ 2 = 60

ANNEXE 6 : PRODUCTIONS D'ÉLÈVES AU TEST DIAGNOSTIQUE : PROFILS

Annexe 6.1 : Profil 1- Kais

Exercice 1

Écris en lettres 127050 : ~~deux~~ cent-vingt-sept-mille-cinquante.

Écris en chiffres deux-millions-trois-cents : 2 000 300

Exercice 2

Complète la suite de nombres : 4677 – 4777 – 4877 – 4977 5077

Exercice 3

Coche pour chaque question la bonne réponse :

- Combien y a t-il de milliers dans 5 millions ?

☐ 5 ☒ 50 ☐ 500 ☐ 5 000

- 20 centaines et 15 dizaines est égal à :

☐ 2015 unités ☐ 200 150 unités ☐ 215 unités ☒ 2 150 unités ☐ 20 150 unités

Exercice 4

Entoure le nombre le plus grand parmi les deux :

2 milliers et 26 centaines 3 milliers et 15 centaines

2000 + 2600 = 4600 3000 + 1500 = 4500

Explique comment tu as fait : J'ai dabord regardee quel était le nombre que l'on avait dans chaque réponse. Puis j'ai comparer.

Exercice 5

Écris en ligne les différents calculs que tu fais pour trouver le résultat chaque calcul. Tu ne dois pas poser l'opération.

358 + 99

~~350 + 50 = 400 400~~ 358 + 100 = 458 458 - 1 = 457

150 - 19

150 + 20 = 170 170 - 1 = 169 ou

150 + 19 = 169

Sans poser la division, donne le quotient entier et le reste de 243 : 10

Explique avec des calculs en ligne ou une phrase comment tu as fait : ~~je sais~~ comme on ~~que 243 x 10 = 2430 = on rajoute un zéro~~ divise par 10.

quotient = 24 reste = 3

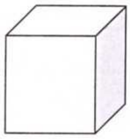
Je prend le nombre de dizain

Exercice 6

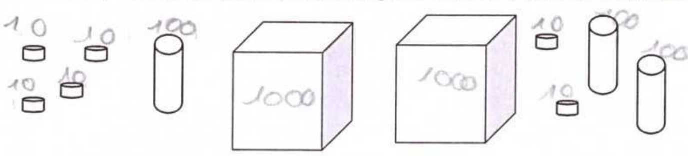
Une entreprise de fabrication de bonbons a différents emballages selon le nombre de bonbons emballés :

1 sachet  contient 10 bonbons

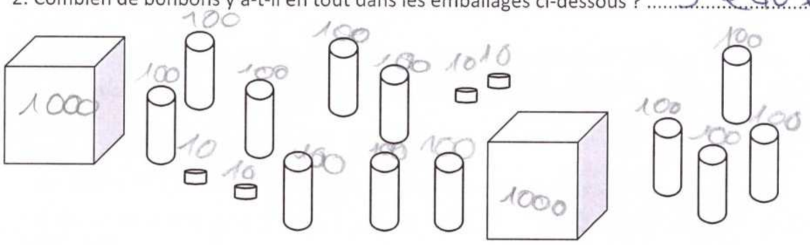
1 tube  contient 10 sachets

1 boîte  contient 10 tubes

1. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? 2360 bonbons



2. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? 3 240 bonbons.



3. De combien de tubes a-t-on besoin pour emballer 859 bonbons ?

9 sachets.

Exercice 7

a. Pose et effectue : 538 x 702

```
    702
  X 538
   5616
 +21060
+351000
 377676
```

b. Pose et effectue la division euclidienne 8463 : 12

```
8463 | 12
-84  |----
 006 | 705
  -0
  63
 -60
  03
```

Exercice 8

Dans une librairie, les 3 vendeuses doivent ranger des livres dans des cartons.
Dans chaque carton, il faut placer 8 livres ; elles doivent mettre en tout moins de 4 heures pour ranger l'ensemble.
De combien de cartons auront-elles besoin pour ranger 427 livres ?

Il faudra 54 cartons 53 seront remplit.
Et 1 contiendra 3 livres.

Exercice 9

Coche <u>les expressions</u> qui sont égales à 345 012 :

☐ 34 + 5 012 ☒ 300 000 + 45 012 ☐ 34 000 + 5 012
☒ 10 + 345 000 + 2 ☒ 12 + 40 000 + 300 000 + 5000

Exercice 10

Nombre de départ: 6 $\xrightarrow{\times 2}$ 12 $\xrightarrow{+8}$ 20 $\xrightarrow{-3}$ 17 Nombre d'arrivée

Dans ce programme de calcul, si je choisis 6 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée est 17

1. Si je choisis 30 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée que j'obtiens est 65
Écris les calculs que tu as faits : 30×2=60 60+8=68 68-3=65

2. J'ai obtenu 125 comme nombre d'arrivée. Quel nombre avais-je choisi au départ ? 60.
Écris les calculs que tu as faits : 125+3=128 128-8=120 120÷2=60
J'avais 60 en nombre de départ.

Exercice 11

Noam a voulu calculer 1 379 + 562 à la calculatrice, mais il a tapé par erreur : 1 279 + 562.
A partir du résultat qu'il a obtenu, que doit-il faire pour corriger son erreur sans taper à nouveau tout le calcul ?
Coche la bonne réponse

☐ Ajouter 10 ☒ Ajouter 100 ☐ Soustraire 10 ☐ Soustraire 100

Exercice 12

Dans une boulangerie, Pierre a vendu 3 fois moins de brioches que de croissants. Il a vendu 24 croissants. Combien a t-il vendu de brioches ?
Coche la bonne réponse

☐ 21 ☐ 8 ☐ 27 ☒ 72

427	8
-40	53
027	
-24	
03	

Annexe 6.2 : Profil 2 : Pawel

Exercice 1

Écris en lettres 127050 : cent-vingt - sept - mille - cinquante

Écris en chiffres deux-millions-trois-cents : 2 000 300

Exercice 2

Complète la suite de nombres : 4677 – 4777 – 4877 – 4977 - 5077

Exercice 3

Coche pour chaque question la bonne réponse :

- Combien y a t-il de milliers dans 5 millions ?

☒ 5 ☐ 50 ☐ 500 ☐ 5 000

- 20 centaines et 15 dizaines est égal à :

☐ 2015 unités ☐ 200 150 unités ☐ 215 unités ☐ 2 150 unités ☒ 20 150 unités

Exercice 4

Entoure le nombre le plus grand parmi les deux :

2 milliers et 26 centaines 3 milliers et 15 centaines

Explique comment tu as fait :

parceque 3 milliers c'est plus grand que 2 milliers.

Exercice 5

Écris en ligne les différents calculs que tu fais pour trouver le résultat chaque calcul. <u>Tu ne dois pas poser l'opération.</u>

358 + 99

300 + 90 = 390 + 10 = 400 + 9 = 409 + 40 = 449 + 8 = 457

150 - 19

150 - 10 = 140 - 9 = 139

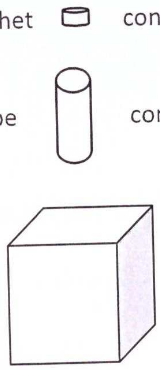
Explique avec des calculs en ligne ou une phrase comment tu as fait :

j'ai fait : 10 × 24 = 240 : 24 et le 3

quotient = 24 reste = 3

Exercice 6

Une entreprise de fabrication de bonbons a différents emballages selon le nombre de bonbons emballés :

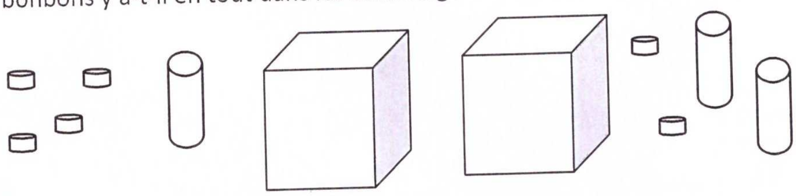


1 sachet contient 10 bonbons

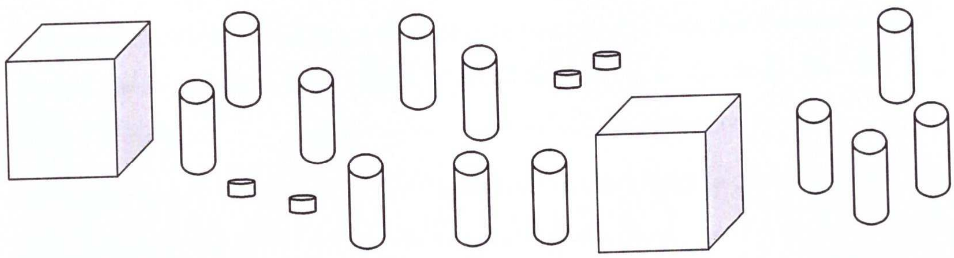
1 tube contient 10 sachets

1 boîte contient 10 tubes

1. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? 2360



2. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? 3240



3. De combien de tubes a-t-on besoin pour emballer 859 bonbons ?

ont a besoins 86 tubes

Exercice 7

a. Pose et effectue : 538 x 702

538
× 702
1076
0000
376600
377676

b. Pose et effectue la division euclidienne 8463 : 12

8463 | 12
-84 | 705
006
-0
63
-60
03

Exercice 8

Dans une librairie, les 3 vendeuses doivent ranger des livres dans des cartons.
Dans chaque carton, il faut placer 8 livres ; elles doivent mettre en tout moins de 4 heures pour ranger l'ensemble.
De combien de cartons auront-elles besoin pour ranger 427 livres ?

(8×50 = 400), (8×51 = 408), (8 × 53 = 424), (8 × 54 = 432)

ils en fait 54 cartons pour les 3 vendeuse

Exercice 9

Coche les expressions qui sont égales à 345 012 :

☐ 34 + 5 012 ☒ 300 000 + 45 012 ☐ 34 000 + 5 012
☒ 10 + 345 000 + 2 ☒ 12 + 40 000 + 300 000 + 5000

Exercice 10

Nombre de départ $\boxed{6} \xrightarrow{\times 2} (12) \xrightarrow{+8} (20) \xrightarrow{-3} \boxed{17}$ Nombre d'arrivée

Dans ce programme de calcul, si je choisis 6 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée est 17

1. Si je choisis 30 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée que j'obtiens est 65
Écris les calculs que tu as faits : (30×2 = 60) (60+8 = 68)
(68-3 = 65)

2. J'ai obtenu 125 comme nombre d'arrivée. Quel nombre avais-je choisi au départ ?
Écris les calculs que tu as faits : (125-3 = 122), (122-8 = 114)
(114 ÷ 2 = 57) le nombre de depart c'était 57

Exercice 11

Noam a voulu calculer 1 379 + 562 à la calculatrice, mais il a tapé par erreur : 1 279 + 562.
A partir du résultat qu'il a obtenu, que doit-il faire pour corriger son erreur sans taper à nouveau tout le calcul ?
Coche la bonne réponse

☐ Ajouter 10 ☒ Ajouter 100 ☐ Soustraire 10 ☐ Soustraire 100

Exercice 12

Dans une boulangerie, Pierre a vendu 3 fois moins de brioches que de croissants. Il a vendu 24 croissants. Combien a t-il vendu de brioches ?
Coche la bonne réponse

☒ 21 ☐ 8 ☐ 27 ☐ 72

Annexe 6.3 : Profil 2 : Sirine

Exercice 1

Écris en lettres 127050 : cent-vingt-sept-mille-cinquante

Écris en chiffres deux-millions-trois-cents : 2 000 300

Exercice 2

Complète la suite de nombres : 4677 – 4777 – 4877 – 4977 - 5077

Exercice 3

Coche pour chaque question la bonne réponse :

- Combien y a t-il de milliers dans 5 millions ?

□ 5 □ 50 ☒ 500 □ 5 000

- 20 centaines et 15 dizaines est égal à :

□ 2015 unités □ 200 150 unités ☒ 215 unités □ 2 150 unités □ 20 150 unités

Exercice 4

Entoure le nombre le plus grand parmi les deux :

2 milliers et 26 centaines (2026) 3 milliers et 15 centaines (3015)

Explique comment tu as fait :

~~Je l'ai es~~ Je les ai placé dans un tableau de numération et j'ai vu que 3 mille était plus grand que 2 mille.

Exercice 5

Écris en ligne les différents calculs que tu fais pour trouver le résultat chaque calcul. Tu ne dois pas poser l'opération.

358 + 99

300+90 = 390+50 = 440+9 = 449 +8 = 458

150 - 19

150 - 10 = 140 - 9 = 131

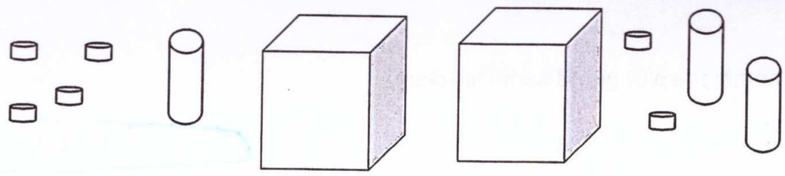
Sans poser la division, donne le quotient entier et le reste de 243 : 10

Explique avec des calculs en ligne ou une phrase comment tu as fait : A chaque fois j'ai calculer de 10 et à la virgule il restait 3 j'ai mit la virgule et rajouter un zéro

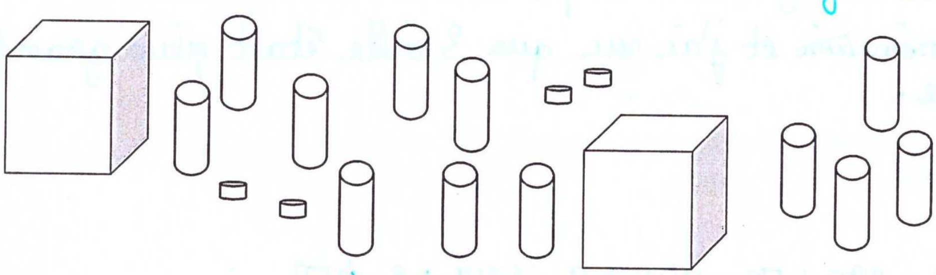
quotient = 24,3 reste = 0

millions			milliers			unité simple		
c	d	u	c	d	u	c	d	u
					2	0	2	6
					3	0	1	5

1. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? Il y a 3450 bonbons.



2. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? Il y a 960 bonbons



3. De combien de tubes a-t-on besoin pour emballer 859 bonbons ?

On a besoin de 1840 bonbons.

Exercice 7

a. Pose et effectue : 538 x 702

```
    538
  x 702
   1076
   000.
 3766..
 377676
```

b. Pose et effectue la division euclidienne 8463 : 12

```
 8463 | 12
-84   |----
  006 | 705
 -  0
   63
  -60
   03
```

Exercice 8

Dans une librairie, les 3 vendeuses doivent ranger des livres dans des cartons.
Dans chaque carton, il faut placer 8 livres ; elles doivent mettre en tout moins de 4 heures pour ranger l'ensemble.
De combien de cartons auront-elles besoin pour ranger 427 livres ?

Elles auront besoins de 53 cartons les trois.
Il restera 3 livres à part.

$$\begin{array}{r|l} 427 & 8 \\ -40 & 53 \\ \hline 027 & \\ -24 & \\ \hline 03 & \end{array}$$

Exercice 9

Coche <u>les expressions</u> qui sont égales à 345 012 :

- ☐ 34 + 5 012
- ☒ 10 + 345 000 + 2
- ☒ 300 000 + 45 012
- ☒ 12 + 40 000 + 300 000 + 5000
- ☐ 34 000 + 5 012

Exercice 10

Nombre de départ						Nombre d'arrivée
6	$\xrightarrow{\times 2}$	12	$\xrightarrow{+8}$	20	$\xrightarrow{-3}$	17

Dans ce programme de calcul, si je choisis 6 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée est 17

1. Si je choisis 30 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée que j'obtiens est ....

Écris les calculs que tu as faits : ~~$30 \xrightarrow{-20} 10 \xrightarrow{+7} 17$~~

$30 \xrightarrow{\times 2} 60 \xrightarrow{+8} 68 \xrightarrow{-3} 64$

2. J'ai obtenu 125 comme nombre d'arrivée. Quel nombre avais-je choisi au départ ?

Écris les calculs que tu as faits : $110 \xrightarrow{\times 2} 120 \xrightarrow{+8} 128 \xrightarrow{-3} 125$

$125 \xrightarrow{+3} 128 \xrightarrow{-8} 120 \xrightarrow{\times : 2} 110$

Exercice 11

Noam a voulu calculer 1 379 + 562 à la calculatrice, mais il a tapé par erreur : 1 279 + 562.
A partir du résultat qu'il a obtenu, que doit-il faire pour corriger son erreur sans taper à nouveau tout le calcul ?

Coche la bonne réponse

☐ Ajouter 10 ☒ Ajouter 100 ☐ Soustraire 10 ☐ Soustraire 100

Exercice 12

Dans une boulangerie, Pierre a vendu 3 fois moins de brioches que de croissants. Il a vendu 24 croissants. Combien a t-il vendu de brioches ?

Coche la bonne réponse

☐ 21 ☒ 8 ☐ 27 ☐ 72

Annexe 6.3 : Profil 3 : Youssef

Exercice 1

Écris en lettres 127050 : cent-vingt-sept-mille-sinquante

Écris en chiffres deux-millions-trois-cents : 2 000 300

Exercice 2

Complète la suite de nombres : 4677 – 4777 – 4877 – 4977 - 4087

Exercice 3

Coche pour chaque question la bonne réponse :

- Combien y a t-il de milliers dans 5 millions ?

☐ 5 ☐ 50 ☐ 500 ☒ 5 000

- 20 centaines et 15 dizaines est égal à :

☒ 2015 unités ☐ 200 150 unités ☐ 215 unités ☐ 2 150 unités ☐ 20 150 unités

Exercice 4

Entoure le nombre le plus grand parmi les deux :

~~2 milliers et 26 centaines~~ 3 milliers et 15 centaines

Explique comment tu as fait :

J'ai choisie 3 milliers et 15 centaines car il y a plus de ~~deux~~ 2 milième

Exercice 5

Écris en ligne les différents calculs que tu fais pour trouver le résultat chaque calcul. Tu ne dois pas poser l'opération.

358 + 99

~~358+99~~

150 - 19

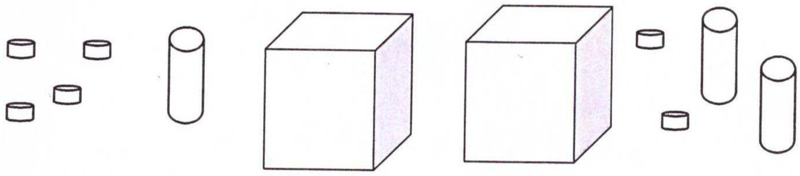
150-19 = 140

Sans poser la division, donne le quotient entier et le reste de 243 : 10

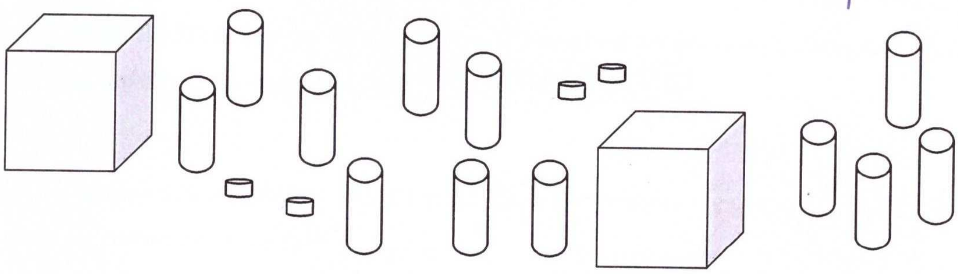
Explique avec des calculs en ligne ou une phrase comment tu as fait : ....

quotient = ... reste = ...

1. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? Il y a 110 bonbon



2. Combien de bonbons y a-t-il en tout dans les emballages ci-dessous ? Il y a 180



3. De combien de tubes a-t-on besoin pour emballer 859 bonbons ?

....

Exercice 7

a. Pose et effectue : 538 x 702

```
   538
 × 702
 10076
  0000
+ 7660
  8736
```

b. Pose et effectue la division euclidienne 8463 : 12

125 + 3 = ~~112~~ 122

122 − 8 = 114

114 − 2x =

Exercice 8

Dans une librairie, les 3 vendeuses doivent ranger des livres dans des cartons.
Dans chaque carton, il faut placer 8 livres ; elles doivent mettre en tout moins de 4 heures po ranger l'ensemble.
De combien de cartons auront-elles besoin pour ranger 427 livres ?

Il faudra 410 carton.

Exercice 9

Coche <u>les expressions</u> qui sont égales à 345 012 :

☐ 34 + 5 012 ☐ 300 000 + 45 012 ☒ 34 000 + 5 012
☐ 10 + 345 000 + 2 ☐ 12 + 40 000 + 300 000 + 5000

Exercice 10

Nombre de départ — Nombre d'arrivée

$$\boxed{6} \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{+ 8} 20 \xrightarrow{- 3} \boxed{17}$$

Dans ce programme de calcul, si je choisis 6 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée est 17

1. Si je choisis 30 comme nombre de départ, le nombre d'arrivée que j'obtiens est ....

Écris les calculs que tu as faits : $30 \xrightarrow{\times 2} 60 \xrightarrow{+8} 68 \xrightarrow{-3} \boxed{65}$

2. J'ai obtenu 125 comme nombre d'arrivée. Quel nombre avais-je choisi au départ ?

Écris les calculs que tu as faits : ...

Exercice 11

Noam a voulu calculer 1 379 + 562 à la calculatrice, mais il a tapé par erreur : 1 279 + 562.
A partir du résultat qu'il a obtenu, que doit-il faire pour corriger son erreur sans taper à nouveau tou le calcul ?

Coche la bonne réponse

☐ Ajouter 10 ☒ Ajouter 100 ☐ Soustraire 10 ☐ Soustraire 100

Exercice 12

Dans une boulangerie, Pierre a vendu 3 fois moins de brioches que de croissants. Il a vendu 2· croissants. Combien a t-il vendu de brioches ?

Coche la bonne réponse

☐ 21 ☒ 8 ☐ 27 ☐ 72

TITRE :

Étude de la validité de dispositifs d'évaluation et conception d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves de fin d'école.

AUTEUR :

Nadine Grapin

RESUME :

Alors que les évaluations externes à grande échelle en mathématiques se développent de plus en plus, l'analyse de leur contenu en lien avec l'interprétation de leurs résultats est peu souvent étudiée, notamment en didactique des mathématiques. La thèse aborde la question de l'évaluation sous deux angles : l'étude de la validité des évaluations externes et le développement d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves en vue de la conception d'une évaluation diagnostique. Nous avons choisi de centrer notre travail sur l'évaluation des connaissances des élèves en fin d'école primaire dans le domaine numérique, plus précisément sur les nombres entiers à travers la numération décimale, les relations arithmétiques entre les nombres, le calcul et les problèmes numériques.
Un bilan des travaux existant en didactique des mathématiques sur l'évaluation, en particulier sur les dispositifs d'évaluations externes bilan à grande échelle et sur les évaluations diagnostiques introduit notre problématique. Nous nous situons dans une approche anthropologique et cognitive afin de définir, sur le domaine étudié, un référent épistémologique à partir duquel il est possible d'analyser le contenu des évaluations et d'interpréter les résultats des élèves.
Un premier axe de la thèse vise à développer une méthodologie d'analyse de la validité de dispositifs d'évaluation, en particulier externes, articulant des approches didactique, épistémologique, cognitive en complément d'approches psychométriques, spécifiques aux évaluations à grande échelle. Cette méthodologie est ensuite exploitée pour étudier les évaluations externes CEDRE fin d'école en 2008 et 2014 du point de vue de leur contenu (sur le domaine étudié) et de l'interprétation des résultats qui en est faite.
Le second axe conduit à la définition d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves à partir de modes technologiques aboutissant à la définition de profils d'élèves. Dans la thèse, nous mettons ce modèle à l'épreuve à travers la conception et l'analyse des résultats d'une évaluation diagnostique menée en fin de cycle 3, mais nous le destinons, à terme, à sous-tendre un diagnostic automatique permettant la mise en œuvre de parcours d'enseignement différencié.

MOTS- CLES :

Évaluation, évaluations externes, validité, diagnostic, connaissances numériques.

Éditeur: IREM de Paris
Responsable de la publication: F. Vandebrouck
IREM de Paris 7 – Case 7018
Université Paris Diderot
75205 Paris cedex 13

Dépôt légal : 2016
ISBN : 978-2-86612-372-7

http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/